

**Teresa BIAŁAS, Marek JASIŃSKI**

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu, Polska

## **METODA MONTE CARLO W ZAGADNIENIACH O DUŻEJ LICZBIE STOPNI SWOBODY**

### **Streszczenie**

Wraz ze wzrostem możliwości obliczeniowych komputerów i upowszechnieniu technologii obliczeń chmurowych rośnie znaczenie metod symulacyjnych, w szczególności metody Monte Carlo. Jakość uzyskanych wyników w dużej mierze zależy od zastosowanych w tej metodzie ciągów liczbowych. W artykule przybliżono zagadnienie tworzenia oraz zastosowania ciągów pseudolosowych i quasilosowych. Celem niniejszej publikacji było eksperymentalne zbadanie różnic w uzyskanych wynikach przy zastosowaniu różnych ciągów liczbowych dla zagadnień o dużej liczbie stopni swobody.

**Słowa kluczowe:** metoda Monte Carlo, metoda quasi-Monte Carlo, ciąg Haltona, szyfrowany ciąg Haltona, dyskrepancja, ciąg van der Corputa.

## **MONTE CARLO METHOD IN MATTERS WITH A LARGE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM**

### **Summary**

Along with the increase in computing capabilities of computers and the spread of cloud computing technologies, the importance of simulation methods, in particular the Monte Carlo method, grows. The quality of the obtained results largely depends on the number sequences used in this method. The article presents the issue of creating and applying pseudorandom and quasi-random sequences. The aim of this publication was to experimentally investigate the differences in the obtained results using different number sequences for problems with a large number of degrees of freedom.

**Key words:** Monte Carlo method, quasi-Monte Carlo method, Halton sequence, scrambled Halton sequence, discrepancy, van der Corput sequence.

### **Wprowadzenie**

Statystyka jako nauka w dużej mierze zajmuje się obserwacją otaczającego nas świata lub też posługuje się eksperymentem dla potwierdzenia swoich teorii. Badanie statystyczne zwykle realizowane jest według schematu: gromadzenie i przetwarzanie danych, a następnie ich analiza oraz interpretacja.

Bardzo często zgromadzenie danych obejmujących całą populację jest kosztowne, trudne w realizacji lub wręcz niemożliwe. Wówczas gromadzi się dane dla wybranych jednostek populacji. Definiuje się próbę statystyczną, którą należy rozumieć jak sposób wyodrębnienia ze zbioru populacji jej podzbioru, który następnie podlega badaniom. Stosując metody wnioskowania statystycznego, uogólnia się uzyskane wyniki na całą populację.

Każde takie wyodrębnienie podzbioru poddawanego następnie badaniom nazywamy realizacją próby. W wielu zastosowaniach mamy do czynienia z jej jednokrotną realizacją. Powodem takiego podejścia jest to, że realizacja próby jest trudna, kosztowna lub niemożliwa do powtórzenia w tych samych warunkach.

Istnieją jednak obszary badań, gdzie wielokrotnie powtórzona realizacja próby jest możliwa, wskazana lub wręcz niezbędna do tego, żeby uzyskać wyniki badań odpowiedniej jakości. Przykładem tego mogą być badania z zakresu fizyki cząstek elementarnych lub badania modeli teoretycznych.

Jedną z metod, w jakiej stosuje się wielokrotną realizację próby, jest metoda Monte Carlo (MC), która bardzo dobrze nadaje się np. do badania złożonych procesów stochastycznych, modelowanych za pomocą wielu zmiennych losowych (o wielu stopniach swobody). Metoda ta ma liczne zastosowania w ekonomii. Wykorzystuje się ją m.in. do analizy ryzyka projektów inwestycyjnych (Pawlak, 2012), modelowania zmienności inflacji (Brzozowska, 2020), analizy rynku nieruchomości (Bartłomowicz, 2011) czy wyceny opcji finansowych (Kosińska, 2016). Znajduje też zastosowanie w zarządzaniu projektami złożonymi. Przykładem tego może być wyznaczanie czasu trwania przedsięwzięcia złożonego opisanego siecią PERT (Van Slyke, 1963).

W metodzie tej stosuje się zazwyczaj ciągi liczb losowych lub „naśladowe” je ciągi liczb pseudolosowych, uzyskanych za pomocą specjalnych generatorów. Jednym z problemów związanych z metodą MC jest jej wolna zbieżność rzędu  $O(N^{-1})$ , gdzie  $N$  oznacza liczbę próby. Odmianą tej metody jest metoda quasi-Monte Carlo (QMC), w której zamiast ciągów losowych lub pseudolosowych stosuje się ciągi quasilosowe. Ciągi takie, zwane ciągami o niskiej rozbieżności (dyskrepacji), pozwalają na uzyskanie zbieżności rzędu  $O(N^{-1/2})$ . Ciągi quasilosowe, oprócz zalet, mają także wady, które ujawniają się szczególnie wtedy, gdy rozwiązywany problem ma dużą liczbę stopni swobody.

Podstawowym celem artykułu było zbadanie zachowania się metody MC oraz QMC w zagadnieniach o dużej liczbie stopni swobody przy zastosowaniu różnych ciągów liczbowych i czy zastosowanie ciągów quasilosowych istotnie wpływa na poprawę zbieżności. Rozważania poprzedzone zostały krótką charakterystyką metod. W części empirycznej przeprowadzono badanie modelu o 65 stopniach swobody obiema metodami i porównano uzyskane wyniki. Pokazano, że metoda QMC może dawać lepsze wyniki niż MC. Obliczenia i wykresy wykonane zostały w języku R.

## Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo to metoda rozwiązywania problemów matematycznych przez budowę modeli opisywanych za pomocą zmiennych losowych.

Przyjmuje się, że metoda ta, a właściwie grupa metod, została opisana pod koniec II wojny światowej. Grupa naukowców biorących udział w Projekcie Manhattan pod kierownictwem Nicholasa Metropolis, ze znaczącym udziałem m.in. Stanisława Ulama i Johna von Neumana, rozwinęła stosowaną już wcześniej metodę probabilistyczną do przybliżonego rozwiązywania problemów matematycznych, szczególnie takich, których rozwiązanie innymi metodami było trudne lub niemożliwe. Podejście do problemu, w którym poddaje się analizie wielokrotną realizację próby statystycznej, Nicholas Metropolis nazwał metodą Monte Carlo, nawiązując w ten sposób do słynnych kasyn w Monako i losowego jej charakteru.

Rozwój tej metody stał się możliwy z chwilą pojawienia się pierwszych komputerów, gdyż wymaga wielokrotnego powtórzenia realizacji próby, co wykonywane „ręcznie” było niezwykle pracochłonne.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że pomimo tego, iż metoda dostarcza wyniki w postaci przybliżonej, to przez dobór odpowiedniej liczby powtórzeń realizacji próby losowej można uzyskać wynik z zadaniem przybliżeniem.

Charakterystyczną cechą metody jest zwykle prosta struktura algorytmu obliczeń. Zazwyczaj rejestruje się wielokrotną realizację jednego lub kilku powiązanych ze sobą zdarzeń losowych. Rejestracja polega na zliczaniu liczby lub liczb „sukcesów” i odniesieniu ich do całkowitej liczby powtórzeń. Ważne jest, by każdy eksperyment był niezależny od pozostałych, a zdarzenia losowe były opisane odpowiednimi rozkładami losowymi, charakterystycznymi dla opisywanych przez nie zjawisk lub zachowania modeli.

Ciekawym jest fakt, że metodę tę można wykorzystywać tak do modelowania procesów mających charakter losowy, jak też budowy modeli stochastycznych, opisujących problemy matematyczne, które nie są w żaden sposób powiązane z przypadkowością. Przykładem może być wyznaczanie przybliżenia liczby  $\pi$  albo wyznaczanie wartości oznaczonych całek wielokrotnych.

Do obliczeń metody Monte Carlo, niezależnie od jej odmiany, potrzebne są ciągi liczbowe. Zwykle generuje się ciągi liczb z przedziału  $[0, 1]$  dla każdego stopnia swobody (wymiaru) problemu. Jeśli stopni swobody jest  $d$ , to można to interpretować jako rozmieszczenie punktów w  $d$ -wymiarowym hipersześcianie o boku 1, a kolejne liczby w ciągach jako współrzędne tych punktów. Jednym z podstawowych problemów MC jest odpowiednie rozmieszczenie wyznaczonych punktów wewnątrz hipersześcianu.

Do wyznaczenia współrzędnych punktów pomiarowych w metodzie MC stosuje się ciągi losowe lub pseudolosowe. Ciągi pseudolosowe generowane są za pomocą generatorów liczb pseudolosowych i są deterministyczne, ale pod wieloma względami można je traktować jako ciągi losowe o znanym rozkładzie. Podejście takie pozwala na możliwie wierne odwzorowanie modelowanego zjawiska. Daje to nie tylko możliwość wyznaczenia przybliżenia poszukiwanych wartości parametrów, ale także śledzenia przebiegu zjawiska.

### **Metoda quasi-Monte Carlo**

Zasadnicza różnica pomiędzy metodami MC i QMC wynika z zastosowania ciągów liczbowych. W metodzie QMC zastosowanie znajdują ciągi quasilosowe.

#### **Ciągi quasilosowe**

Ciągi quasilosowe to także ciągi deterministyczne, które w pewnych warunkach można traktować jako ciągi losowe, a cechują się niską rozbieżnością (dyskrepancją). Wyznaczane są za pomocą specjalnych generatorów, a następnie odpowiednio przekształcane. Uzyskane ciągi liczbowe mają pewne własności, które pozwalają na uzyskanie zadowalających przybliżeń parametrów przy mniejszej liczbie punktów, a także redukcję wariancji (Faure, Lemieux, 2009).

Podstawą do tworzenia ciągów quasilosowych jest generator liczb, wśród których najpopularniejszym jest generator van der Corputa (Staus, 2008).

#### **Generator van der Corputa**

Generowanie ciągów liczbowych za pomocą generatora van der Corputa oparte jest na tzw. liczbie bazowej  $b$ . Liczby generowane są w postaci ułamków właściwych. Samo generowanie podzielone jest na fazy, przy czym w każdej fazie mianownikiem ułamków jest liczba  $b^k$ , gdzie  $k$  – numer fazy. W każdej fazie wyznaczane jest  $b^{k-1}$  ułamków, które są równomiernie rozmieszczone na całym odcinku  $[0; 1]$ . Odległości między wyznaczonymi punktami wewnętrznymi w fazie  $k$  wynoszą  $\Delta h = \frac{1}{b^{k-1}}$ . Punkty zewnętrzne oddalone są od początku i końca przedziału o  $\frac{\Delta h}{2}$ .

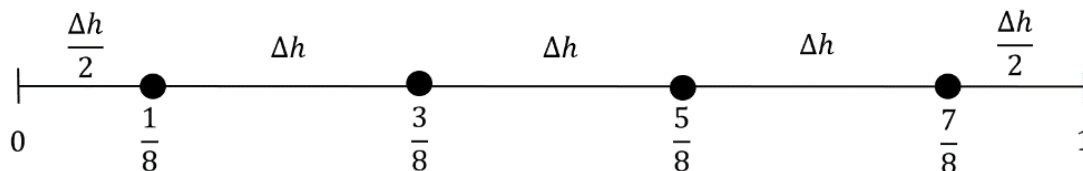
Przykładowo dla liczby bazowej 2:

Faza 1:  $\frac{1}{2}$

Faza 2:  $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$

Faza 3:  $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$

Faza 4:  $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}$



Rysunek 1. Rozmieszczenie punktów van der Corputa dla fazy 3 i liczby bazowej 2.

Źródło: opracowanie własne.

W celu uniknięcia efektu pokrywania się punktów wyznaczanych w kolejnych fazach przyjmuje się jako liczby bazowe kolejne liczby pierwsze. Dla dużej liczby stopni swobody może to stanowić problem, zwłaszcza przy niedużej liczbie wyznaczanych punktów, co opisane zostało w dalszej części opracowania. Następnie, poprzez odpowiednie przestawianie elementów wygenerowanego ciągu, otrzymuje się ciągi o niskiej rozbieżności (dyskrepacji).

Dyskrepacja typu  $L_d$  mówi o tym, na ile wygenerowane punkty wewnątrz  $d$ -wymiarowej hiperkostki są rozmieszczone równomiernie (Heinrich, 1996). Korzystna z punktu widzenia dokładności metody jest jak najniższa dyskrepacja, co sprawia, że niezależnie od wyznaczonej liczby punktów są one rozmieszczone równomiernie.

Do najpopularniejszych ciągów o niskiej dyskrepacji można zaliczyć ciągi:

- Haltona;
- Sobola;
- Faure'a.

Zachodzi także zależność:

$$L_d \geq c_d \frac{\sqrt{\ln N}}{N}$$

gdzie:

$c_d$  – pewna stała liczbowa zależna od rodzaju ciągu i liczby stopni swobody  $d$ ,

$N$  – liczba punktów.

W tabeli 1 pokazano wartości współczynnika  $c_d$  dla różnych metod niskiej dyskrepacji.

Tabela 1

Wartości współczynnika  $c_d$  dla różnych metod niskiej dyskrepacji

d	2	3	4	5	6	7	13	$\infty$
Halton	0,65	0,81	1,25	2,62	6,13	17,3	90 580	$\infty$
Sobol	1,04	1,00	1,44	1,66	3,20	5,28	647	$\infty$
Faure	0,39	0,12	0,099	0,024	0,018	0,0041	0,00001	0

Źródło: *Generatory liczb pseudolosowych w inicjacji populacji bazowej strategii ewolucyjnej*, J. Arabas, M. Słomka, 2011, pobrano z: <https://troja.uksw.edu.pl/>.

Na podstawie danych z tabeli 1 można przypuszczać, że dla problemów o dużej liczbie stopni swobody wskazane jest stosowanie ciągów Faure'a i niestosowanie ciągów Haltona. W badanym w dalszej części artykułu przykładzie sprawdzono zachowanie się obu rodzajów ciągu.

W języku R dostępna jest funkcja do obliczania m.in. dyskrepancji typu  $L_2$ . Można pomocniczo wykorzystać tę funkcję do analizy dyskrepancji wielowymiarowej.

### **Problemy w stosowaniu ciągów quasilosowych**

Jak już wspomniano, ciągi quasilosowe uzyskuje się poprzez odpowiednie, opisane w literaturze, przekształcenie ciągów van der Corputa (Faure, Lemieux, 2009). Dzięki temu kolejność wypełniania hipersześcianu wyznaczanymi punktami jest taka, że na każdym etapie wyznaczania punktów ich rozbieżność punktów jest mała, co oznacza, że są równomiernie rozmieszczone. Stosowanie takich ciągów wiąże się jednak z pewnymi problemami, które widoczne są przy modelowaniu zjawisk o dużej liczbie stopni swobody.

W celu uniknięcia wyznaczania punktów pokrywających się, w ciągach quasilosowych jako liczby bazowe wykorzystuje się liczby pierwsze. Dla każdego stopnia swobody wykorzystana jest inna liczba pierwsza, co przy dużej liczbie stopni swobody skutkuje zastosowaniem dużych liczb pierwszych. Może to powodować wzrost rozbieżności punktów i korelacji pomiędzy współrzędnymi tych punktów.

W analizowanym w dalszej części opracowania przykładzie liczba stopni swobody wynosi  $d = 65$ . Dla początkowej sekwencji, pomiędzy współrzędnymi powiązanych z dużymi liczbami pierwszymi występuje silna korelacja oraz wzrost dyskrepancji. Przykładowo, dla pierwszego tysiąca punktów współczynnik korelacji liniowej Pearsona między współrzędnymi 64 i 65 w ciągach Haltona i Faure'a wynosi odpowiednio 0,93 i 0,82, a dyskrepancja typu  $L_2$  0,0343 i 0,0337.

Dla pierwszych 10 tysięcy punktów współczynnik korelacji liniowej Pearsona między współrzędnymi 64 i 65 w ciągach Haltona i Faure'a wynosi odpowiednio 0,46 i 0,05, zaś dyskrepancja typu  $L_2$  0,0340 i 0,0036. Widoczna jest tu wyraźna poprawa wskaźników dla ciągów Faure'a.

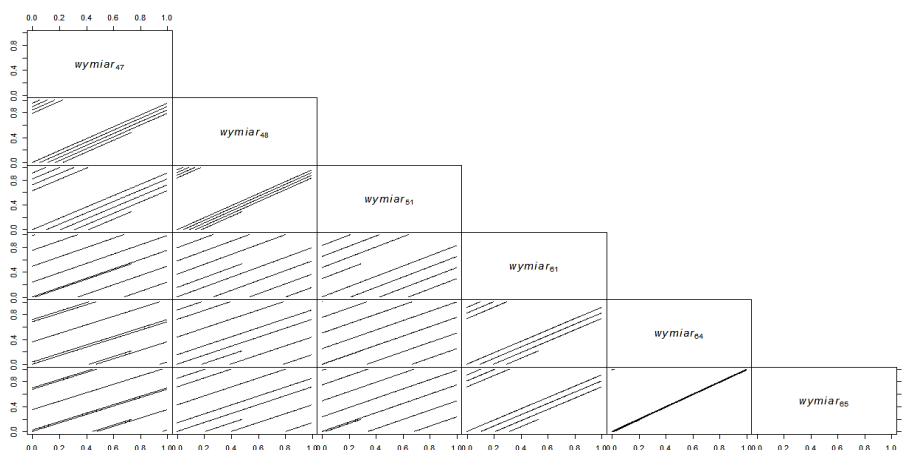
Wysoka dyskrepancja i korelacja mają wpływ na dokładność obliczeń i wskazane jest stosowanie dodatkowych przekształceń wygenerowanych ciągów, np. szyfrowania (Faure, Lemieux, 2009), tasowania (Staus, 2008) lub/i pominięcia początkowej sekwencji ciągów.

W języku R dostępne są biblioteki pozwalające na przekształcenie ciągów Haltona do szyfrowanych ciągów Haltona (scrambled Halton sequence), zwanych także uogólnionymi ciągami Haltona (generalized Halton sequence).

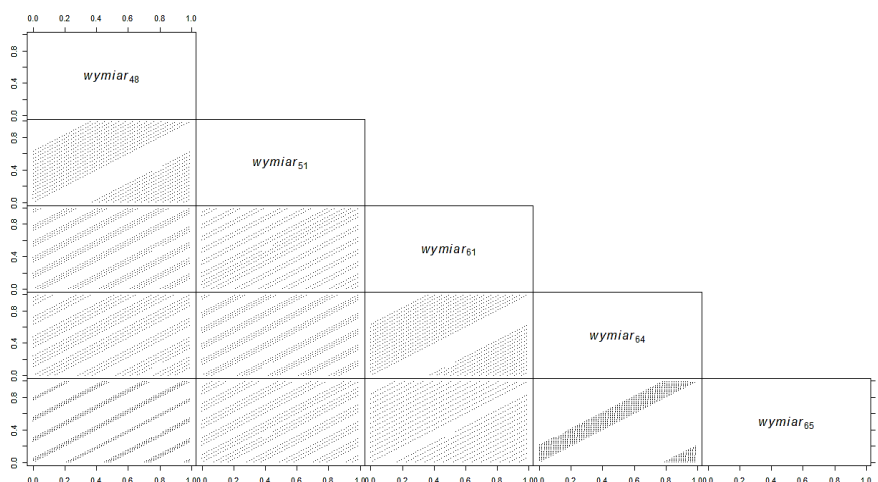
Dla pierwszego tysiąca punktów szyfrowanego ciągu Haltona współczynnik Pearsona i dyskrepancja typu  $L_2$  dla wymiarów 64 i 65 wynoszą odpowiednio 0,01 i 0,0013, są to wartości zdecydowanie niższe dla ciągów Haltona i Faure'a.

Dla pierwszych 10 tysięcy punktów szyfrowanego ciągu Haltona współczynnik Pearsona i dyskrepancja typu  $L_2$  dla wymiarów 64 i 65 wynoszą odpowiednio 0,002 i 0,0002, są to także wartości zdecydowanie niższe dla ciągów Haltona, Faure'a. Należy zatem oczekiwać, że szyfrowane ciągi Haltona będą dawać lepsze wyniki symulacji.

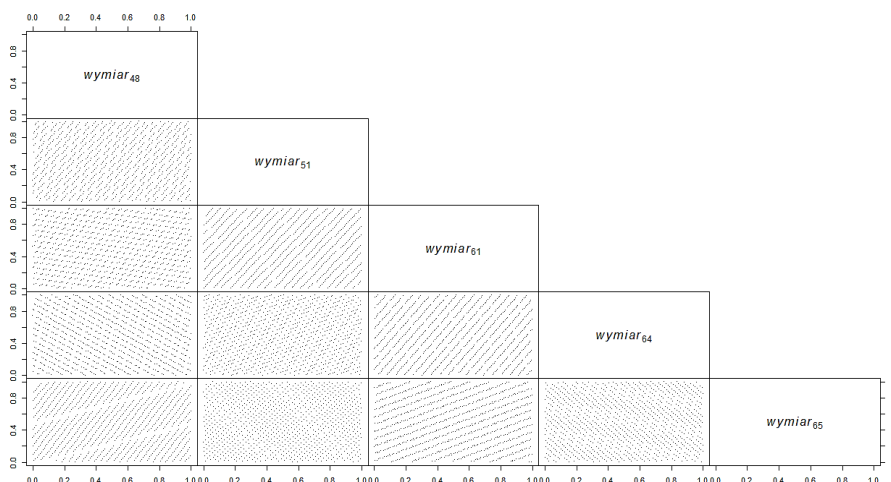
Dla zobrazowania problemu na rysunkach 2-4 pokazane zostały wybrane rzuty pierwszego tysiąca punktów odpowiednio dla ciągów Haltona, Faure'a i szyfrowanych Haltona. Oczekiwane równomierne rozmieszczenie punktów widoczne jest jedynie dla szyfrowanych ciągów Haltona.



Rysunek 2. Rozmieszczenie rzutów na płaszczyznę dwuwymiarową 1 000 punktów, uzyskanych z ciągów Haltona dla wybranych wymiarów (48, 51, 61, 64, 65).  
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 3. Rozmieszczenie rzutów na płaszczyznę dwuwymiarową 1 000 punktów, uzyskanych z ciągów Faure'a dla wybranych wymiarów (48, 51, 61, 64, 65).  
Źródło: opracowanie własne.

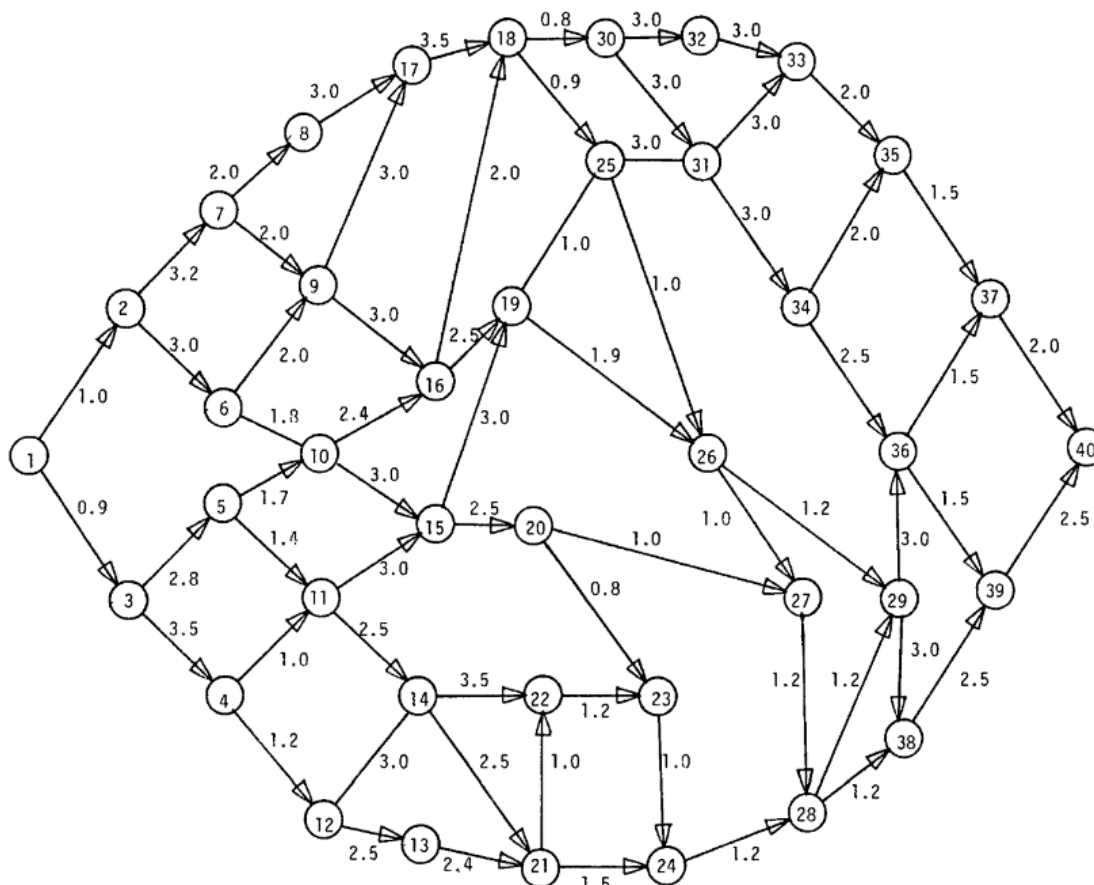


Rysunek 4. Rozmieszczenie rzutów na płaszczyznę dwuwymiarową 1 000 punktów, uzyskanych z szyfrowanych ciągów Haltona dla wybranych wymiarów (48, 51, 61, 64, 65).  
Źródło: opracowanie własne.

## Badania empiryczne problemu o wielu stopniach swobody

Do eksperymentu wybrana została sieć PERT o 65 czynnościach (rysunek 5). Z siecią powiązana jest, sięgająca swymi początkami połowy XX wieku, metoda PERT (Project Evaluation and Review Technique), pozwalająca, przez szacowanie czasu trwania (pesymistycznego, spodziewanego i optymistycznego) poszczególnych czynności, wyznaczyć przybliżoną wartość czasu trwania całego projektu opisanego siecią czynnościową. Metoda ta jest w dalszym ciągu wykorzystywana m.in. do modelowania przedsięwzięcia złożonego, składającego się z wielu czynności powiązanych ze sobą relacjami kolejnościowymi (Milian, 2006).

Podejściem znacznie bardziej wymagającym jest potraktowanie sieci jako funkcji wielu zmiennych losowych i wyznaczenie dokładnego (w sensie probabilistycznym) rozkładu czasu trwania projektu. Przy spełnieniu pewnych warunków (m.in. o wykładniczych rozkładach czasu trwania czynności) zadanie to można rozwiązać metodami analitycznymi, sprowadzając sieć do łańcucha Markowa. Dla podanego przykładu wymagało to jednak rozwiązania układu 125 441 liniowych równań różniczkowych (Kulkarni, Adlakha, 1986). Wyznaczone zostały m.in.: wartość oczekiwana  $m = 40,9852$  oraz odchylenie standardowe  $s = 7,6683$  rozkładu. Znajomość wartości dokładnych pozwala na porównanie ich z uzyskanymi z metody MC i QMC przybliżeniami. Warto podkreślić, że metody te są w znacznie mniejszym stopniu ograniczone zarówno liczbą czynności, jak i ich rozkładami. Z takim samym powodzeniem można stosować rozkłady ciągłe oraz dyskretne, a niektóre czynności potraktować jako deterministyczne.



Rysunek 5. Sieć PERT o 65 czynnościach. Czynności o rozkładach wykładniczych zlokalizowane są na łukach.

Źródło: „Markov and Markov-Regenerative PERT Networks”, V.G. Kulkarni, V.G. Adlakha, 1986, *Operations Research*, 34(5), s. 774.

### Przebieg i wyniki eksperymentu

W każdym przebiegu metody wyznacza się wartości czasu trwania czynności, zgodnie z zadaniem rozkładem. Traktuje się współrzędne punktów jako wartości dystrybuanty rozkładu jednostajnego w przedziale [0; 1], a następnie metodą dystrybuanty odwrotnej wyznacza się wartości zmiennych o zadanej rozkładzie będące czasami trwania tych czynności. Uzyskuje się w ten sposób sieć deterministyczną, którą można rozwiązać metodą CPM (Critical Path Method) (Woźniak, 2010). Wyznacza i rejestruje się całkowity czas trwania projektu dla wszystkich przebiegów, uzyskując w ten sposób rozkład empiryczny czasu trwania przedsięwzięcia. W celu poprawienia wyników dla wszystkich ciągów quasilosowych pominięto pierwszych 10 tysięcy punktów.

W tabelach 2 i 3 przedstawione zostały wyniki eksperymentu w postaci różnicy między odpowiednio wartością oczekiwaną i odchyleniem standardowym rozkładu a przybliżeniem uzyskanym metodą MC i QMC.

Tabela 2

*Wyniki eksperymentu. Różnice między wartością oczekiwaną rozkładu czasu trwania przedsięwzięcia a przybliżeniem uzyskanym metodami MC i QMC*

n	PseudoRandom	Halton	Scrambled Halton	Faure
1 000	0,1715	0,9722	0,0209	0,2792
10 000	0,0755	0,0911	0,0222	0,0894
100 000	0,0549	0,0372	0,0033	0,1564

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3

*Wyniki eksperymentu. Różnice między odchyleniem standardowym rozkładu czasu trwania przedsięwzięcia a przybliżeniem uzyskanym metodami MC i QMC*

n	PseudoRandom	Halton	Scrambled Halton	Faure
1 000	0,1601	0,5238	0,1634	0,0333
10 000	0,0522	0,2898	0,0081	0,0367
100 000	0,0402	0,0782	0,0009	0,0222

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie uzyskanych wyników, w zagadnieniu o dużej liczbie stopni swobody, zasadnym wydaje się stosowanie szyfrowanych ciągów Haltona. Ciekawym wynikiem jest to, że nie zawsze zwiększenie liczby powtórzeń metody o rząd wielkości daje lepsze przybliżenie szacowanych parametrów rozkładu.

### Podsumowanie

W opracowaniu zbadane zostało zachowanie się metody MC i QMC dla zagadnienia o dużej liczbie stopni swobody przy zastosowaniu różnych ciągów liczbowych.

Wraz z rozwojem technologii komputerowej, wzrostu ich mocy oraz możliwości wykonywania obliczeń w chmurze obliczeniowej, znaczenie metody dynamicznie wzrasta. W szczególności metoda ta znajduje zastosowanie, gdy nie dysponuje się stałym zbiorem wartości wejściowych, a znany jest jedynie ich rozkład losowy, świetnie nadaje się do badań złożonych modeli zarówno probabilistycznych, jak również deterministycznych. Szerokie zastosowanie metody MC i QMC znajduje m.in. w ekonomii i zarządzaniu.



Wspaniałą własnością metody jest praktycznie brak ograniczeń, jeśli chodzi o typy rozkładów zmiennych losowych nawet w bardzo złożonych modelach o dużej liczbie stopni swobody. Bez problemu można w jednym modelu stosować niemal dowolne rozkłady ciągłe i dyskretne oraz stałe.

Niezależnie od odmiany metody, do jej użycia potrzebne są ciągi liczbowe. Mogą to być ciągi losowe, pseudolosowe lub quasilosowe. Dobór odpowiedniego typu ciągów i liczby powtórzeń ma wpływ na dokładność uzyskanych wyników. Wpływ ten jest szczególnie istotny przy rozwiązywaniu problemów o dużej liczbie stopni swobody.

W artykule przedstawiono przykład obliczeniowy o 65 stopniach swobody. Trudno jest oczywiście uznać eksperyment oparty na pojedynczym przykładzie za wyczerpujący, jednakże uzyskane wyniki jednoznacznie wskazują, że stosowanie ciągów quasilosowych w standardowej postaci może dać wynik obarczony większym błędem niż przy zastosowaniu ciągów pseudolosowych. Dopiero zastosowanie ciągów szyfrowanych daje oczekiwaną poprawę zbieżności metody. Zagadnienie wydaje się interesujące oraz wartę dalszych badań. Powinny one objąć szyfrowane ciągi Faure'a, co pozwoliłoby porównać uzyskane wyniki z tymi dla szyfrowanych ciągów Haltona i w ten sposób odnieść się do danych zawartych w tabeli 1 i wynikających z tego spostrzeżeń. Niestety, w języku R nie są dostępne funkcje pozwalające na uzyskanie szyfrowanych ciągów Faure'a i być może potrzebne byłoby skorzystanie z innych pakietów do obliczeń matematycznych. Warto byłoby także sprawdzić zachowanie się ciągów Sobola i ciągów losowych. W języku R dostępna jest funkcja do generowania ciągów Sobola i generator liczb losowych ANU Quantum (uzyskujący liczby losowe z obserwacji kwantowych fluktuacji próżni).

## Bibliografia

- Arabas, J., Słomka, M. (2011). *Generatory liczb pseudolosowych w inicjacji populacji bazowej strategii ewolucyjnej*. Pobrano z: <https://troja.uksw.edu.pl/>.
- Bartłomowicz, T. (2011). Symulacja Monte Carlo jako narzędzie prognozowania wybranych aspektów rynku nieruchomości. W: B. Pawełek (red.), *Osiągnięcia i perspektywy modelowania i prognozowania zjawisk społeczno-gospodarczych*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.
- Brzozowska, K. (2020). Sekwencyjna metoda Monte Carlo i jej zastosowanie do modelowania zmienności inflacji w Polsce. *Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach*, 21-36.
- Faure, H., Lemieux, C. (2009). Generalized Halton sequences in 2008: A comparative study. *ACM Trans. Model. Comp. Sim.*, 19(4), art. 15.
- Heinrich, S. (1996). Efficient algorithms for computing The L2-discrepancy. *Mathematics of Computation*, 65(216), 1621-1633.
- Kosińska, M. (2016). Zastosowanie metody Monte Carlo do wyceny opcji. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego*, 394, 149-158.
- Kulkarni, V., Adlakha, V. (1986). Markov and Markov-Regenerative PERT Networks. *Operations Research*, 34(5), 769-781.
- Milian, Z. (2006). *Metody określania rozkładu czasu realizacji przedsięwzięć budowlanych w acyklicznych sieciach stochastycznych*. Kraków: Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej.
- Pawlak, M. (2012). Symulacja Monte Carlo w analizie ryzyka projektów inwestycyjnych. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego. Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia*, 51, 83-94.
- Staus, A. (2008). Standard and Shuffled Halton Sequences in a Mixed Logit Model. *Arbeitbericht*, 17.
- Van Slyke, R. (1963). Monte Carlo Methods and PERT Problem. *Operations Research*, 11, 839-860.
- Woźniak, A. (2010). *Grafy i sieci w technikach decyzyjnych*. Kraków: Komisja Technicznej Infrastruktury Wsi PAN w Krakowie.