

**Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu**

**Józef Knapczyk**

# **ZARYS ROBOTYKI**

Nowy Sącz 2015

### **Komitet Redakcyjny**

doc. dr Marek Reichel – przewodniczący;  
prof. dr hab. inż. Jarosław Frączek; prof. dr hab. Leszek Rudnicki;  
prof. dr hab. Mariola Wierzbicka; dr hab. n. med. Ryszard Gajdosz, prof. nadzw.;  
dr hab. Wanda Pilch, prof. nadzw.; dr hab. Zdzisława Załona, prof. nadzw.;  
dr Tamara Bolanowska-Bobrek; mgr Agata Witrylak-Leszyńska

### **Redaktor Naczelny**

doc. dr Marek Reichel

### **Sekretarz Redakcji**

Katarzyna Górowska

### **Korekta Techniczna**

Katarzyna Górowska

### **Recenzja**

prof. dr hab. inż. Antoni Gronowicz

Wydano za zgodą JM Rektora PWSZ w Nowym Sączu  
prof. dra hab. inż. Zbigniewa Ślipka

© Copyright by Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu  
Nowy Sącz, 2015

ISBN 978-83-63196-70-7

### **Adres Redakcji**

33-300 Nowy Sącz, ul. Staszica 1  
tel. 18 443 45 45, e-mail: [sekbriw@pwsz-ns.edu.pl](mailto:sekbriw@pwsz-ns.edu.pl)

### **Wydawca**

Wydawnictwo Naukowe Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Nowym Sączu  
33-300 Nowy Sącz, ul. Staszica 1  
tel. 18 443 45 45, e-mail: [sekbriw@pwsz-ns.edu.pl](mailto:sekbriw@pwsz-ns.edu.pl)

### **Druk**

Wydawnictwo i drukarnia NOVA SANDEC s.c.  
Mariusz Kałyniuk, Roman Kałyniuk  
33-300 Nowy Sącz, ul. Lwowska 143  
tel. 18 547 45 45, e-mail: [biuro@novasandec.pl](mailto:biuro@novasandec.pl)

# SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA .....	5
1. WPROWADZENIE.....	6
2. POJĘCIA PODSTAWOWE, SYSTEMATYZACJA ROBOTÓW I MANIPULATORÓW.....	10
2.1 Pojęcia podstawowe, określenia.....	10
2.2 Systematyzacja manipulatorów i robotów .....	12
2.2.1 Stopnie swobody i rodzaje połączeń .....	12
2.2.2 Podział robotów przemysłowych .....	18
3. KINEMATYKA MANIPULATORÓW .....	26
3.1 Wprowadzenie.....	26
3.2 Współrzędne jednorodne.....	29
3.3 Obroty i przesunięcia układów współrzędnych .....	30
3.4 Zadanie proste kinematyki .....	39
4. ZADANIE ODWROTNE KINEMATYKI MANIPULATORA I PLANOWANIE TRAJEKTORII .....	52
4.1 Zadanie odwrotne kinematyki .....	52
4.1.1 Metoda macierzowa.....	52
4.2 Zadanie planowania trajektorii manipulatora.....	74
5. PRZESTRZEŃ ROBOCZA, WSKAŹNIKI I OSIĄGI FUNKCJONALNE MANIPULATORÓW .....	79
5.1 Wprowadzenie.....	79
5.2 Analiza przestrzeni roboczej manipulatora .....	80
5.3 Analiza dokładności manipulatora .....	88
5.4 Analiza dokładności manipulatora pomiarowego .....	92
6. STATYKA, SZTYWNOŚĆ I DYNAMIKA MANIPULATORÓW.....	97
6.1 Statyka manipulatorów.....	97
6.2 Macierze sztywności lub podatności manipulatora.....	102
6.3 Dynamika manipulatorów .....	112
6.3.1 Rozkład masy członu.....	112
6.3.2 Równania Newtona-Eulera.....	114
7. NAPĘDY I MECHANIZMY STOSOWANE W ROBOTACH.....	124
7.1 Wprowadzenie.....	124
7.2 Napęd pneumatyczny .....	124
7.2.1 Siłowniki pneumatyczne liniowe .....	127
7.2.2 Siłowniki pneumatyczne kątowe .....	129
7.3 Napęd hydrauliczny.....	131
7.3.1 Siłowniki hydrauliczne liniowe.....	131
7.3.2 Silniki hydrauliczne obrotowe.....	132
7.3.3 Rozdzielacze, wzmacniacze i serwozawory hydrauliczne .....	133
7.3.4 Serwomechanizmy elektrohydrauliczne.....	137

7.4 Napędy elektryczne .....	139
7.4.1 Znaczenie napędów elektrycznych.....	139
7.4.2 Wymagania stawiane napędom elektrycznym .....	139
7.4.3 Silniki elektryczne prądu stałego.....	140
7.4.4 Silniki elektryczne stosowane w robotach .....	142
7.4.5 Krokowe silniki elektryczne.....	144
7.4.6 Liniowe silniki elektryczne .....	145
7.4.7 Silnik elektryczny stanowiący bezpośredni napęd elektryczny .....	147
7.5 Mechanizmy przekazywania ruchu stosowane w robotach .....	149
7.5.1 Rozmieszczenie siłowników w robotach.....	149
7.5.2 Przegląd mechanizmów przekazywania ruchu.....	150
7.5.2.1 Przekładnie pasowe, liniowe i łańcuchowe.....	150
7.5.2.2 Przekładnie śrubowe i zębatkowe .....	151
7.5.2.3 Mechanizmy dźwigniowe w napędach robotów .....	152
7.5.2.4 Przekładnie zębate.....	154
8. CHWYTAKI MANIPULATORÓW I ROBOTÓW .....	157
8.1 Funkcje chwytaka.....	157
8.2 Systematyzacja chwytaków.....	158
8.3 Metodyka doboru chwytaków robotów przemysłowych .....	167
8.3.1 Wybór sposobu uchwycenia.....	168
8.3.2 Wybór typu chwytaka.....	169
8.3.3 Dobór parametrów chwytaka .....	171
8.3.4 Przystosowanie końcówek chwytanych do kształtu powierzchni obiektu.....	173
8.4 Zasady projektowania chwytaków robotów przemysłowych .....	174
8.4.1 Określenie parametrów wejściowych do projektowania chwytaków .....	174
8.4.2 Wybór miejsc uchwycenia obiektu .....	175
8.4.3 Obliczanie sił i momentów sił działających na obiekt .....	176
8.4.4 Tendencje rozwojowe chwytaków .....	178
8.5 Chwytaiki podobne do ręki i dłoni z palcami.....	179
8.5.1 Chwytyk jako mechaniczna ręka .....	179
9. UKŁADY STEROWANIA MANIPULATORÓW .....	187
9.1 Sprzężenie zwrotne i zamknięty układ sterowania .....	187
9.2 Sterowanie układem drugiego rzędu .....	191
9.3 Rozdzielenie prawa sterowania.....	192
9.4 Sterowanie nadążne.....	193
9.5 Sterowanie robota przemysłowego .....	196
9.6 Nieliniowe układy sterowania manipulatora.....	198
9.6.1 Wielowejściowe i wielowyjściowe układy sterowania .....	199
9.6.2 Zadanie sterowania manipulatora.....	200
9.6.3 Rozważania praktyczne .....	201
10. POJĘCIA PODSTAWOWE .....	206
10.1 Pojęcia z zakresu automatyki i sterowania .....	206
10.2 Pojęcia podstawowe z zakresu kinematyki, statyki i dynamiki .....	208
BIBLIOGRAFIA.....	210



# Przedmowa

Książka ta została napisana przede wszystkim dla studentów kierunków mechanicznych (m. in. Zarządzanie i inżynieria produkcji, Mechatronika), którzy mogą mieć tylko podstawową wiedzę z zakresu kinematyki i dynamiki układów mechanicznych, a także z zakresu algebry liniowej i układów sterowania.

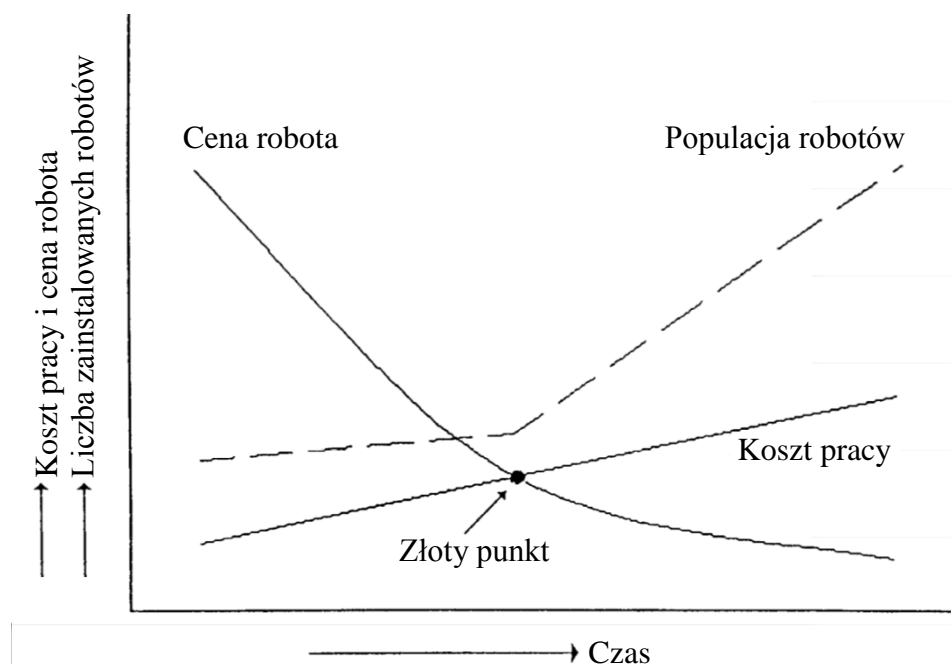
Całość podzielono na dziewięć rozdziałów. Pierwszy rozdział wstępny zawiera wprowadzenie do robotyki, drugi dotyczy systematyzacji robotów i manipulatorów; trzeci dotyczy zadań wymiarowania i kinematyki manipulatorów; czwarty dotyczy zadania odwrotnego kinematyki i planowania trajektorii; piąty – charakterystyki manipulatorów i robotów; szósty – statyki, sztywności i dynamiki manipulatorów; siódmy obejmuje zagadnienia napędów i mechanizmów przekazywania ruchu; ósmy – chwytaków; dziewiąty – sterowania robotów i manipulatorów.

Zamiar wydania tej książki podjęto ze względu na wyczerpanie nakładu ostatniego wydania podręcznika pod redakcją Adama Moreckiego i Józefa Knapczyka pt. „Podstawy Robotyki” (WNT, Warszawa 1999).

# 1. Wprowadzenie

Robotyka jest dziedziną nauki i techniki, która zajmuje się problematyką mechaniki, sterowania, projektowania, pomiarów i eksploatacji manipulatorów i robotów, a także zastosowaniem robotów w badaniach naukowych, szeroko pojętej technice, budownictwie, transporcie, rolnictwie, jak również w medycynie, badaniach podwodnych i w przestrzeni kosmicznej. Robotyka jest interdyscyplinarną dziedziną badań wymagającą współdziałania specjalistów z różnych dziedzin.

Roboty przemysłowe znajdują zastosowanie w przemyśle maszynowym szczególnie do prac spawalniczych, malarskich, montażowych oraz obsługi pras i obróbek wykańczających, jak szlifowanie i polerowanie. Głównym celem ich stosowania jest podwyższenie jakości wykonywanych prac oraz uwolnienie człowieka od ciężkiej fizycznej i monotonnej pracy, a zwłaszcza od prac niebezpiecznych dla zdrowia, a nawet życia. Liczba produkowanych obecnie i instalowanych jednostek stale zwiększa się. W Polsce corocznie instaluje się ok. 300 robotów, natomiast w Korei Południowej o podobnej liczbie ludności (ok. 40 mln) instaluje się 10 razy więcej. Liczba zainstalowanych robotów zależy od kosztu pracy, który zwiększa się z biegiem czasu, a także zależy od ceny robota, która zmniejsza się. Po osiągnięciu tzw. złotego punktu (rys. 1.1) liczba robotów zwiększa się znacznie szybciej. W krajach najbardziej rozwiniętych (USA, Europa Zachodnia, Japonia, Korea, Taiwan) złoty punkt został przekroczony przeszło dwadzieścia lat temu.



Rys. 1.1. Złoty punkt zastosowania robotów. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Rozróżnia się następujące działy robotyki:

- robotykę ogólną (metody, aspekty ekonomiczne, socjalne, społeczne, kształcenie, terminologia, rozwój i trendy przyszłościowe),
- robotykę przemysłową (zastosowanie robotów i manipulatorów w przemyśle elektromaszynowym, spożywczym, farmaceutycznym, papierniczym, szklarskim, chemicznym, w energetyce, górnictwie i in.),
- robotykę poza przemysłową (zastosowanie robotów do prac podwodnych, w przestrzeni kosmicznej i na innych planetach, do prac naukowych, do celów wojskowych, walki z pożarami, katastrofami, w budownictwie oraz w rolnictwie, transporcie, usługach, administracji),
- robotykę metrologiczną (roboty do celów pomiarowych, inspekcyjnych, diagnostycznych, kontrolnych),
- robotykę maszyn lokomocyjnych (jedno-, dwu-, cztero-, sześć- i wiele-nożnych, mieszanych kołowo-nożnych do realizacji funkcji chodu, biegu, skoku, pełzania po lądzie i w wodzie),
- robotykę medyczną i rehabilitacyjną (manipulatory i roboty do celów chirurgii, terapii, ortotyki, protetyki, rehabilitacji, układy człowiek–maszyna (system)),
- robotykę usługową (prace biurowe i domowe, np. mycie okien, sprzątanie),
- mikrorobotykę (mili-, mikro- i nanoroboty).

**Robotyka ogólna** dotyczy różnych aspektów robotyki, m.in.: ekonomicznych, socjalnych, społecznych, kształcenia, ochrony i bezpieczeństwa pracy. Zalicza się tutaj prace z dziedziny standaryzacji terminologii i oznaczeń, np. prace prowadzone w ramach Międzynarodowej Organizacji Normalizacyjnej (ISO – w j. ang. International Organization for Standardization, Technical Committee 184/SC2) i Międzynarodowej Federacji Robotyki (IFR – w j. ang. International Federation of Robotics).

**Robotyka przemysłowa** jest związana z rozwijanymi obecnie: elastycznymi systemami produkcyjnymi (FMS - w j.ang. *Flexible Manufacturing Systems*), zintegrowanymi systemami wytwarzania ze sterowaniem komputerowym (CIM, w j. ang. *Computer Integrated Manufacturing*) i fabrykami bezludnymi (AF, w j. ang. *Anonymous Factory*). Prognozy na najbliższe lata przewidują, iż w związku z rozwojem techniki mikroprocesorowej pojawią się nowe generacje bioprocessorów, procesorów mechanicznych, co wywoła lawinowy rozwój nowych generacji „inteligentnych” robotów mających możliwości pracy w zmiennym otoczeniu znacznie większe niż obecne generacje robotów.

Robotyka przemysłowa rozpatruje zagadnienia związane z zastosowaniem robotów i manipulatorów przemysłowych do celów robotyzacji takich podstawowych procesów produkcyjnych, jak: odlewnictwo, spawalnictwo, malarstwo i lakiernictwo, montaż, obsługa pras i wiele innych procesów przemysłowych wymagających znacznego wysiłku fizycznego, szkodliwych i niebezpiecznych dla człowieka.

Zagadnienia szczególnego zainteresowania badaczy w ostatnich latach są następujące: podwyższenie częstości działania, dokładności pozycjonowania i orientacji, realizacji trajektorii w przestrzeni z przeszkodami (unikania kolizji), czynnego sterowania siłą, projektowania wspomaganego komputerem, komunikacji głosowej, modelowania elastycznych manipulatorów. Przy rozwiązywaniu tych zagadnień korzysta się z metod matematyki, mechaniki i teorii maszyn, teorii sterowania, informatyki, cybernetyki, teorii systemów, miernictwa, diagnostyki, teorii niezawodności.

Zagadnienia modelowania elastycznych manipulatorów, badanie ich własności dynamicznych przy wykorzystaniu metod układów wielo-członowych i elementów skończonych występują w analizie manipulatorów typu kręgosłup i trąba słonia. Rozwój inżynierii materiałowej umożliwia stosowanie do budowy robotów lekkich materiałów kompozytowych. Rozszerza się znaczenie metod projektowania robotów ze wspomaganiami komputerowym. Oferowane są zestawy programów, umożliwiające wybór zarówno samej konstrukcji, jak i napędów. Dzięki grafice komputerowej następuje rozwój metod symulacji komputerowej w zakresie projektowania robotów i stanowisk zrobotyzowanych w systemie off-line. Materiały z pamięcią kształtu znajdują zastosowanie w siłownikach i chwytakach robotów. Pojawiają się nowe odmiany czujników i sensorów dotyku, wizji i siły, np. czujniki piezoelektryczne. Dużo uwagi poświęca się zagadnieniu sterowania z uwzględnieniem siły (ang. *Force Control*) w układach ze sprzężeniem zwrotnym.

**Robotyka metrologiczna** rozpatruje metody pomiarowe i diagnostyczne, np. pomiary parametrów kinematycznych, dynamicznych, dokładności i zużycia robotów, które wymagają opracowania specjalnych przetworników i metod pomiarowych. Przykładem trudnego pomiaru może być pomiar dokładności odtwarzania trajektorii w przestrzeni roboczej przy zwiększonej prędkości przemieszczania się końcówki robota. Rozpatruje się zadania występujące na pograniczu maszyn lokomocyjnych i metrologii, np. inspekcji i kontroli stanu spawów dużych zbiorników przy użyciu robotów lokomocyjnych.

**Robotyka maszyn kroczących** zajmuje się mechaniką, projektowaniem i sterowaniem ruchu jedno-, dwu-, cztero-, sześć- i wielonożnych maszyn kroczących lub mieszanych nożno-kołowych. Do budowy tych maszyn wykorzystuje się różne własności budowy i ruchu owadów lub ssaków palchoodnych, własności sterownicze odnóży lub kończyn, rodzajów chodu, biegu lub skoku po różnym podłożu. Wobec różnorodności typów lokomocji nożnej, spotykanych w przyrodzie, wybór optymalnego chodu maszyny jest jednym z zadań badawczych, podobnie jak i wybór modelu maszyny, struktury nogi, liczby nóg, ich konfiguracji oraz układów sensorów i sterowania ruchem nóg i całej maszyny. Zagadnienie ukształtowania terenu, rozpoznawania sytuacji, kwestie stabilności maszyny stanowią dodatkowe trudności w trakcie procesu analizy i projektowania. Stopień trudności realizacji

maszyny kroczącej, biegającej lub skaczącej wzrasta wraz ze zmniejszaniem się liczby nóg. Maszyny jedno- i dwunożne są tu właściwym przykładem. Specjalną klasę stanowią maszyny dwunożne antropomorficzne (człękoksztaltne); np. robot-muzyk.

Odpowiednio zaprojektowane wielopoziomowe układy sterowania wyposażone w elementy inteligencji maszynowej wydają się niezbędne do dalszego rozwoju tych maszyn. Umożliwiają one przejście od powolnego kroczenia (zwanego pełzaniem) tych maszyn do ruchu szybkiego i biegu. Interesującym kierunkiem wydaje się być tutaj maszyna o ruchu wężowo-podobnym, która w realizacji technicznej jest maszyną kołowo-nożną. Do najbardziej zaawansowanych konstrukcji tych maszyn należy 6-nożna maszyna krocząca zbudowana w Stanowym Uniwersytecie w Ohio oraz maszyny biegające i skaczące zbudowane w Uniwersytecie Carnegie-Mellon.

**Robotyka poza przemysłowa** rozpatruje manipulatory umieszczone na statkach podwodnych do badania i eksploatacji zasobów podwodnych, manipulatory lokowane na statkach kosmicznych, do konserwacji satelitów telekomunikacyjnych lub pobierania próbek na innych planetach. Rozwijane są roboty przystosowane do gaszenia pożarów lub do prac związanych z usuwaniem skutków katastrof, gdzie obecność człowieka jest niepożądana.

**Robotyka medyczna i rehabilitacyjna** rozpatruje manipulatory i roboty stosowane w medycynie, np. laparoscypy, roboty chirurgiczne, protezy i ortezy, do wspomaganie utraconych funkcji kończyn człowieka, a także do obsługi pacjentów. Interesującym przykładem w dziedzinie chirurgii może być zastosowanie robota do operacji usuwania tkanki w czaszce pacjenta. Manipulatory rehabilitacyjne są wykorzystywane do ćwiczeń układu mięśniowego człowieka po urazie lub operacji ortopedycznej. Osoby niepełnosprawne ruchowo korzystają z wózków inwalidzkich, które stanowią roboty mobilne, sterowane głosem lub ruchami głowy, brody, języka, gałki ocznej.

**Robotyka usługowa** dotyczy robotów przystosowanych do prac usługowych, np. sprzątanie pomieszczeń, obsługa i pielęgnacja osób niepełnosprawnych, o specjalizowanych funkcjach manipulacyjnych lub lokomocyjnych i o zwiększonym poziomie inteligencji maszynowej.

## 2. Pojęcia podstawowe, systematyzacja robotów i manipulatorów

### 2.1 Pojęcia podstawowe, określenia

Większość maszyn wytwarzanych w ubiegłym wieku należała do klasy maszyn: roboczych, silnikowych, technologicznych i transportowych. Pojawienie się nowej grupy maszyn, a mianowicie maszyn cybernetycznych, do których zaliczamy układy naśladowujące procesy biologiczne i fizjologiczne przebiegające w przyrodzie ożywionej, w tym u człowieka i u zwierząt, spowodowało konieczność rozszerzenia klasycznej definicji maszyny zaproponowanej jeszcze przez F. Reuleaux w 1875 r.

W roku 1963 I. Artobolewski zaproponował następujące określenie maszyny: *maszyna jest to sztuczne urządzenie przeznaczone do częściowego lub całkowitego zastępowania funkcji energetycznych, fizjologicznych i intelektualnych człowieka*. Funkcje energetyczne należy tutaj rozumieć jako zastępowanie pracy fizycznej, funkcje fizjologiczne jako zastępowanie organów, np. kończyny górnej lub dolnej, a możliwości intelektualne jako właściwości adaptacyjne przy współdziałaniu maszyny cybernetycznej z otoczeniem.

**Manipulatorem** nazywa się urządzenie techniczne przeznaczone do realizacji niektórych funkcji kończyny górnej człowieka. Rozróżnia się dwa rodzaje funkcji: manipulacyjne (gr. *manus* – ręka) wykonywane przez chwytak i wysięgnikowe realizowane przez ramię manipulatora.

Współczesne manipulatory zawierają szeregowy łańcuch kinematyczny otwarty lub równoległy łańcuch zamknięty, zespół siłowników (napędy), układ sterowania, czujniki i układ zasilania.

**Manipulator antropomorficzny** ma układ podobny do ręki człowieka (j. gr. *anthropos* – człowiek, *morphe* – kształt) pod względem kształtu (w sensie anatomicznym) oraz fizjologicznym (w sensie funkcji), czyli działania.

**Robotem** nazywa się urządzenie techniczne przeznaczone do realizacji niektórych funkcji manipulacyjnych i lokomocyjnych człowieka, mające określony poziom energetyczny, informacyjny i inteligencji maszynowej (autonomii działania w pewnym środowisku). Szczególnym przypadkiem robota jest robot przemysłowy.

**Robotem przemysłowym** – wielofunkcyjny manipulator przeznaczony do przenoszenia materiałów, części lub narzędzi i wyspecjalizowanych urządzeń poprzez różne programowane ruchy, w celu zrealizowania różnych zadań.

**Maszyną kroczącą** nazywa się urządzenie techniczne przeznaczone do realizacji wybranych funkcji podobnych do funkcji lokomocyjnych zwierząt i owadów mających kończyny (kręgowce) lub odnóża (owady). Każda lokomocja maszyny

kroczącej jest typu dyskretnego i może być realizowana przy użyciu: jednej, dwóch, czterech, sześciu, ośmiu i wielu „nóg” jako chód, bieg i skok po twardym podłożu.

**Pedipulatorem** nazywa się „nogę” maszyny kroczącej. Pedipulator może być układem jedno-, dwu- lub trójczłonowym.

Robot składa się z czterech podstawowych podzespołów, a mianowicie:

1. **Układ mechaniczny**, wyposażony w odpowiednie siłowniki, realizuje różne czynności manipulacyjne i lokomocyjne.

Część manipulacyjna robota jest zwykle otwartym łańcuchem kinematycznym o wielu stopniach swobody. Połączenia ruchowe między członami tego łańcucha są zwykle typu obrotowego lub przesuwnego. Jeżeli wszystkie połączenia ruchowe są obrotowe, to układ może być podobny do ręki człowieka (antropomorficzny).

W celu przenoszenia obiektów w przestrzeni jest niezbędna struktura o sześciu stopniach swobody. Pierwsze trzy stopnie swobody wykorzystuje się do pozycjonowania chwytaka manipulatora w pożądanym miejscu, a pozostałe trzy stopnie – do zapewniania planowanej orientacji chwytaka w przestrzeni. Jako napędy stosuje się siłowniki elektryczne, pneumatyczne i hydrauliczne (przy bardzo dużych obciążeniach).

Część lokomocyjna robota może być typu kołowego, gąsienicowego, nożnego lub mieszanego, np. kołowo-nożnego. W przypadku lokomocji nożnej jest to układ złożony z czterech lub sześciu nóg, z których każda ma na ogół trzy stopnie swobody.

2. **Otoczenie przestrzeni**, w której robot jest usytuowany. Dla robotów stacjonarnych otoczenie ogranicza się do przestrzeni roboczej, w której może poruszać się chwytak. Należy podkreślić, że otoczenie nie jest rozumiane tylko w sensie geometrycznym, lecz również w sensie fizycznym własności otoczenia oraz uwzględnienia wszystkiego, co w tym otoczeniu występuje, np. przeszkód. Tak więc robot powinien być przygotowany do współdziałania z otoczeniem (tzw. *sceną statyczną* lub *dynamiczną*).

3. **Zadanie** formułuje się jako przejście ze stanu początkowego do końcowego, tzn. zrealizowanie zaprogramowanego celu. Zadanie opisuje się w odpowiednim języku programowania i realizowania za pomocą komputera.

4. **Układ sterowania i układ sensoryczny** są złożone z komputera i generatorów sygnałów sterujących, posyłanych do siłowników poruszających manipulator, stosownie do informacji zadanej „a priori” (wiedza o zadaniu, które ma być zrealizowane) i wiedzy „a posteriori” o aktualnych i byłych stanach robota i otoczenia. Ponadto w układzie występują dwie istotne pętle sprzężeń zwrotnych, a mianowicie: wewnętrznej informacji sensorycznej i zewnętrznej informacji sensorycznej. Wykorzystanie tych informacji w połączeniu z algorytmem sterowania umożliwia realizację zgłoszonych zadań.

## 2.2 Systematyzacja manipulatorów i robotów

### 2.2.1 Stopnie swobody i rodzaje połączeń

**Łańcuch kinematyczny** jest to układ ciał (członów) połączonych ruchowo parami kinematycznymi. Łańcuch jest zamknięty, jeśli każdy człón jest połączony ruchowo co najmniej z dwoma innymi członami. Łańcuch jest otwarty, jeśli przynajmniej jeden człón zawiera tylko jeden element pary kinematycznej. Łańcuch kinematyczny prosty zawiera tylko człony 2-łączne, łańcuch złożony zawiera ponadto człony 3-łączne, 4-łączne, 5-łączne lub 6-łączne (manipulatory równoległe i hybrydowe)

Najczęściej stosowany manipulator jest otwartym łańcuchem kinematycznym, złożonym z członów tworzących pary kinematyczne należące do odpowiednich klas. W przestrzeni trójwymiarowej człón sztywny wykazuje sześć stopni swobody. Trzy stopnie swobody są na ogół wykorzystywane do pozycjonowania końcówki roboczej manipulatora, tzn. zajęcia odpowiedniej pozycji w przestrzeni, a pozostałe trzy są przeznaczone do odpowiedniego zorientowania końcówki względem obiektu.

W tabeli 2.1 pokazano spotykane rodzaje połączeń, możliwe ruchy względne, liczbę stopni swobody i stosowane oznaczenia. Rozróżnia się dziewięć możliwych połączeń, które wykazują od 1 do 5 stopni swobody (patrz lp. 2÷10 w tabeli 2.1) realizowanych w postaci ruchów obrotowych, ruchów postępowych i ich kombinacji. Do najczęściej spotykanych połączeń ruchowych należą obrotowe, przesuwne i śrubowe.

Obliczając ruchliwość w przypadku otwartych łańcuchów kinematycznych korzysta się z ogólnej zależności

$$r = 6n - \sum_{i=1}^n i p_i \quad (2.1)$$

gdzie:  $r$  – ruchliwość jako liczba niezależnych ruchów członów ruchomych względem sąsiednich,  $n$  – liczba członów ruchomych,  $p$  – liczba połączeń ruchowych różnych rodzajów (poz. 2÷10 w tabl. 2.1).

Ponieważ w przypadku otwartych łańcuchów liczba członów ruchomych równa jest liczbie par kinematycznych, to zależność (2.1) przyjmuje postać

$$r = p_5 + 2p_4 + 3p_3 + 4p_2 + 5p_1 \quad (2.2)$$

co oznacza, że ruchliwość łańcucha otwartego równa się sumie liczb stopni swobody jego połączeń ruchowych – par kinematycznych. W szczególnym przypadku, jeżeli wszystkie człony manipulatora wykonują ruch płaski, to zależności (2.1) i (2.2) przybierają postać



$$r = 3n - \sum_{i=1}^n i p_i \quad (2.3)$$

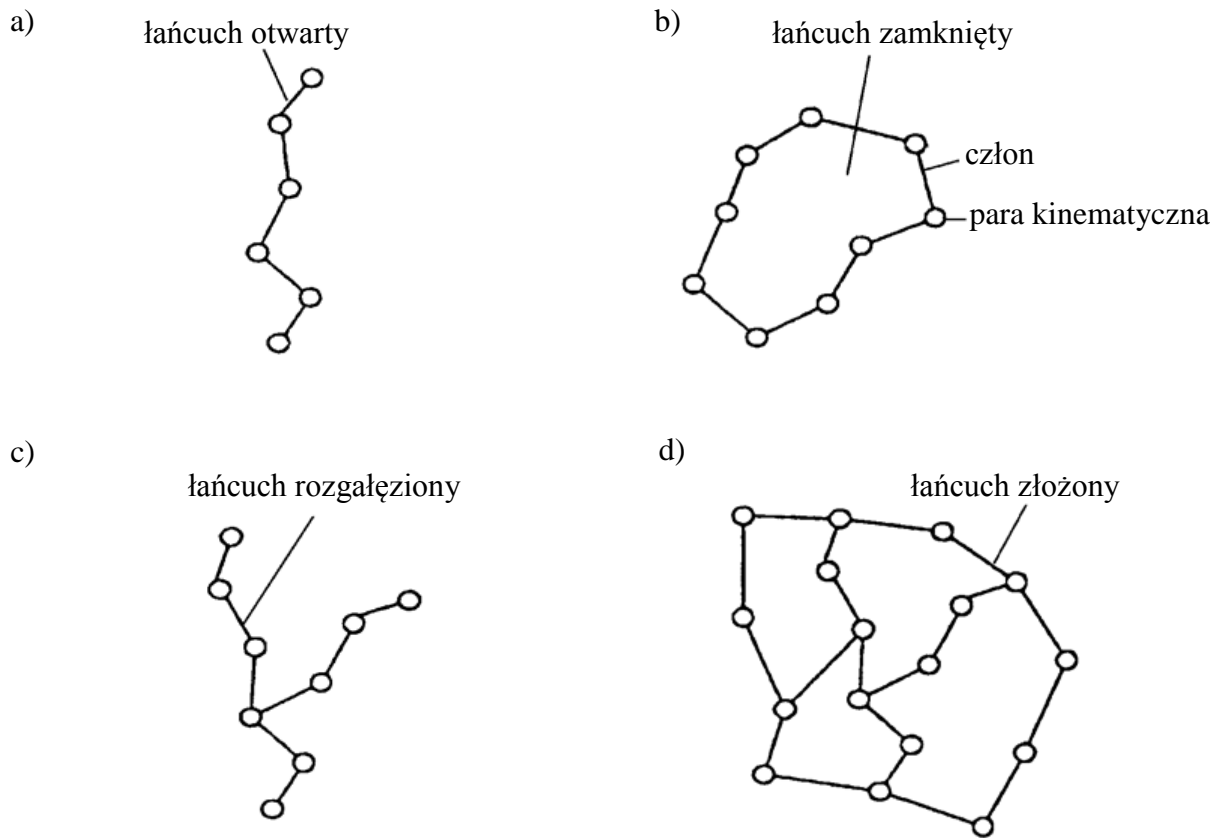
Tab. 2.1

Połączenia stosowane w łańcuchach manipulatora. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

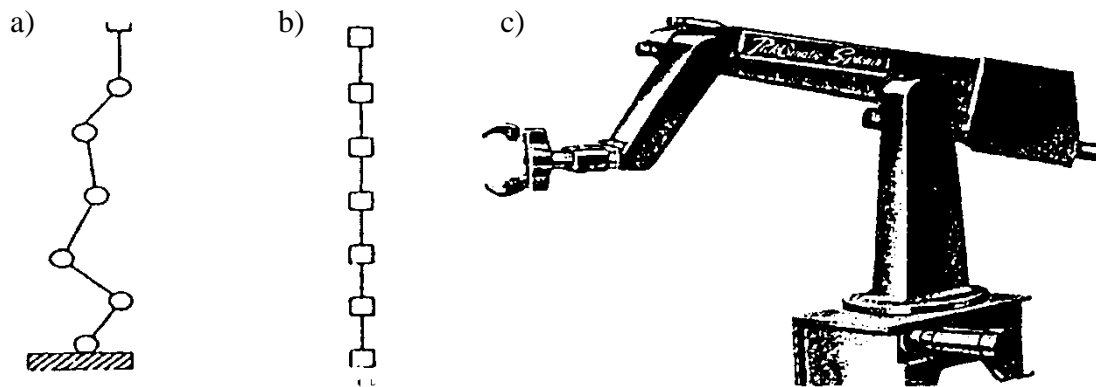
Lp.	Rodzaj połączenia	Ruchy względne	Liczba stopni swobody	Oznaczenie $C_i$ - człon $i$
1	Nieruchome	0 obrotów 0 przesunięć	0	
2	Obrotowe	1 obrót 0 przesunięć	1	
3	Przesuwne	0 obrotów 1 przesunięcie	1	
4	Śrubowe	1 obrót 1 przesunięcie	1	
5	Przesuwno-obrotowe	1 obrót 1 przesunięcie	2	
6	Połączenie pow. płaskie	1 obrót 2 przesunięcia	3	
7	Przegub Kulisty	3 obroty 0 przesunięć	3	
8	Połączenie o styku liniowym	2 obroty 2 przesunięcia	4	
9	Połączenie otworowe	3 obroty 1 przesunięcie	4	
10	Para o styku punktowym	3 obroty 2 przesunięcia	5	
11	Brak połączenia swobodne	3 obroty 3 przesunięcia	6	człony swobodne

Łańcuchy kinematyczne manipulatorów można podzielić na:

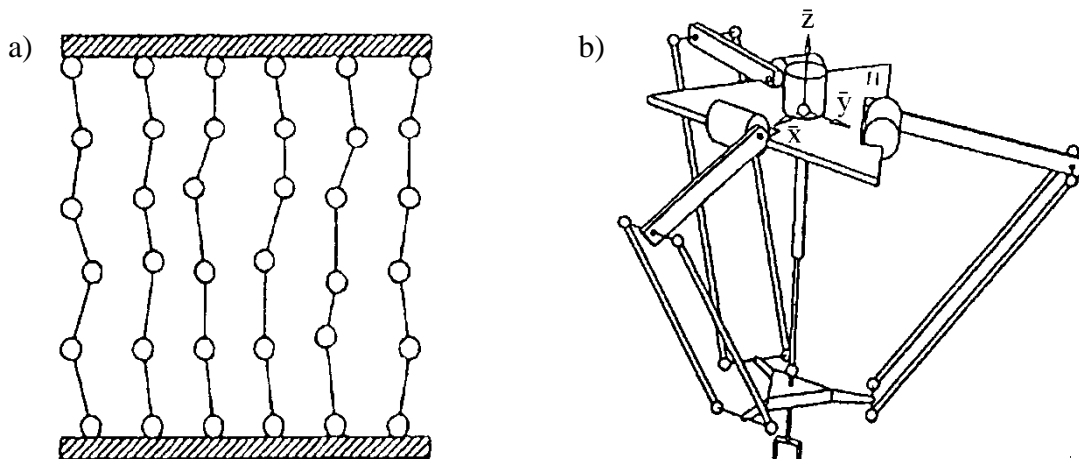
1. Szeregowy prosty, stanowiący łańcuch otwarty (rys.2.1a);
2. Równoległy prosty, stanowiący łańcuch zamknięty (rys. 2.1b);
3. Szeregowy złożony, zawierający łańcuch otwarty z rozgałęzieniami (rys. 2.1c);
4. Równoległy złożony, zawierający kilka łańcuchów zamkniętych (rys. 2.1b).



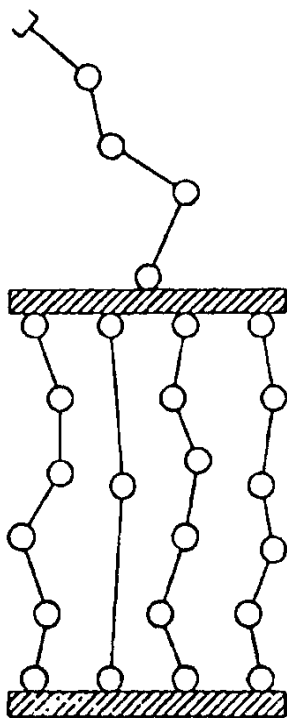
Rys. 2.1. Łańcuchy kinematyczne: a) prosty otwarty; b) prosty zamknięty; c) złożony otwarty; d) złożony zamknięty.



Rys. 2.2. Manipulator o strukturze szeregowej: a) schemat kinematyczny; b) schemat blokowy; c) widok manipulatora robota przemysłowego.

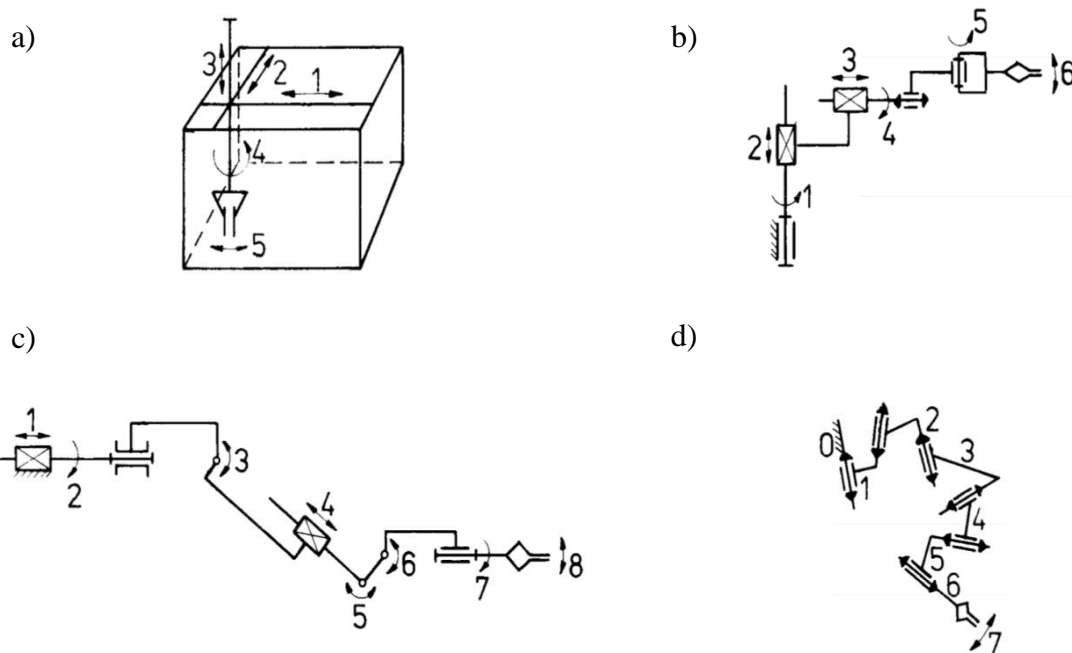


Rys. 2.3. Manipulator o strukturze równoległej: a) schemat kinematyczny; b) schemat konstrukcyjny manipulatora robota DELTA.



Rys. 2.4. Manipulator o strukturze hybrydowej (równoległo-szeregowej)

Na rys. 2.5a pokazano przykład manipulatora pracującego w układzie współrzędnych prostokątnych (kartezjańskim). Możliwe ruchy części transportowej oznaczono przez 1, 2 i 3, a ruchy chwytaka przez 4 i 5. W tym przypadku występują ruchy: 1 i 2 –przesuwne, 3 i 4 –cylindryczne i 5 – obrotowe. Stąd stosując wzór (2.2) otrzymuje się  $w = 3 + 2 = 5$ . Zatem manipulator powinien mieć 5 napędów.



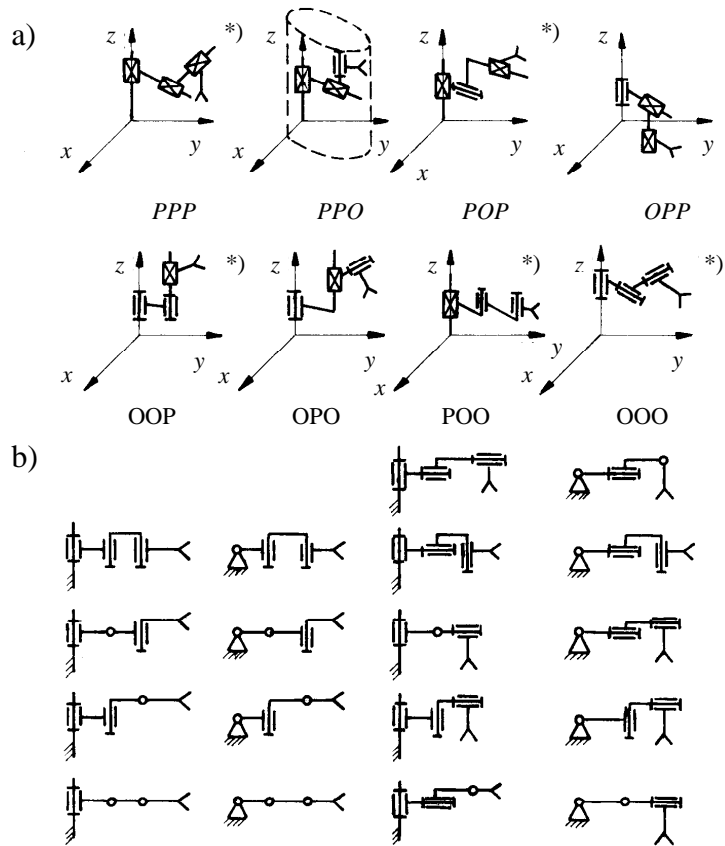
Rys. 2.5. Oznaczanie ruchliwości manipulatora: a) manipulator 4-członowy o układzie kartezjańskim, b) manipulator 5-członowy, c) manipulator 7-członowy, zawierający 2 pary przesuwne i 5 obrotowych; d) manipulator 6-członowy zawierający tylko pary obrotowe.

Rozważmy niektóre odmiany łańcuchów kinematycznych, zawierających wyłącznie połączenia obrotowe  $O$  i przesuwne  $P$ . Z rachunku kombinatorycznego wynika, że liczbę odmian (wariacji) łańcuchów utworzonych z dwóch elementów, w tym przypadku  $O$  i  $P$ , można określić z zależności

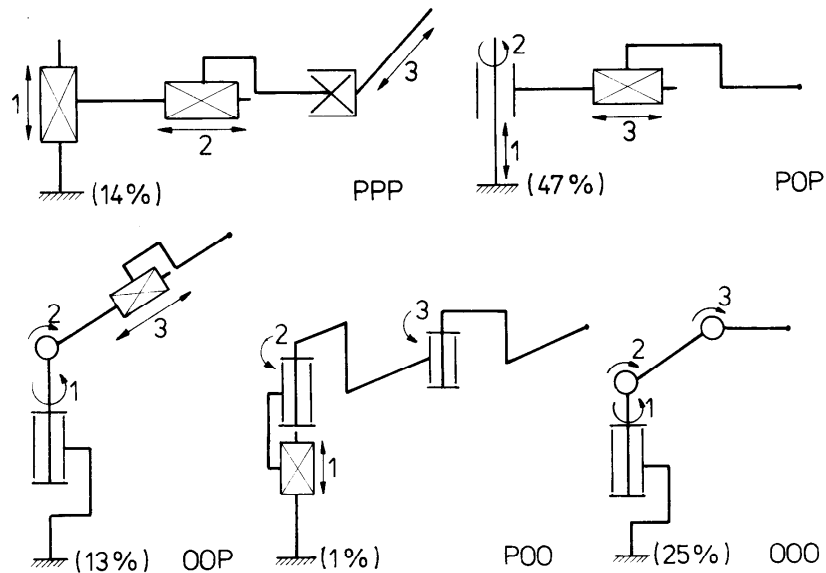
$$L_k = 2^k \quad (2.4)$$

gdzie  $k$  – liczba członów lub ruchliwość struktury.

- Gdy  $k = 1$  występuje połączenie obrotowe lub przesuwne.
- Gdy  $k = 2$  występują cztery możliwe odmiany pokazane na rys.2.6a, utworzone z połączeń obrotowych  $O$  i przesuwnych  $P$ , a mianowicie:  $PO$ ,  $OO$ ,  $OP$ , i  $PP$ . Zmieniając usytuowanie osi par (dopuszcza się zmianę usytuowania osi o kąt  $\pi/2$ ) można uzyskać dodatkowe odmiany pokazane na rysunku 2.6b.
- Gdy  $k = 3$  występuje osiem odmian (rys. 2.7a) od  $PPP$  do  $OOO$ .
- W przypadkach  $k = 4, 5, 6, \dots$  liczba niezależnych odmian jest bardzo duża. Na przykład dla  $k = 4$  otrzymuje się 32 odmiany, a przez zmianę usytuowania osi ponad tysiąc.

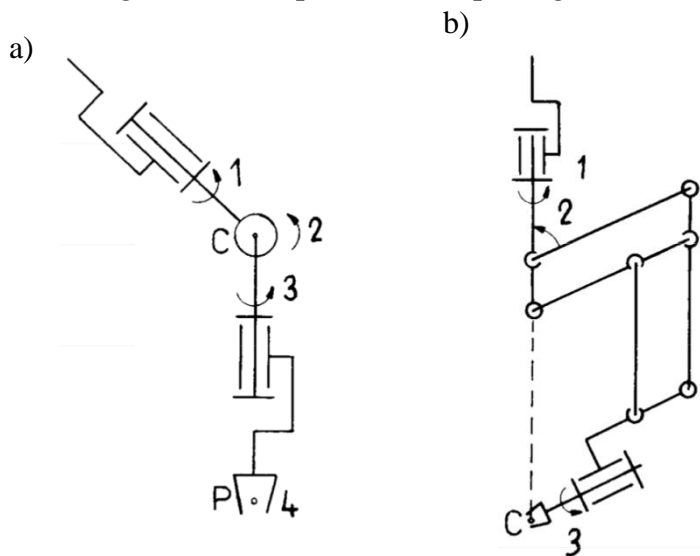


Rys. 2.6. Odmiany łańcuchów manipulatorów dla  $k = 3$ : a) od *PPP* do *OOO*, b) 18 odmian uzyskanych ze struktury *OOO*. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



Rys. 2.7. Najczęściej spotykane odmiany łańcuchów manipulatorów. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Na rys. 2.8 pokazano dwa układy manipulatorów: a) kiść zawierająca 3 pary obrotowe o przecinających się osiach; b) układ pozycjonowania, którego osie par obrotowych 2 i 3 przecinają oś pierwszej pary, pozostałe osie par obrotowych są równoległe, tworząc płaski układ pantografu.



Rys. 2.8. Przykłady mechanizmów manipulatora: a) kiść z parami obrotowymi o przecinających się osiach, b) osie par obrotowych 2 i 3 przecinają oś pierwszej pary, pozostałe osie są równoległe, tworząc płaski układ pantografu.

## 2.2.2 Podział robotów przemysłowych

**Roboty przemysłowe** są stosowane do robotyzacji takich procesów, jak: odlewnictwo, spawalnictwo, lakiernictwo, pokrycia powierzchni, obsługa pras, montaż i inne procesy, które wymagają dużego wysiłku fizycznego i są szkodliwe dla zdrowia obsługi.

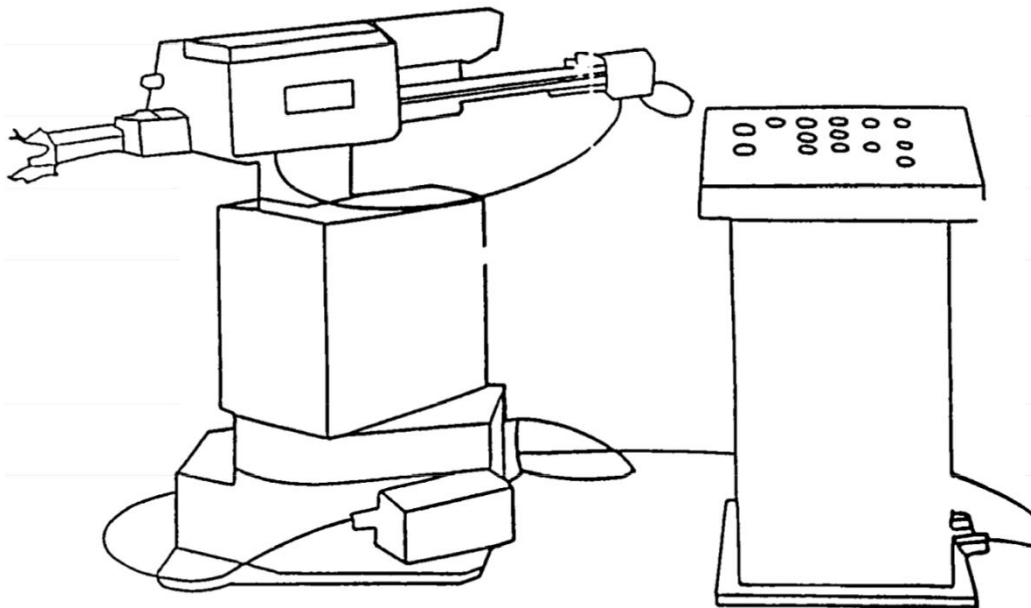
Manipulacyjny robot przemysłowy jest wielozadaniową maszyną o wielu stopniach swobody, automatycznie sterowaną, programowaną, stacjonarną lub mobilną dla różnych zastosowań przemysłowych (ISO/TR 8373 3.3).

- *Programowana maszyna* oznacza tutaj możliwość zmiany programów, ruchów lub funkcji bez zmiany struktury mechanicznej lub układu sterowania.
- *Wielozadaniowa maszyna* oznacza możliwość przystosowania do różnych zastosowań przez zmiany struktury mechanicznej lub układu sterowania.
- *Fizykalna zmiana* (odmiana) oznacza tutaj zmianę struktury mechanicznej lub układu sterowania za wyłączeniem zmian programu itp.

Rozróżnia się cztery klasy robotów przemysłowych:

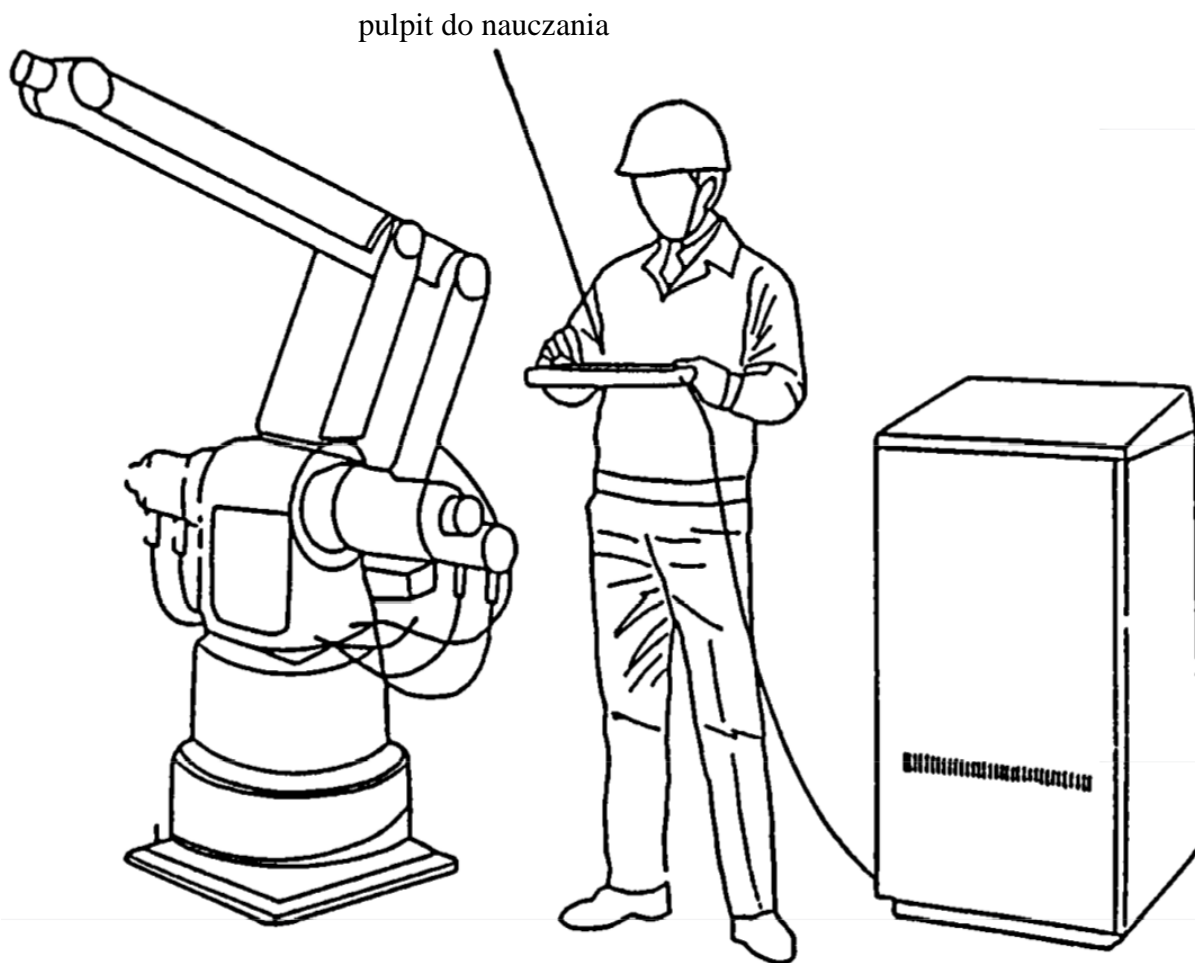
1. **Robot sekwencyjny** o sekwencyjnym układzie sterowania (ang. *sequence control*, ISO 28806 3.1.07), np. robot typu non-servo PTP. *Sterowanie sekwencyjne* (ISO 2806 3.1.07), w którym stan ruchu maszyny wynika z określonego porządku. Działanie robota jest binarne, tzn. typu on-off, start-

stop itd. a trajektoria między dwoma binarnymi położeniami końcowymi jest sterowana.

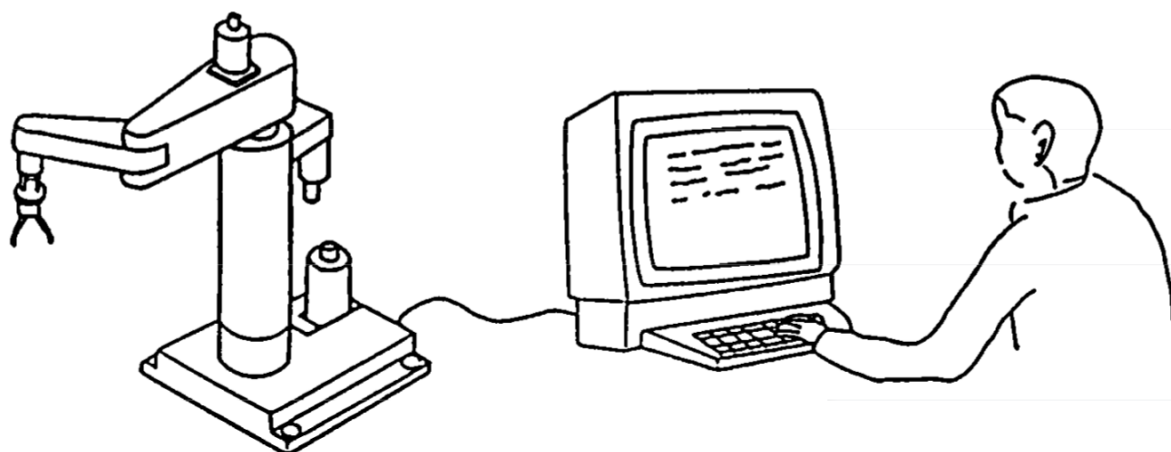


Rys. 2.9. Robot sekwencyjny. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

2. **Robot realizujący zadaną trajektorię** (ang. *trajectory operated robot*) z ustaloną procedurą sterowanych ruchów wg instrukcji, które specyfikują żadaną pozycję (zwykle uzyskiwaną przez interpolację) oraz żadaną prędkość w danym położeniu.
  - Robot typu Playback (ISO, TP 8373 3.4) może powtarzać zadanie programowe, ustalone zdalnie przez nauczanie.
  - Robot typu CNC (ISO 2806 3.1.3), w którym program dedykowany, przechowywany w pamięci komputera, jest wykorzystywany do realizacji wszystkich lub niektórych podstawowych numerycznych funkcji sterujących.
3. **Robot adaptacyjny** (ang. *adaptive robot*) o sensorycznym (ISO/TR 8373 6.3.3) lub adaptacyjnym (ISO/TR 8373 6.3.4) lub uczącym się układzie sterowania (ISO/TR 8373 6.3.5), o możliwościach zmiany własności dzięki wykorzystaniu informacji sensorycznej lub nagromadzonych doświadczeń, planowaniu zadań przez nauczanie i trening, np. robot wyposażony w sensory wizyjne, w którym jest możliwa korekta ruchu podczas pobierania elementów, montażu lub spawania łukowego.

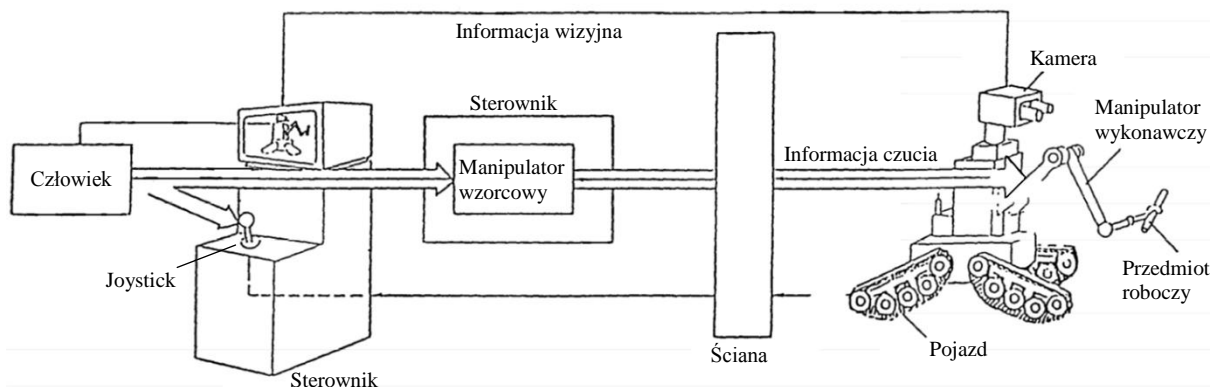


Rys. 2.10. Robot typu Playback. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



Rys. 2.11. Robot typu CNC. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



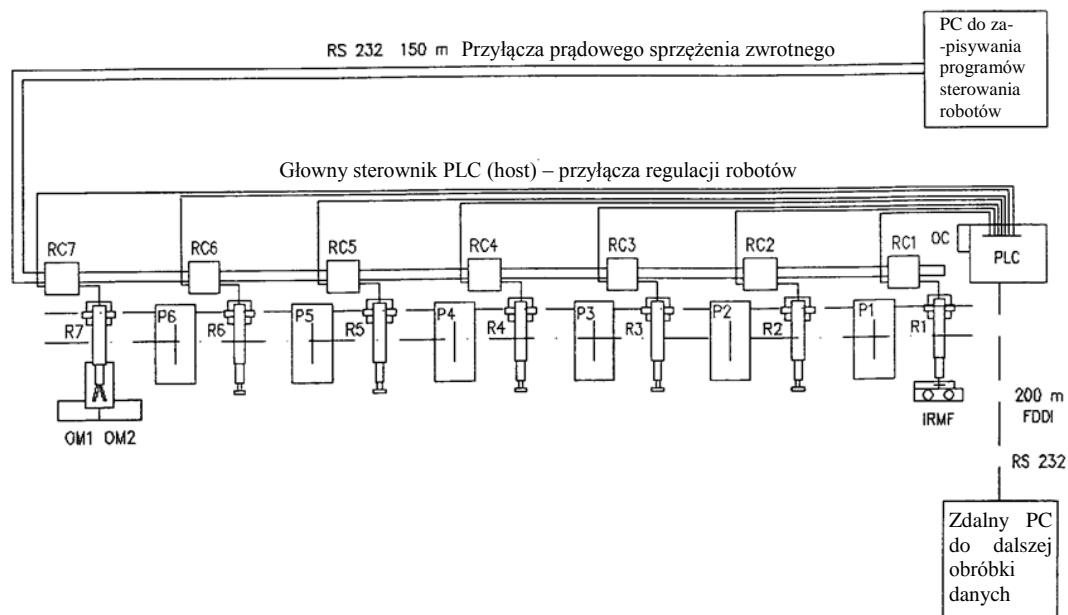


Rys. 2.12. Robot typu Teleoperator. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

- *Sterowanie sensoryczne* - ruch robota lub wartość siły są realizowane zgodnie z sygnałami wyjściowymi z czujników zewnętrznych.
  - *Sterowanie adaptacyjne* - nastawia się parametry na podstawie warunków uzyskanych w procesie detekcji.
  - Uczący się układ sterowania - doświadczenie (uzyskane podczas poprzednich cykli pracy) jest automatycznie wykorzystywane do zmiany parametrów i/lub algorytmów.
4. **Teleoperator** (ang. *teleoperated robot*) ma zdalne sterowanie, realizowane przez operatora lub komputer. Jego funkcje są związane z przenoszeniem na odległość funkcji motorycznych i sensorycznych operatora. Wyłącza się z tej klasy układy o połączeniach mechanicznych, a zalicza się roboty ze zdalnym sterowaniem lub ze wspomaganie komputerowym. Roboty te mają proste lub specyficzne sterowanie, a komunikacja odbywa się przez kanały fizyczne (przewody, rury) lub niefizyczne (bezprowodowe).

**Roboty mobilne** mają zastosowania w kosmosie, pod wodą, budownictwie i usługach. Teleoperacja była koncepcją, którą wykorzystano w układach kopiujących. Operator był włączony bezpośrednio w układ sterowania. Obecnie jest to układ powszechnie stosowany do realizacji prac na odległość lub w trudnych warunkach. Roboty mobilne z takim układem sterowania są używane w obszarach wzmożonej radiacji, np. w Czernobylu lub do przenoszenia ładunków niebezpiecznych, np. bomb.

**Zrobotyzowane linie produkcyjne.** Linia dużych pras, zainstalowana w Tychach w Zakładach FIAT Auto Poland, jest obsługiwana przez różne roboty przemysłowe (COMAU i Irb-6, 60). Linia 6 średnich pras 300 t, która wykorzystuje roboty Irb-60, została zrobotyzowana przez PIAP.

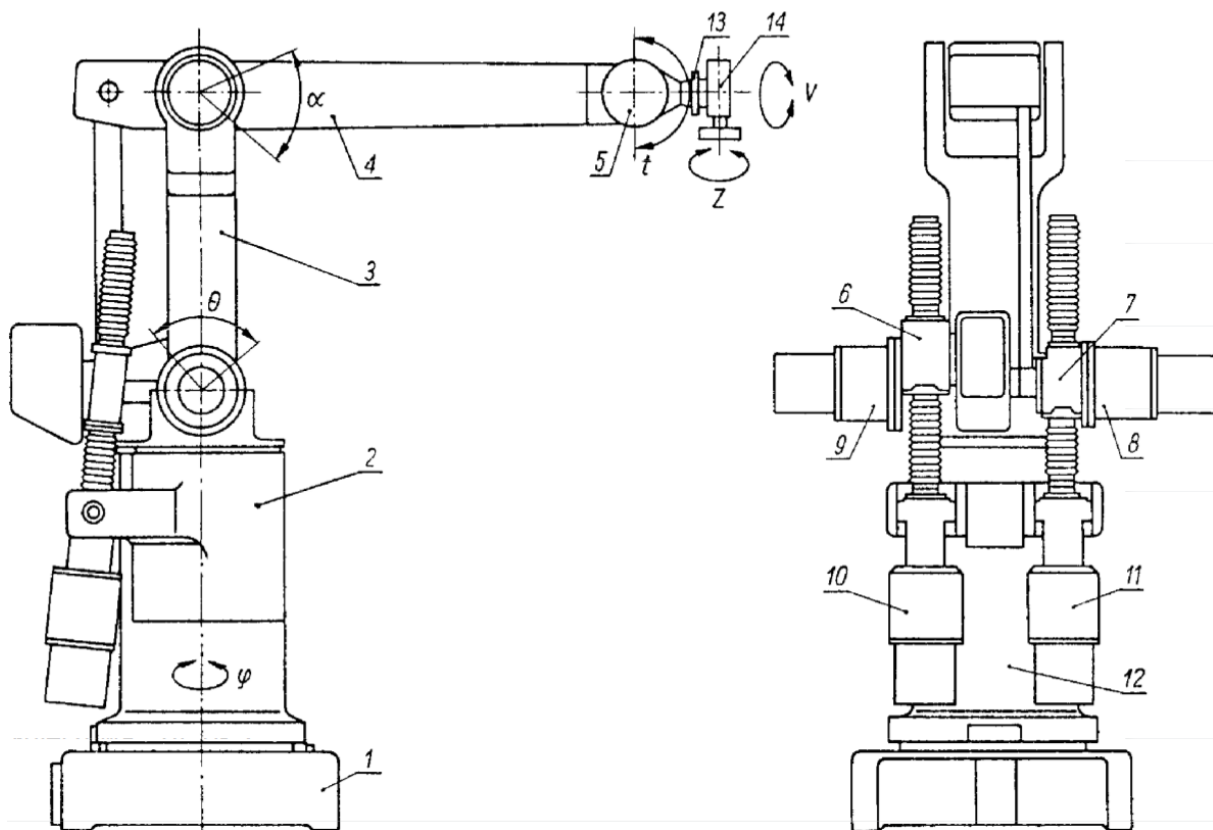


Rys. 2.13. Widok ogólny zrobotyzowanej linii średnich pras w Zakładach FIAT-Auto Poland, Tychy; P1-P6 – prasy o nacisku 300 t, R1-R7 – roboty przemysłowe Irb-60, RC1-RC7 – sterowniki robotów, IRMF – magazyn obrotowy, PLC – sterownik główny, OC – konsola operatora, OM1-OM2 – magazyn wyjściowy. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

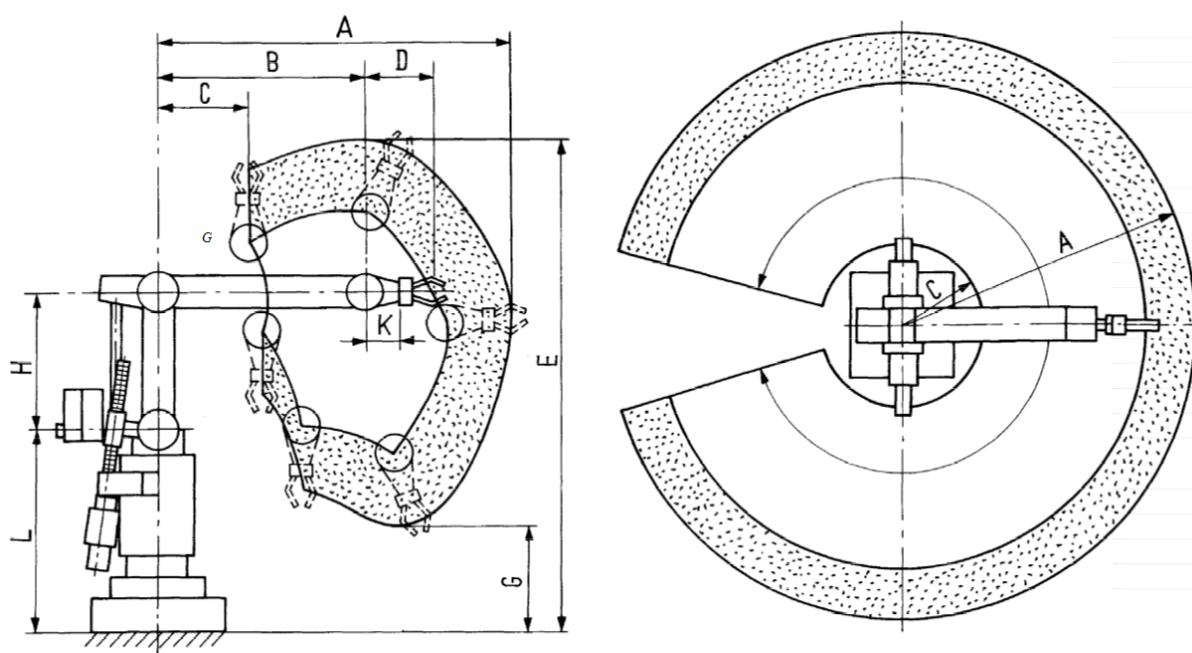
Wykorzystano tutaj następujące urządzenia:

- PLC komputer typu simotrac S5 155V z połączeniami do komputera PC lub sieci do przetwarzania danych w długim okresie produkcji,
- siedem robotów Irb-60 (plus jeden robot rezerwowy) wybranych przez PIAP,
- pulpit sterowniczy dostępny wzdłuż całej linii,
- układ sensorów,
- wyposażenie pomocnicze (magazyn z manipulatorem pneumatycznym, chwytakiem pneumatycznym typu próżniowego, pojazd do usuwania manipulatorów robotów, bariery zabezpieczające, magazyn wyjściowy z dwoma kontenerami).

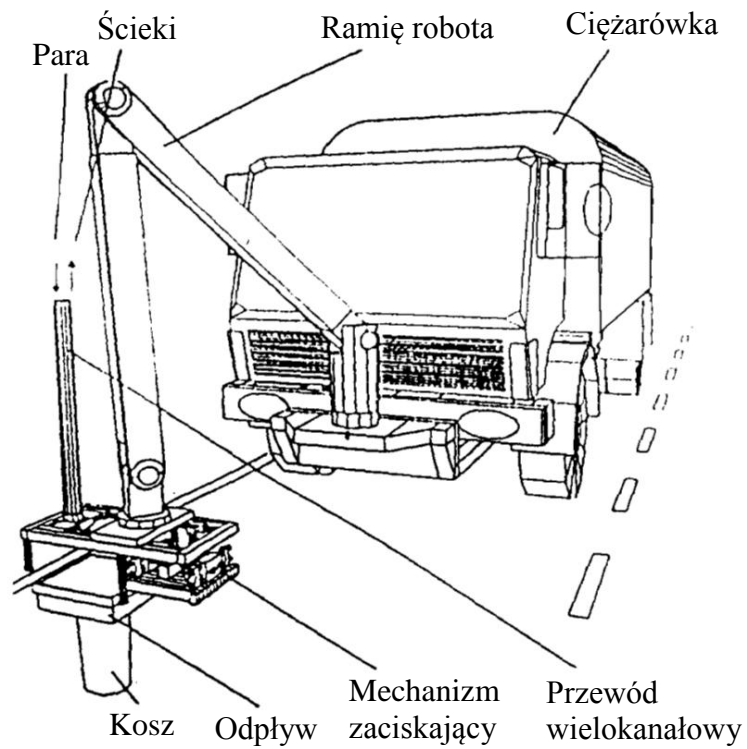
Roboty IRb i IRp składają się z manipulatora i oddzielonej konstrukcyjnie szafy układu sterowania oraz dołączonych: panelu programowania i jednostki pamięci, mogące obsługiwać więcej niż jednego robota. Robot jest produkowany w kilku wariantach: robot lekki o udźwigu 60N (robot IRb-6 i IRp-6) oraz ciężki o udźwigu 600 N (robot Irb-60 i Irp-60). Znalazł zastosowania przemysłowe, np. do podbierania i wkładania przedmiotów na paletę wg założonego wzoru, poszukiwania przedmiotów o nieznanym dokładnie położeniu itp. Stały program sterujący pracą robota i określający sposób wykonywania instrukcji, jest przechowywany w pamięci. Ponadto przekazuje operatorowi informacje o stanie robota za pomocą wskaźników umieszczonych na panelach, za pośrednictwem których operator komunikuje się z układem sterowania.



Rys. 2.14. Robot IRb. Oznaczenia: 1 – podstawa, 2 – korpus, 3 – ramię dolne, 4 – ramię górne, 5 – zespół przegubu kiści, 6 – przekładnia śrubowa toczna ruchu (q), 7 – przekładnia śrubowa toczna ruchu (a), 8 – napęd ruchu (v), 9 – napęd ruchu (t), 10 – napęd ruchu (q), 11 – napęd ruchu (a), 12 – napęd ruchu (f), 13 – końcówka kołnierzowa, 14 – oś z. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



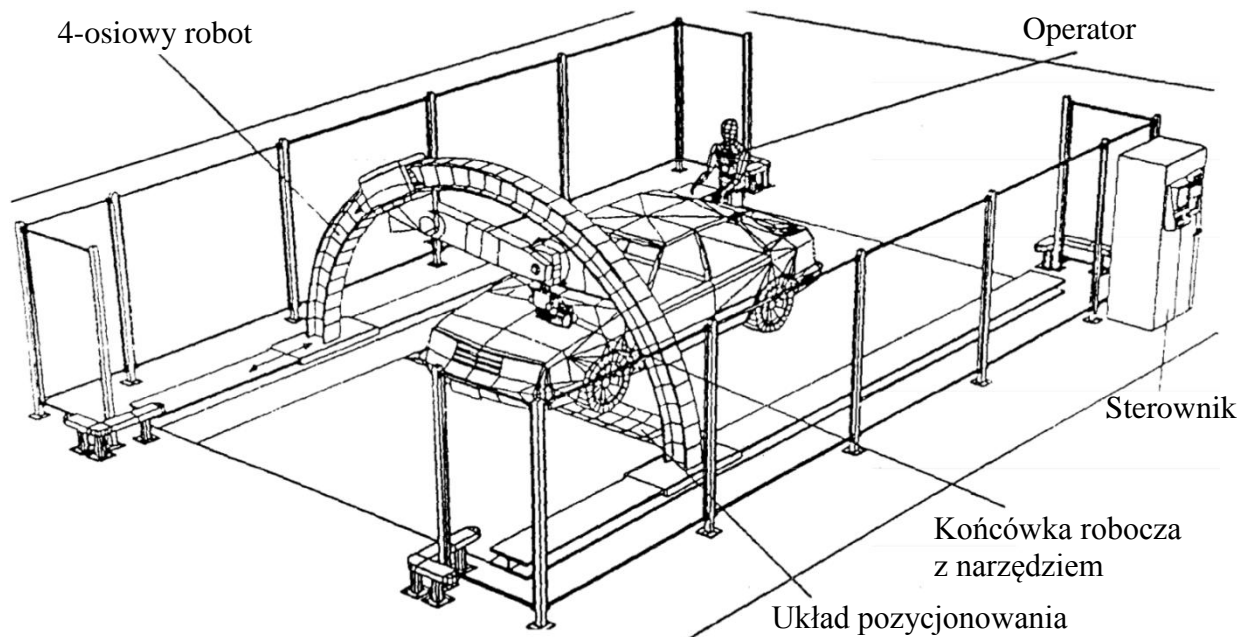
Rys. 2.15. Przestrzeń robocza robota kolumnowego. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



Rys. 2.16. Robot do czyszczenia kanałów. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



Rys. 2.17. Robot SKYWASH na podwoziu 8-kołowym w działaniu (czyszczenie powierzchni kadłuba samolotu (B 747/400)). (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



Rys. 2.18. Robot do polerowania samochodu (końcówka robocza ma 4 stopnie swobody).  
(Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

# 3. Kinematyka manipulatorów

## 3.1 Wprowadzenie

*Manipulator* składa się z kilku członów (ciał w przybliżeniu sztywnych), połączonych ruchowo, które wykonują złożone ruchy w przestrzeni roboczej. Opisanie przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń oraz dynamiki oddzielnych członów i ich połączeń najczęściej wykonuje się za pomocą rachunku macierzowego, przy wykorzystaniu współrzędnych jednorodnych, co umożliwia w sposób zwarty i jednolity formalnie przedstawić problemy związane z mechaniką manipulatora – opisy geometrycznych, kinematycznych i dynamicznych związków między członami manipulatora i obiektami manipulacji oraz algorytmy sterowania łącznie z procesami obróbki informacji wizyjnej. Zastosowanie współrzędnych jednorodnych do opisanego złożonego układu sterowania robota może istotnie uprościć analizę i syntezę takiego układu.

**Analiza kinematyczna** - opis geometrii ruchu bez uwzględnienia mas i sił, które ten ruch wywołują. Analiza kinematyki manipulatorów obejmuje studia położenia, przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia członów zarówno liniowych, jak i kątowych. Przemieszczenie określa się jako odległość kolejnych położenia.

Stosowane metody analizy: **analityczne** (macierzowe, wektorowe), **numeryczne** (różnicowe, iteracyjne); **wykreślne** (CAD), **komputerowe** (pakiety programów: ADAMS, DADS, Matlab, ANSYS, Simulink, Madymo).

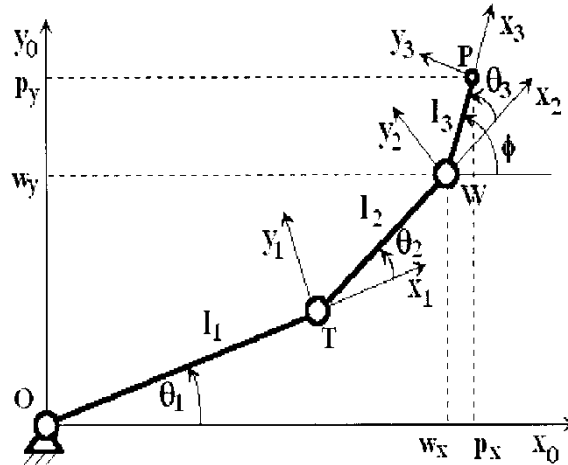
Animacja ruchu umożliwia wizualizację przebiegu przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia.

Przy wymiarowaniu manipulatorów najczęściej wykorzystuje się współrzędne Denavita-Hartenberga (D-H), a także współrzędne cylindryczne, sferyczne, kartezyjskie absolutne.

Podstawowe zadania kinematyki:

- **proste**, gdy dane są położenia i przemieszczenia względne w połączeniach ruchowych a wyznacza się położenie i przemieszczenie członu roboczego (dane są współrzędne konfiguracyjne, a wyznacza się współrzędne kartezyjskie);
- **odwrotne**, gdy dane jest położenie i przemieszczenie członu roboczego, a wyznacza się położenia i przemieszczenia względne w połączeniach ruchowych.

Zadanie **planowania trajektorii manipulatora**: wyznaczenie zbioru położenia (w czasie) członu roboczego w postaci współrzędnych absolutnych (pozycji i orientacji) lub wyznaczenie zbioru współrzędnych konfiguracyjnych (w połączeniach ruchowych napędowych)



Rys. 3.1. Schemat kinematyczny manipulatora płaskiego; oznaczenia:  $l_i$  - długość członu,  $\theta_i$  - kąt obrotu w przegubie  $i$ ,  $\{x_i y_i\}$  - układ odniesienia członu,  $i = 0$  - podstawa, nieruchoma,  $i = 1, 2, 3$  - człony ruchome,  $W$  - środek kiści,  $P$  - środek chwytaka,  $\Phi$  - kąt orientacji członu roboczego.

Współrzędne kartezjańskie punktu  $W$  (środką kiści) w zależności od współrzędnych konfiguracyjnych opisano w postaci

$$\begin{aligned} w_x &= l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ w_y &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2); \end{aligned} \quad (3.1)$$

Współrzędne kartezjańskie punktu  $P$  (członu roboczego) w zależności od współrzędnych konfiguracyjnych opisano w postaci

$$\begin{aligned} p_x &= l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ p_y &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Różniczkując względem czasu współrzędne kartezjańskie punktu  $W$  (3.1) otrzymuje się współrzędne prędkości tego punktu

$$\begin{aligned} \dot{w}_x &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{w}_y &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Podobnie, różniczkując względem czasu współrzędne kartezjańskie punktu  $P$  (3.2) otrzymuje się współrzędne prędkości tego punktu

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) - \\ &\quad - l_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \dot{p}_y &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) + \\ &\quad + l_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Układ równań liniowych (3.4) można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{bmatrix} = \mathbf{J}_p \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial p_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}$$

gdzie  $\mathbf{J}_p$  - macierz jakobianowa manipulatora.

Układ równań liniowych (3.3) można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_x \\ \dot{w}_y \end{bmatrix} = \mathbf{J}_w \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{J}_w = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial w_x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial w_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial w_y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{J}_w$  - macierz jakobianowa ramienia manipulatora.

**Zadanie odwrotne kinematyki** manipulatora polega na wyznaczaniu wszystkich możliwych zbiorów współrzędnych konfiguracyjnych, które odpowiadają danym współrzędnym kartezjańskim członu roboczego.

**Przykład 3.1.** Dane są:  $w_x$ ,  $w_y$ , należy wyznaczyć:  $\theta_1$  i  $\theta_2$

**Rozwiązanie:** równania (3.1) na współrzędne punktu  $W$  przekształca się do postaci

$$w_x - l_1 \cos \theta_1 = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$w_y - l_1 \sin \theta_1 = l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2);$$

Aby otrzymać jedno równanie o jednej niewiadomej  $\theta_1$  podnosi się do kwadratu obie strony tych równań i dodaje stronami. W ten sposób ruguje się niewiadomą  $\theta_2$ .

$$a \cos \theta_1 + b \sin \theta_1 = d$$

$$a = 2w_x l_1$$

$$b = 2w_y l_1$$

$$d = w_x^2 + w_y^2 + l_1^2 - l_2^2$$



Podstawiając:  $\cos \theta_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ;  $\sin \theta_1 = \frac{2t}{1+t^2}$ ; gdzie  $t = \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}$  otrzymuje się

$$(a+d)t^2 - 2bt - (a-d) = 0$$

stąd

$$t_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - d^2}}{a+d}; \quad \text{stąd: } \theta_{1,1} = 2 \operatorname{arctg} t_1; \quad \theta_{1,2} = 2 \operatorname{arctg} t_2$$

## 3.2 Współrzędne jednorodne

W trójwymiarowej przestrzeni roboczej robota wprowadza się kartezjański układ współrzędnych  $OXYZ$ . *Współzrędnymi jednorodnymi punktu  $P$*  w trójwymiarowej przestrzeni roboczej nazywa się dowolne cztery liczby  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , nie wszystkie równe zero, związane ze współzrędnymi kartezjańskimi tego punktu  $(x, y, z)$  zależnościami

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

Współzrędnne jednorodne są określone niejednoznacznie. Wynika to z faktu, że jeżeli  $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  są współzrędnymi jednorodnymi pewnego punktu z przestrzeni roboczej, to liczby  $[\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4]^T$ , gdzie  $\lambda \neq 0$ , są również współzrędnymi jednorodnymi tego punktu. Współzrędnna  $x_4$  musi być różna od zera, jeśli wektor  $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  ma opisywać współzrędnne jednorodne punktu, a nie kierunek w przestrzeni.

### Przekształcenie współzrędnnych jednorodnych

Współzrędnne kartezjańskie punktu z przestrzeni roboczej w prostokątnym układzie współzrędnnych  $OXYZ$  można wyznaczyć, jeżeli znane są współzrędnne tego punktu w innym prostokątnym układzie współzrędnnych  $O'X'Y'Z'$ , zgodnie z zależnościami:

$$x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + r_1$$

$$y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + r_2$$

$$z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + r_3$$

gdzie:  $r_1, r_2, r_3$  – współzrędnne początku układu  $O'X'Y'Z'$  określone w układzie  $OXYZ$ ;  $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{33}$  – kosinusy kierunkowe osi układu  $O'X'Y'Z'$  względem układu  $OXYZ$ .

Jeśli wektor  $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  przedstawia współzrędnne jednorodne punktu w układzie  $OXYZ$ , a wektor  $[x'_1, x'_2, x'_3, x'_4]^T$  – współzrędnne jednorodne tego punktu w układzie  $O'X'Y'Z'$ , to zawsze można przyjąć, że  $x_4 = x'_4$  (współzrędnne jednorodne mogą być mnożone przez dowolną liczbę różną od zera).

Po podstawieniu współrzędnych jednorodnych otrzymuje się następujące zależności:

$$\begin{aligned}x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_{13}x'_3 + r_1x'_4 \\x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_{23}x'_3 + r_2x'_4 \\x_3 &= c_{31}x'_1 + c_{32}x'_2 + c_{33}x'_3 + r_3x'_4 \\x_4 &= x'_4\end{aligned}$$

lub w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix}x_1 \\x_2 \\x_3 \\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & r_1 \\c_{21} & c_{22} & c_{23} & r_2 \\c_{31} & c_{32} & c_{33} & r_3 \\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x'_1 \\x'_2 \\x'_3 \\x'_4\end{bmatrix}$$

Równanie to opisuje zależności współrzędnych jednorodnych tego samego punktu, określonych w różnych układach współrzędnych kartezjańskich, za pomocą transformacji jednorodnych, liniowych, nieosobliwych.

W przypadku, gdy  $x'_1 = 1$ , pierwsze trzy współrzędne jednorodne punktu w przestrzeni są identyczne ze współrzędnymi kartezjańskimi, ponieważ

$$x' = \frac{x'_1}{x'_4} = x'_1, \quad y' = \frac{x'_2}{x'_4} = x'_2, \quad z' = \frac{x'_3}{x'_4} = x'_3,$$

oraz  $x = \frac{x_1}{x_4} = x_1, \quad y = \frac{x_2}{x_4} = x_2, \quad z = \frac{x_3}{x_4} = x_3,$

W wyniku otrzymuje się

$$\begin{bmatrix}x \\y \\z \\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & r_1 \\c_{21} & c_{22} & c_{23} & r_2 \\c_{31} & c_{32} & c_{33} & r_3 \\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x' \\y' \\z' \\1\end{bmatrix}$$

### 3.3 Obroty i przesunięcia układów współrzędnych

Współrzędne jednorodne wektora pozycji punktu mogą być wyrażone w postaci macierzy kolumnowej:  $\mathbf{w} = [w_x \ w_y \ w_z \ 1]^T$ , gdzie indeks  $T$  oznacza transponowanie wierszy macierzy na kolumny. Wektor pozycji punktu początku układu współrzędnych jest wektorem zerowym i może być wyrażony w postaci macierzy kolumnowej  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ . Natomiast wektor o postaci  $[w_x \ w_y \ w_z \ 0]^T$  jest wektorem kierunkowym.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów jest określony jako liczba (skalar)

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = w_x v_x + w_y v_y + w_z v_z$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów można także przedstawić w postaci macierzowej

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = [\mathbf{w}]^T [\mathbf{v}] = [\mathbf{v}]^T [\mathbf{w}] = T_r [\mathbf{w}] [\mathbf{v}]^T$$

gdzie  $T_r$  oznacza sumowanie diagonalnych elementów (na przekątnej macierzy)

$$T_r [\mathbf{w}] [\mathbf{v}]^T = T_r \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = T_r \begin{bmatrix} w_x v_x & w_x v_y & w_x v_z \\ w_y v_x & w_y v_y & w_y v_z \\ w_z v_x & w_z v_y & w_z v_z \end{bmatrix}$$

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez te dwa wektory i może być wyrażony w postaci macierzowej

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_y v_z - w_z v_y \\ w_z v_x - w_x v_z \\ w_x v_y - w_y v_x \end{bmatrix}$$

Na przykład, wektor prędkości punktu jest definiowany jako iloczyn wektorowy wektora prędkości kątowej  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  i wektora  $\mathbf{p}$ , który określa pozycję punktu w układzie odniesienia

$$\mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_z & \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z & 0 & -\dot{\theta}_x \\ -\dot{\theta}_y & \dot{\theta}_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_y p_z - \dot{\theta}_z p_y \\ \dot{\theta}_z p_x - \dot{\theta}_x p_z \\ \dot{\theta}_x p_y - \dot{\theta}_y p_x \end{bmatrix}$$

Przekształcenie jednorodne przedstawiające:

$\mathbf{A}_p$  – przesunięcie o wektor  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z \ 1]^T$ ,  $\mathbf{A}_{x,\theta_1}$  – obrót wokół osi  $x$  o kąt  $\theta_1$ ,  $\mathbf{A}_{y,\theta_2}$  – obrót wokół osi  $y$  o kąt  $\theta_2$  oraz  $\mathbf{A}_{z,\theta_3}$  – obrót wokół osi  $z$  o kąt  $\theta_3$ , jest opisane za pomocą macierzy:

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{z,\theta_3} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{y,\theta_2} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{x,\theta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ 0 & s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie:  $s\theta_i = \sin \theta_i$ ,  $c\theta_i = \cos \theta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Przekształcenie jednorodne z jednego układu do drugiego jest opisane przez współrzędne wektora przesunięcia  $\mathbf{p}$  ( $p_x, p_y, p_z$ ) i wersorów orientacji  $\mathbf{l}$  ( $l_x, l_y, l_z$ ),  $\mathbf{m}$  ( $m_x, m_y, m_z$ ),  $\mathbf{n}$  ( $n_x, n_y, n_z$ ), które tworzą elementy macierzy transformacji z układu  $i$  do układu  $j$

$$\mathbf{T}_{i,j} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x & p_x \\ l_y & m_y & n_y & p_y \\ l_z & m_z & n_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Z dziewięciu współrzędnych wersorów  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  tylko trzy są niezależne, ponieważ pozostałe muszą spełniać sześć z dziewięciu zależności:

$$\begin{aligned} l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 &= 1 \\ m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 &= 1 \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 1 \\ n_x m_x + n_y m_y + n_z m_z &= 0 \\ l_x m_x + l_y m_y + l_z m_z &= 0 \\ l_x n_x + l_y n_y + l_z n_z &= 0 \\ m_y n_z - m_z n_y &= l_x \\ m_z n_x - m_x n_z &= l_y \\ m_x n_y - m_y n_x &= l_z \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pierwsze trzy zależności wynikają z jednostkowej długości wersorów  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  i  $\mathbf{n}$ , a pozostałe – z faktu, że wersory te są wzajemnie prostopadłe.

Jeśli wartości  $m_x$ ,  $m_y$  i  $n_x$  przyjęto jako niezależne, to pozostałe wartości współrzędnych wersorów  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  i  $\mathbf{n}$  można wyznaczyć wg wzorów:

$$\begin{aligned} m_z &= \pm \sqrt{1 - m_x^2 - m_y^2}, \\ n_y &= -m_x \left( m_y n_x \pm m_z \sqrt{1 - m_x^2 - n_x^2} \right) / (1 - m_x^2), \\ n_z &= \pm \sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2}, \\ l_x &= m_y n_z - m_z n_y, \quad l_y = m_z n_x - m_x n_z, \quad l_z = m_x n_y - m_y n_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

W powyższych wzorach na  $m_z$ ,  $n_y$  i  $n_z$  występują podwójne znaki „ $\pm$ ”, które wskazują na możliwość wystąpienia ośmiu różnych rozwiązań. Tylko te rozwiązania, które spełniają warunki zwrotów wersorów  $\mathbf{m}$  i  $\mathbf{n}$ , wybiera się jako akceptowalne.

W przypadku przekształcenia odwrotnego macierze odwraca się przy zachowaniu następujących reguł:

$$\mathbf{T}_{j,i} = \mathbf{T}_{i,j}^{-1}, \quad \mathbf{T}_{i,j} \mathbf{T}_{j,i} = \mathbf{E} \quad (3.10)$$

gdzie  $\mathbf{E}$  – macierz jednostkowa, której elementy diagonalne są równe jedności, a pozostałe są równe zeru. Podstawiając (3.7) do równania (3.10), otrzymuje się

$$\mathbf{T}_{i,j}^{-1} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{l} \\ m_x & m_y & m_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{m} \\ n_x & n_y & n_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

gdzie:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{l} = p_x l_x + p_y l_y + p_z l_z$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{m} = p_x m_x + p_y m_y + p_z m_z$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = p_x n_x + p_y n_y + p_z n_z$$

Obrót układu  $i$  o kąt  $\theta$  wokół dowolnie zorientowanej osi przez wektor  $\mathbf{u}_i$  dany w układzie  $j$  może być rozdzielony na trzy kolejne obroty:

1) obrót wektora  $\mathbf{u}_i$  do pokrycia się z osią  $z_j$ , 2) obrót o kąt  $\theta$  wokół osi  $z_j$ , 3) obrót układu  $i$  do pozycji pierwotnej. Zatem macierz obrotu układu  $i$  wokół osi wektora  $\mathbf{u}_i$  o kąt  $\theta$  można wyznaczyć z zależności

$$\mathbf{A}_{u,\theta} = \mathbf{T}_{i,j} \mathbf{A}_{z,\theta} \mathbf{T}_{i,j}^{-1} \quad (3.12)$$

Po podstawieniu zależności (3.1) i (3.3) do (3.4), otrzymuje się

$$\mathbf{A}_{u,\theta} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x & 0 \\ l_y & m_y & n_y & 0 \\ l_z & m_z & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & 0 \\ m_x & m_y & m_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stąd po wykonaniu kolejno mnożenia macierzy, począwszy od prawej oraz uwzględnieniu podstawienia:  $u_x = n_x$ ,  $u_y = n_y$ ,  $u_z = n_z$ , otrzymuje się

$$\mathbf{A}_{u,\theta} = \begin{bmatrix} u_x^2(1-c\theta)+c\theta & u_x u_y(1-c\theta)-u_z s\theta & u_x u_z(1-c\theta)+u_y s\theta & 0 \\ u_x u_y(1-c\theta)+u_z s\theta & u_y^2(1-c\theta)+c\theta & u_y u_z(1-c\theta)-u_x s\theta & 0 \\ u_x u_z(1-c\theta)-u_y s\theta & u_y u_z(1-c\theta)+u_x s\theta & u_z^2(1-c\theta)+c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Z ogólnej zależności (3.13) można otrzymać macierze obrotu wokół poszczególnych osi. Na przykład przyjmując  $u_x = 1$ ,  $u_y = u_z = 0$ , otrzymuje się macierz obrotu wokół osi  $x$  o kąt  $\theta$ , zapisaną wcześniej jako  $\mathbf{A}_{x,\theta}$ . Po zsumowaniu elementów diagonalnych otrzymuje się

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)(1 - c\theta) + 3c\theta = 1 + 2c\theta$$

Zatem 
$$c\theta = (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1)/2$$

Po odjęciu odpowiednich elementów macierzy (3.13), o symetrycznym usytuowaniu względem przekątnej, a następnie podniesieniu do kwadratu tych różnic i dodaniu stronami otrzymuje się

$$(a_{12} - a_{21})^2 + (a_{13} - a_{31})^2 + (a_{23} - a_{32})^2 = 4s^2\theta$$

Stąd

$$2s\theta = \pm \sqrt{(a_{12} - a_{21})^2 + (a_{13} - a_{31})^2 + (a_{23} - a_{32})^2}$$

przy czym znak „+” odnosi się do wartości kąta z przedziału  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Składowe wersora  $\mathbf{u}$  wyznacza się wg zależności

$$\begin{aligned} u_x &= (a_{32} - a_{23})/2s\theta \\ u_y &= (a_{31} - a_{13})/2s\theta \\ u_z &= (a_{21} - a_{12})/2s\theta \end{aligned} \tag{3.14}$$

Gdy kąt  $\theta$  jest mały, wówczas liczniki i mianowniki wyrażeń (3.14) są małe i składowe wersora  $\mathbf{u}$  nie mogą być dokładnie wyznaczone. Aby poprawić dokładność obliczeń, zaleca się stosowanie następujących zależności:

$$\begin{aligned} u_x &= \text{sign}(a_{32} - a_{23}) \sqrt{(a_{11} - c\theta)/(1 - c\theta)} \\ u_y &= \text{sign}(a_{31} - a_{13}) \sqrt{(a_{22} - c\theta)/(1 - c\theta)} \\ u_z &= \text{sign}(a_{12} - a_{21}) \sqrt{(a_{33} - c\theta)/(1 - c\theta)} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Największa wartość składowych wersora  $\mathbf{u}$ , obliczonych wg wzorów (3.15), określa sposób obliczenia pozostałych. Jeśli  $u_x$  ma wartość największą, to pozostałe składowe oblicza się wg wzorów:

$$\begin{aligned} u_y &= (a_{21} + a_{12})/2u_x(1 - c\theta) \\ u_z &= (a_{31} + a_{13})/2u_x(1 - c\theta) \end{aligned} \tag{3.15a}$$

Jeśli  $u_y$  ma wartość największą, to

$$\begin{aligned} u_x &= (a_{21} + a_{12})/2u_y(1 - c\theta) \\ u_z &= (a_{32} + a_{23})/2u_y(1 - c\theta) \end{aligned} \tag{3.15b}$$

Jeśli  $u_z$  ma wartość największą, to

$$\begin{aligned} u_x &= (a_{31} + a_{13})/2u_z(1 - c\theta) \\ u_y &= (a_{32} + a_{23})/2u_z(1 - c\theta) \end{aligned} \tag{3.15c}$$

**Przykład 3.3.** Wyznaczyć kąt obrotu i wersor osi obrotu, które odpowiadają macierzy transformacji

$$A_{u,\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Najpierw wg wzorów na  $c\theta$  i  $s\theta$  oblicza się

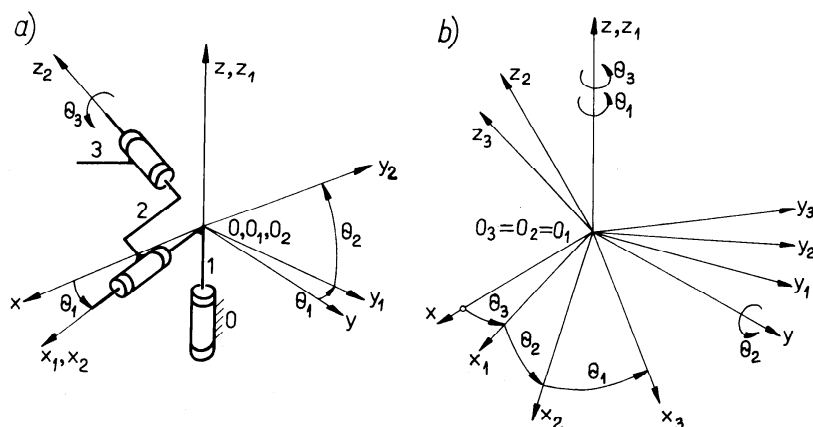
$$c\theta = (0+0+0-1)/2 = -1/2$$

$$s\theta = \sqrt{(-1+0)^2 + (0+1)^2 + (1-0)^2} / 2 = \sqrt{3}/2$$

Stąd  $\theta = \arctg(-\sqrt{3}) = 2\pi/3$ . Następnie wg wzorów (3.15) oblicza się

$$u_x = 1/\sqrt{3}, \quad u_y = 1/\sqrt{3}, \quad u_z = 1/\sqrt{3}$$

**Kąty Eulera** są często stosowane w równaniach dynamiki członów wykonujących ruch sferyczny, który może być opisany za pomocą trzech przemieszczeń kątowych:  $\theta_1$  – *precesji*,  $\theta_2$  – *nutacji*,  $\theta_3$  – *rotacji*. Na rys. 3.2a pokazano nieruchomy układ współrzędnych  $\{x \ y \ z\}$ , związany z podstawą 0, ruchomy układ współrzędnych  $\{x_1 \ y_1 \ z_1\}$ , związany z członem 1, który wykonuje obrót o kąt  $\theta_1$  wokół osi  $z_1$  oraz układ  $\{x_2 \ y_2 \ z_2\}$ , związany z członem 2, który wykonuje obrót o kąt  $\theta_2$  wokół osi  $x_1$ , względem członu 1. Końcowy obrót  $\theta_3$  wokół osi  $z_2$  jest wykonywany przez człon 3 względem członu 2. Jak w każdym przypadku kolejnych obrotów, ich kolejność jest istotna. W rozważanym przypadku można zauważyć (rys. 3.2b), że kolejność obrotów w układzie podstawy będzie odwrotna, tzn. najpierw obrót o kąt  $\theta_3$  wokół osi  $z$ , następnie obrót o kąt  $\theta_2$  wokół osi  $y$ , a w końcu obrót o kąt  $\theta_1$  wokół osi  $z$ .



Rys. 3.2. a) Otwarty łańcuch kinematyczny trójczłonowy, zastępujący przegub kulisty, zwymiarowany za pomocą kątów Eulera:  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ , b) przekształcenia układów współrzędnych przez obroty o kąty Eulera.

Macierz przekształcenia opisanego za pomocą kątów Eulera można wyznaczyć jako iloczyn trzech macierzy

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_E &= \mathbf{A}_{z,\theta_1} \mathbf{A}_{z,\theta_2} \mathbf{A}_{z,\theta_3} = \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Stąd

$$\mathbf{R}_E = \begin{bmatrix} s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3 & -c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 s\theta_3 & c\theta_1 s\theta_2 & 0 \\ s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3 & -s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3 & s\theta_1 s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 c\theta_3 & s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Często stosuje się inną sekwencję obrotów wokół osi  $x, y, z$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_E &= \mathbf{A}_{z,\theta_1} \mathbf{A}_{z,\theta_2} \mathbf{A}_{z,\theta_3} = \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ 0 & s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Stąd

$$\mathbf{R}_E = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_3 & c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3 & 0 \\ s\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_3 & s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_3 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Jest to pewien wariant przekształcenia Eulera, nazywany *przechylenie*, *pochylenie*, *skręcanie* (ang. *Roll*, *Pitch*, *Yaw*), najczęściej stosowany w opisach dynamiki pojazdów i samolotów.

**Współrzędne cylindryczne** (rys. 3.3a) są stosowane do określenia położenia członu w przestrzeni za pomocą trzech przemieszczeń:  $p_x$  – przesunięcia wzdłuż osi  $x$ ,  $\theta_z$  – obrotu wokół osi  $z$  oraz  $p_z$  – przesunięcia wzdłuż osi  $z$ , które mogą być zapisane w postaci macierzowej



$$\begin{aligned}
C(p_z, \theta, p_x) &= A_{(0, 0, p_z)} A_{(z, -\theta)} A_{(p_x, 0, 0)} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Stąd

$$C(p_z, \theta, p_x) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & p_x c\theta \\ s\theta & c\theta & 0 & p_x s\theta \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

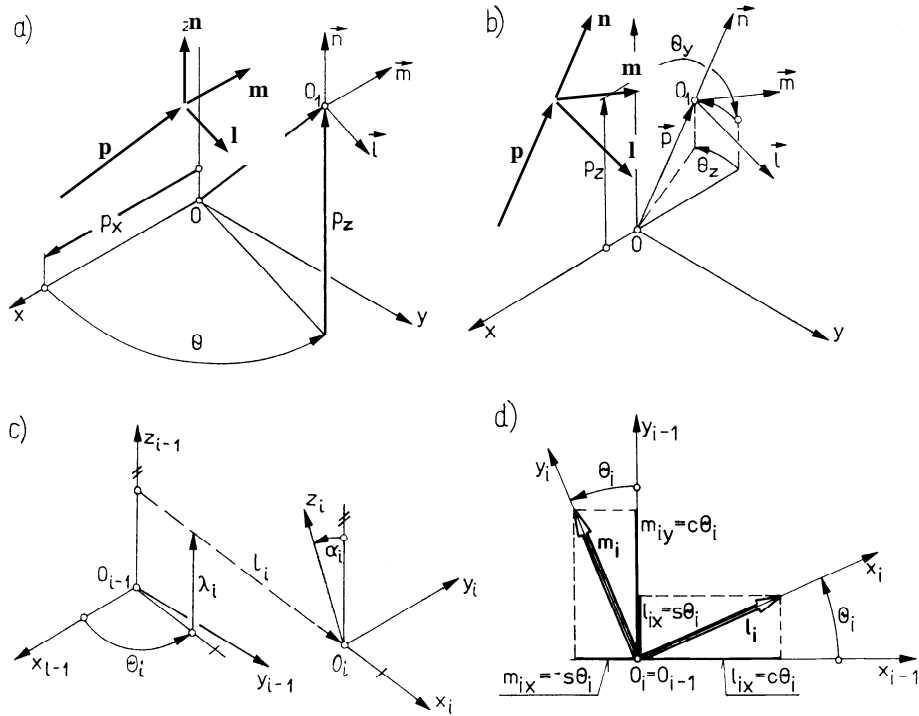
**Współrzędne sferyczne** są określane za pomocą sekwencji trzech ruchów:  $p_z$  – przesunięcia wzdłuż osi  $z$ ,  $\theta_y$  – obrotu wokół osi  $y$  oraz  $\theta_z$  – obrotu wokół osi  $z$

$$\begin{aligned}
S(\theta_z, \theta_y, p_z) &= A_{z, \theta_z} A_{y, \theta_y} A_{(0, 0, p_x)} = \\
&= \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Stąd

$$S(\theta_z, \theta_y, p_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z c\theta_y & -s\theta_z & c\theta_z s\theta_y & p_z c\theta_z s\theta_y \\ s\theta_z c\theta_y & c\theta_z & s\theta_z s\theta_y & p_z s\theta_z s\theta_y \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y & p_z c\theta_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

**Współrzędne Denavita-Hartenberga** (rys. 3.3c) są określone przez cztery parametry:  $\theta_i$  – obrót wokół osi  $z_{i-1}$ ,  $\lambda_i$  – przesunięcie wzdłuż osi  $z_{i-1}$ ,  $l_i$  – przesunięcie wzdłuż osi  $x_i$ ,  $\alpha_i$  – skręcenie wokół osi  $x_i$ . Dowolny człon  $i$  jest opisany przez dwa wymiary:  $l_i$  – długość członu i  $\alpha_i$  – kąt skręcenia członu. Połączenie ruchowe jest opisane przez dwa wymiary:  $\lambda_i$  – odsunięcie i  $\theta_i$  – kąt obrotu względnego członów.



Rys. 3.3. a) Współrzędne cylindryczne ( $p_x$ ,  $\theta$ ,  $p_z$ ), b) współrzędne sferyczne ( $p_z$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ ), c) współrzędne Denavita-Hartenberga ( $\theta_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $l_i$ ,  $\alpha_i$ ); d) przekształcenie wektorów  $l_i$  i  $m_i$  osi układu  $x_i y_i$  do układu  $x_{i-1} y_{i-1}$  przez obrót wokół osi  $z_i = z_{i-1}$  o kąt  $\theta_i$ .

Macierze przekształceń jednorodnych, odpowiadających wspomnianym parametrom, można przedstawić w postaci

$$A_{z_{i-1}, \theta_i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & s\theta_i & 0 & 0 \\ -s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{z_{i-1}, \lambda_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{x_i, a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{x_i, \alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & s\alpha_i & 0 \\ 0 & -s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przekształcenie z układu  $i-1$  do układu  $i$  opisuje iloczyn macierzy

$$A_{i-1, i} = A_{x_i, \alpha_i} A_{x_i, l_i} A_{z_{i-1}, \lambda_i} A_{z_{i-1}, \theta_i}$$

Stąd

$$\mathbf{A}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & s\theta_i & 0 & -l_i \\ -s\theta_i c\alpha_i & c\theta_i c\alpha_i & s\alpha_i & -\lambda_i s\alpha_i \\ s\theta_i s\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & c\alpha_i & -\lambda_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

W celu skrócenia zapisu zastosowano notację:  $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{i,i-1}$ .

W przypadku przekształcenia odwrotnego, tzn. z układu  $i$  do układu  $i - 1$ , stosuje się macierz odwrotną

$$\mathbf{A}_{i-1,i} = \mathbf{A}_{i,i-1}^{-1}$$

Stąd

$$\mathbf{A}_{i,i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & l_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & l_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & \lambda_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Uwaga: Zwrot przemieszczenia kątownego uważa się za dodatni, jeśli transformacja z układu  $i - 1$  do układu  $i$  jest zgodna z regułą śruby prawoskrętnej, tzn. dodatni zwrot kąta  $\theta_i$  jest zgodny z dodatnim zwrotem osi  $z_{i-1}$ , a kąta  $\alpha_i$  – ze zwrotem osi  $x_i$ .

## 3.4 Zadanie proste kinematyki

Zadanie proste kinematyki polega na obliczeniu pozycji i orientacji członu roboczego względem układu odniesienia podstawy dla danego zbioru współrzędnych konfiguracyjnych. Zadanie to można traktować jako odwzorowanie opisu położenia manipulatora w przestrzeni współrzędnych konfiguracyjnych na opis w przestrzeni współrzędnych kartezjańskich.

Pozycję punktu  $P_i$ , należącego do członu  $i$ , opisano w jego układzie odniesienia za pomocą wektora  $\mathbf{r}_{P_i,i} = [x_{P_i} \ y_{P_i} \ z_{P_i}]^T$ . Gdy punkt  $P_i$  pokrywa się z początkiem układu, tzn.  $P_i = O_i$ , wówczas

$$\mathbf{r}_{P_i,i} = \mathbf{r}_{O_i,i} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

Pozycja punktu  $P_i$  w układzie odniesienia podstawy 0 (globalnym) może być wyznaczona wg wzoru

$$\mathbf{r}_{P_i,O} = \mathbf{r}_{P_i} = \mathbf{T}_{i,O} \mathbf{r}_{P_i,i} \quad (3.22)$$

gdzie  $\mathbf{T}_{i,0}$  – macierz przekształcenia z układu  $i$  do układu 0, którą otrzymuje się jako iloczyn macierzy  $\mathbf{A}_i$ ,

$$\mathbf{T}_{i,0} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_i = \mathbf{T}_i \quad (3.23a)$$

Macierz  $\mathbf{T}_i$  można podzielić na:  $\mathbf{B}_i$  – macierz orientacji oraz  $\mathbf{p}_i$  – wektor pozycji

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i & \mathbf{p}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23b)$$

gdzie:

$$\mathbf{B}_i = [l_i \quad m_i \quad n_i] = \begin{bmatrix} l_{ix} & m_{ix} & n_{ix} \\ l_{iy} & m_{iy} & n_{iy} \\ l_{iz} & m_{iz} & n_{iz} \end{bmatrix} \quad (3.23c)$$

$$\mathbf{p}_i = [p_{ix} \quad p_{iy} \quad p_{iz}]^T \quad (3.23d)$$

Po zróżniczkowaniu zależności (3.22) względem czasu otrzymuje się prędkość i przyspieszenie punktu  $P_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{P_i} &= \sum_{j=1}^i \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \mathbf{r}_{P_i,i} \dot{q}_j \\ \mathbf{a}_{P_i} &= \sum_{j=1}^i \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \mathbf{r}_{P_i,i} \ddot{q}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^i \frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{r}_{P_i,i} \dot{q}_j \dot{q}_k \end{aligned} \quad (3.24)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j \mathbf{A}_j \dots \mathbf{A}_i, \quad \text{jeżeli } j \leq i \\ \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} &= 0, \quad \text{jeżeli } j > i \\ \frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j \mathbf{A}_j \dots \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{A}_k \dots \mathbf{A}_i, \quad \text{jeżeli } j < k \leq i \\ \frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j \mathbf{A}_j \dots \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{A}_k \dots \mathbf{A}_i, \quad \text{jeżeli } j < k \leq i \\ \frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j^2 \mathbf{A}_j \dots \mathbf{A}_i, \quad \text{jeżeli } j = k \leq i \\ \frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} &= 0, \quad \text{jeżeli } j > 1 \text{ oraz } k > 1 \end{aligned} \quad (3.25a)$$

przy czym – dla połączenia obrotowego

$$\mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{q}_j = \frac{d\theta_j}{dt} = \dot{\theta}_j \quad (3.25b)$$

– dla połączenia przesuwnego

$$\mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{q}_j = \frac{d\lambda_j}{dt} = \dot{\lambda}_j \quad (3.25c)$$

Przy uwzględnieniu zależności

$$\mathbf{A}'_j = d\mathbf{A}_j/dq_j = \mathbf{Q}_j \mathbf{A}_j$$

będzie

$$d\mathbf{T}_{k,0}/dq_j = \mathbf{T}_{j-1,0} \mathbf{Q}_j \mathbf{T}_{k,j-1}, \quad \text{dla } j \leq k \quad (3.26)$$

gdzie

$$\mathbf{T}_{k,j-1} = \mathbf{A}_j \dots \mathbf{A}_k = (\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{j-1})^{-1} (\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{j-1}) (\mathbf{A}_j \dots \mathbf{A}_k) = \mathbf{T}_{j-1,0}^{-1} \mathbf{T}_{k,0}$$

Zatem

$$d\mathbf{T}_{k,0}/dq_j = \mathbf{T}_{j-1,0} \mathbf{Q}_j \mathbf{T}_{j-1,0}^{-1} \mathbf{T}_{k,0} = \mathbf{Q}_j^* \mathbf{T}_{k,0} \quad (3.27)$$

gdzie:

$$\mathbf{Q}_j^* = \mathbf{T}_{j-1,0} \mathbf{Q}_j \mathbf{T}_{j-1,0}^{-1}, \quad \text{dla } j > 1 \quad (3.27a)$$

$$\mathbf{Q}_j^* = \mathbf{Q}_j, \quad \text{dla } j = 1$$

Podstawiając (3.27) do (3.25) otrzymuje się

$$\mathbf{v}_{Pk} = \sum_{j=1}^k \mathbf{Q}_j^* \mathbf{T}_{k,0} \dot{q}_j \mathbf{r}_{Pk,k} = \sum_{j=1}^k \mathbf{Q}_j^* \dot{q}_j \mathbf{r}_{Pk} \quad (3.28)$$

Stąd

$$\mathbf{v}_{Pk} = \mathbf{D}_k \mathbf{r}_{Pk} \quad (3.29)$$

gdzie  $\mathbf{D}_k$  – macierz operatorowa transformacji wektora pozycji punktu  $P_k$  członu  $k$  w wektor prędkości tego punktu.

Przyśpieszenie punktu  $P_k$  otrzymuje się przez różniczkowanie zależności (3.29)

$$\mathbf{a}_{pk} = d\mathbf{v}_{pk}/dt = \dot{\mathbf{D}}_k \mathbf{r}_{pk} + \mathbf{D}_k \mathbf{v}_{pk} \quad (3.30)$$

gdzie:

$$\dot{\mathbf{D}}_k = \sum_{j=1}^k (\dot{\mathbf{Q}}_j^* \dot{q}_j + \mathbf{Q}_j^* \ddot{q}_j) = \dot{\mathbf{D}}_{k-1} + \dot{\mathbf{Q}}_k^* \dot{q}_k + \mathbf{Q}_k^* \ddot{q}_k, \quad \text{dla } j > 1$$

$$\dot{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{Q}_1^* \ddot{q}_1$$

Wyrażenie na  $\dot{\mathbf{Q}}_k^*$  nie było wprowadzone wcześniej. W celu jego uzyskania zależność (3.27a) przekształca się do postaci

$$\mathbf{Q}_j^* \mathbf{T}_{j-1,0} = \mathbf{T}_{j-1,0} \mathbf{Q}_j$$

Stąd

$$\dot{\mathbf{Q}}_j^* = (\dot{\mathbf{T}}_{j-1,0} \mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_j^* \dot{\mathbf{T}}_{j-1,0}) \mathbf{T}_{j-1,0}^{-1} \quad (3.31)$$

przy czym

$$\dot{\mathbf{T}}_{k,0} = \left( \sum_{j=1}^k \mathbf{Q}_j^* \dot{q}_j \right) \mathbf{T}_{k,0} = \mathbf{D}_k \mathbf{T}_{k,0} \quad (3.32)$$

Po podstawieniu (3.32) do (3.31) otrzymuje się

$$\dot{\mathbf{Q}}_j^* = (\mathbf{D}_{j-1} \mathbf{T}_{j-1,0} \mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_j^* \mathbf{D}_{j-1} \mathbf{T}_{j-1,0}) \mathbf{T}_{j-1,0}^{-1}$$

Stąd

$$\dot{\mathbf{Q}}_j^* = \mathbf{D}_{j-1} \mathbf{Q}_j^* - \mathbf{Q}_j^* \mathbf{D}_{j-1} \quad (3.33)$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności wzór (3.30) na przyspieszenie punktu  $P_k$  przyjmie postać

$$\mathbf{a}_{pk} = \left( \sum_{j=1}^k \mathbf{Q}_j^* \ddot{q}_j + \dot{\mathbf{Q}}_j^* \dot{q}_j \right) \mathbf{r}_{pk} + \mathbf{D}_k \mathbf{v}_{pk} \quad (3.34)$$

Wektor prędkości kątowej członu  $k$  określa się w postaci

$$\boldsymbol{\omega}_k = \sum_{j=1}^k \mathbf{B}_{j-1,0} \dot{\theta}_j \mathbf{e}_j \quad (3.35)$$

gdzie  $\mathbf{B}_{j-1,0}$  – macierz ortogonalna obrotu układu  $j-1$  względem podstawy  $0$ , którą otrzymuje się z macierzy  $\mathbf{T}_{j-1,0}$ , określonej wzorem (3.23), przez odrzucenie ostatniego wiersza i kolumny. Wtedy

$$\mathbf{B}_{j-1,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{j-1} & \mathbf{m}_{j-1} & \mathbf{n}_{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{j-1,x} & m_{j-1,x} & n_{j-1,x} \\ l_{j-1,y} & m_{j-1,y} & n_{j-1,y} \\ l_{j-1,z} & m_{j-1,z} & n_{j-1,z} \end{bmatrix} \quad (3.35a)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{j-1} &= \begin{bmatrix} l_{j-1,x} & l_{j-1,y} & l_{j-1,z} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{m}_{j-1} &= \begin{bmatrix} m_{j-1,x} & m_{j-1,y} & m_{j-1,z} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{n}_{j-1} &= \begin{bmatrix} n_{j-1,x} & n_{j-1,y} & n_{j-1,z} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

wersory osi układu  $j-1$  określone względem układu  $0$ .

Rzuty wektora  $\boldsymbol{\omega}_k$  na osie układu współrzędnych, związanego z członem  $k$ , otrzymuje się przez transformacje

$$\boldsymbol{\omega}_{k,k} = \mathbf{B}_{0,k} \boldsymbol{\omega}_k = \sum_{j=1}^k \mathbf{B}_{j-1,k} \dot{\theta}_j \mathbf{e}_j \quad (3.36)$$

Zależność (3.35) można przedstawić w postaci

$$\boldsymbol{\omega}_k = \boldsymbol{\omega}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1,0} \dot{\theta}_k \mathbf{e}_k \quad (3.37)$$

Różniczkując zależność (3.37) względem czasu otrzymuje się przyspieszenie kątowe członu  $k$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_k = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{k,k-1} + \boldsymbol{\omega}_k \times \boldsymbol{\omega}_{k,k-1}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\omega}_{k,k-1} = \dot{\theta}_k \mathbf{e}_k$$

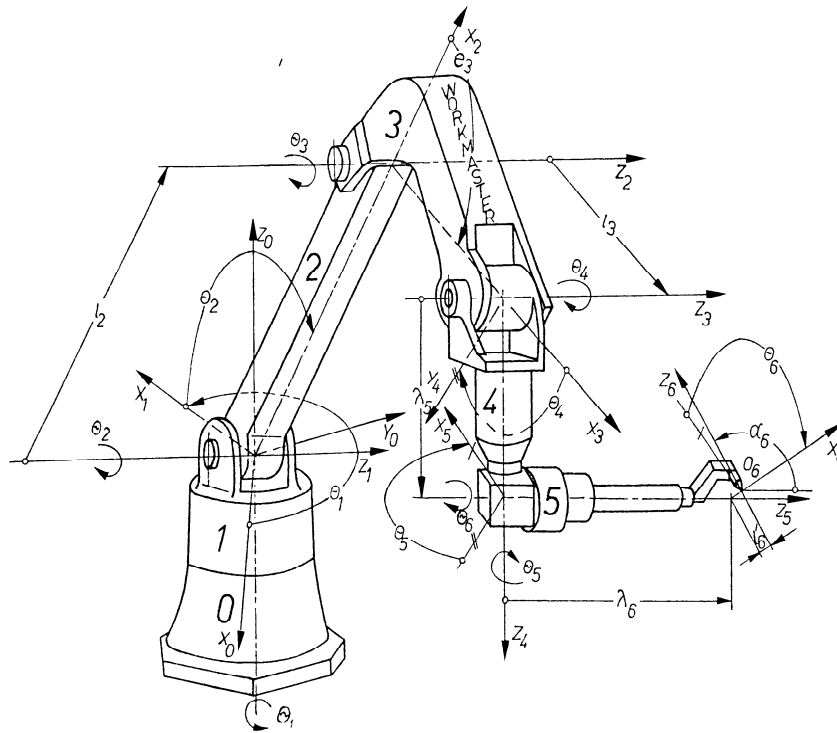
**Przykład 3.3.** Manipulator o sześciu połączeniach obrotowych, pokazany na rys. 3.4, został opisany za pomocą następujących parametrów

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \pi/2, & 0, & 0, & -\pi/2, & \pi/2, & \pi/2 \\ l_i &= 0, & l_2, & l_3, & 0, & 0, & l_6 \\ \lambda_i &= 0, & 0, & 0, & 0, & \lambda_5, & \lambda_6 \end{aligned}$$

Zadanie polega na wyznaczeniu pozycji, prędkości i przyspieszenia punktu  $P_6 = O_6$ , tzn. punktu  $P_6$  pokrywającego się z  $O_6$  – początku układu odniesienia członu 6.

Rozwiązanie zadania rozpoczyna się od zapisania macierzy  $\mathbf{A}_i$  wg wzoru (3.21), przy uwzględnieniu powyższych danych parametrów

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_3 c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & l_3 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_4 &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_5 &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_6 &= \begin{bmatrix} c\theta_6 & 0 & s\theta_6 & l_6 c\theta_6 \\ s\theta_6 & 0 & -c\theta_6 & l_6 s\theta_6 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$



Rys. 3.4. Schemat konstrukcyjny manipulatora o sześciu połączeniach obrotowych ( ASEA-WORKMASTER ), zwymiarowany za pomocą współrzędnych Denavita-Hartenberga:  $\alpha_i = \pi/2, 0, 0, -\pi/2, \pi/2, \pi/2$ ;  $l_i = 0, l_2, l_3, 0, 0, l_6$ ;  $\lambda_i = 0, 0, 0, 0, \lambda_5, \lambda_6$ . (Źródło: Knapczyk, 1990)

Pozycję punktu  $P_6$  w układzie odniesienia podstawy wyznacza się wg wzoru (3.22), który w rozważanym przypadku przyjmie postać

$$\mathbf{r}_{P6,0} = \mathbf{T}_6 \mathbf{r}_{P6,6}, \quad \text{gdzie } \mathbf{r}_{P6,6} = [0001]^T$$



$$\mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x & p_x \\ l_y & m_y & n_y & p_y \\ l_z & m_z & n_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} l_x &= c\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) c\theta_5 c\theta_6 - c\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) s\theta_6 - s\theta_1 s\theta_5 c\theta_6 \\ l_y &= s\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) s\theta_6 + c\theta_1 s\theta_5 c\theta_6 \\ l_z &= s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) c\theta_5 c\theta_6 + c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) s\theta_6 \\ m_x &= s\theta_1 c\theta_5 + c\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) s\theta_5 \\ m_y &= s\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) s\theta_5 - c\theta_1 c\theta_5 \\ m_z &= s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) s\theta_5 \\ n_x &= c\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) c\theta_6 - s\theta_1 s\theta_5 s\theta_6 \\ n_y &= s\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) c\theta_5 s\theta_6 + s\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) c\theta_6 + c\theta_1 s\theta_5 s\theta_6 \\ n_z &= s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) c\theta_5 s\theta_6 - c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) c\theta_6 \\ p_x &= l_2 c\theta_1 c\theta_2 + l_3 c\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3) - \lambda_5 c\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + \lambda_6 [s\theta_1 c\theta_5 + \\ &\quad - c\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) s\theta_5] + l_6 [c\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_1 s\theta_2 c\theta_6 - \\ &\quad + c\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) s\theta_6] \\ p_y &= l_2 s\theta_1 c\theta_2 + l_3 s\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3) - \lambda_5 s\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + \lambda_6 [-c\theta_1 c\theta_5 + \\ &\quad + s\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) s\theta_5] + l_6 [s\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_1 s\theta_5 c\theta_6 + \\ &\quad - s\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) s\theta_6] \\ p_z &= l_2 s\theta_2 + l_3 s(\theta_2 + \theta_3) + \lambda_5 c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + \lambda_6 s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) s\theta_5 + \\ &\quad + l_6 [s(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) c\theta_5 c\theta_6 + c(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) s\theta_6] \end{aligned} \quad (3.30)$$

Współrzędne punktu  $P_6$  dla zerowego położenia manipulatora otrzymuje się, podstawiając do zależności (3.30) wartości  $\theta_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Stąd

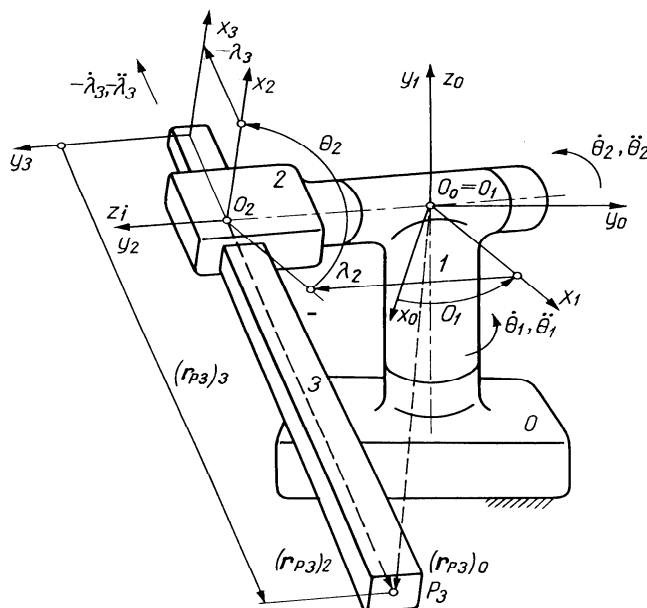
$$p_x = l_2 + l_3 + l_6, \quad p_y = -\lambda_6, \quad p_z = \lambda_5$$

Prędkość i przyspieszenie punktu  $P_6$  można wyznaczyć przez różniczkowanie względem czasu zależności (3.30) na współrzędne tego punktu, rozpatrując je jako funkcje złożone, np.  $p_x = F[\theta_i(t)]$ .

**Przykład 3.4.** Na rysunku 3.5 pokazano układ pozycjonowania manipulatora typu stanfordzkiego, obejmujący tylko trzy pierwsze człony o wymiarach:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ ,  $l_1 = l_2 = \lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0,05$  m.

Mając dane przemieszczenia:  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\lambda_3$  oraz prędkości i przyspieszenia w połączeniach ruchowych, należy wyznaczyć współrzędne punktu  $P_3$  należącego do członu 3, jego prędkość, przyspieszenie oraz prędkości kątowe członów 2 i 3.

Według wzoru (3.21) określono macierze przekształceń  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), które po uwzględnieniu danych wymiarów są następujące:



Rys. 3.5. Schemat konstrukcyjny ramienia manipulatora stanfordzkiego, zwymiarowany za pomocą współrzędnych Denavita-Hartenberga:  $\alpha_i = \pi/2, \pi/2, 0$ ;  $l_i = 0, 0, 0$ ;  $\lambda_i = 0, \lambda_2, \lambda_3$ ;  $\theta_i$ . Oznaczenia:  $r_{P3,0}$  – wektor pozycji punktu  $P_3$  względem układu podstawy,  $r_{P3,3}$  – wektor pozycji punktu  $P_3$  względem układu członu 3. (Źródło: Knapczyk, 1990)

$$A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz położenia i orientacji członu 3 względem podstawy będzie

$$T_3 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 & c\theta_1 s\theta_2 & \lambda_3 c\theta_1 s\theta_2 + \lambda_2 s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 & s\theta_1 s\theta_2 & \lambda_3 s\theta_1 s\theta_2 + \lambda_2 c\theta_1 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & -\lambda_3 c\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wektor pozycji punktu  $P_3$  względem początku układu podstawy  $0$  określono wg wzoru (3.22):  $r_{P3} = T_{3,0} r_{P3,3}$ , gdzie  $r_{P3,3} = [0 \ 0 \ z_{P3} \ 1]^T$ , przy czym  $x_{P3} = y_{P3} = 0$ , ponieważ punkt  $P_3$  leży na osi  $z_3$ . Stąd

$$\mathbf{r}_{P_3} = \begin{bmatrix} (z_{P_3} + \lambda_3)c\theta_1 s\theta_2 + \lambda_2 s\theta_1 \\ (z_{P_3} + \lambda_3)s\theta_1 s\theta_2 - \lambda_2 c\theta_1 \\ -(z_{P_3} + \lambda_3)c\theta_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Według wzoru (3.27) określono macierze  $\mathbf{Q}_j^*$ , otrzymując

$$\mathbf{Q}_1^* = \mathbf{Q}_1$$

$$\mathbf{Q}_1^* = \mathbf{T}_{1,0} \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{1,0}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & -\dot{\theta}_2 c\theta_1 & \dot{\lambda}_3 c\theta_1 s\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & -\dot{\theta}_2 s\theta_1 & \dot{\lambda}_3 s\theta_1 s\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 c\theta_1 & \dot{\theta}_2 s\theta_1 & 0 & -\dot{\lambda}_3 c\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prędkość punktu  $P_3$  wyznaczono wg wzoru (3.29)

$$\mathbf{v}_{P_3} = \mathbf{D}_3 \mathbf{r}_{P_3} = \begin{bmatrix} (z_{P_3} + \lambda_3)(-\dot{\theta}_1 s\theta_1 s\theta_2 + \dot{\theta}_2 c\theta_1 c\theta_2) + \dot{\lambda}_3 c\theta_1 s\theta_2 + \lambda_2 \dot{\theta}_1 c\theta_1 \\ (z_{P_3} + \lambda_3)(\dot{\theta}_1 c\theta_1 s\theta_2 + \dot{\theta}_2 s\theta_1 c\theta_2) + \dot{\lambda}_3 s\theta_1 s\theta_2 + \lambda_2 \dot{\theta}_1 s\theta_1 \\ (z_{P_3} + \lambda_3)\dot{\theta}_2 s\theta_2 - \dot{\lambda}_3 c\theta_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przyśpieszenie punktu  $P_3$  wyznaczono wg wzoru (3.30), przy czym wpieryw wyznaczono  $\dot{\mathbf{D}}_3$ , różniczkując względem czasu  $\mathbf{D}_3$

$$\dot{\mathbf{D}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\theta}_1 & (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s\theta_1 - \ddot{\theta}_2 c\theta_1) & \ddot{\lambda}_3 c\theta_1 s\theta_2 + \dot{\lambda}_3 (-\dot{\theta}_1 s\theta_1 s\theta_2 + \dot{\theta}_2 c\theta_1 c\theta_2) \\ \ddot{\theta}_1 & 0 & (-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c\theta_1 - \ddot{\theta}_2 s\theta_1) & \ddot{\lambda}_3 s\theta_1 s\theta_2 + \dot{\lambda}_3 (\dot{\theta}_1 c\theta_1 s\theta_2 + \dot{\theta}_2 s\theta_1 c\theta_2) \\ a_{31} & a_{32} & 0 & -\ddot{\lambda}_3 c\theta_2 + \dot{\lambda}_3 \dot{\theta}_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie  $a_{31} = -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s\theta_1 + \ddot{\theta}_2 c\theta_1$ ,  $a_{32} = \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c\theta_1 + \ddot{\theta}_2 s\theta_1$

Podstawiając do wzoru (3.30) macierze  $\mathbf{D}_3, \dot{\mathbf{D}}_3$  oraz wektory  $\mathbf{r}_{P_3}$  i  $\mathbf{v}_{P_3}$ , otrzymano wektor przyśpieszenia punktu  $P_3$  w postaci

$$\mathbf{a}_{P_3} = \begin{bmatrix} a_{P_3x} & a_{P_3y} & a_{P_3z} & 1 \end{bmatrix}^T$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 a_{P3x} &= (z_{P3} + \lambda_3) \left( -\ddot{\theta}_1 s\theta_1 s\theta_2 + \ddot{\theta}_2 c\theta_1 c\theta_2 - \dot{\theta}_1^2 c\theta_1 s\theta_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s\theta_1 c\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 c\theta_1 s\theta_2 \right) + \\
 &\quad - 2\dot{\lambda}_3 \left( \dot{\theta}_1 s\theta_1 s\theta_2 - \dot{\theta}_2 c\theta_1 c\theta_2 \right) + \ddot{\lambda}_3 c\theta_1 s\theta_2 + \lambda_2 \left( \ddot{\theta}_1 c\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 s\theta_1 \right) \\
 a_{P3y} &= (z_{P3} + \lambda_3) \left( \ddot{\theta}_1 c\theta_1 s\theta_2 + \ddot{\theta}_2 s\theta_1 c\theta_2 - \dot{\theta}_1^2 s\theta_1 s\theta_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c\theta_1 c\theta_2 - \dot{\theta}_2^2 s\theta_1 s\theta_2 \right) + \\
 &\quad + 2\dot{\lambda}_3 \left( \dot{\theta}_1 c\theta_1 s\theta_2 + \dot{\theta}_2 s\theta_1 c\theta_2 \right) + \ddot{\lambda}_3 s\theta_1 s\theta_2 + \lambda_2 \left( \ddot{\theta}_1 s\theta_1 + \dot{\theta}_1^2 c\theta_1 \right) \\
 a_{P3z} &= (z_{P3} + \lambda_3) \left( \ddot{\theta}_2 s\theta_2 + \dot{\theta}_2^2 c\theta_2 \right) + 2\dot{\lambda}_3 \dot{\theta}_2 s\theta_2 + \ddot{\lambda}_3 c\theta_2
 \end{aligned}$$

Mając dostatecznie gęstą tablicę położenia punktu  $P_3$  jako funkcji czasu, można za pomocą procedur interpolacji numerycznych wyznaczyć prędkość i przyspieszenie tego punktu. Jeśli wymagana dokładność jest rzędu kilku procent, to wystarczą najprostsze wzory. Praktyczny walor tej uwagi jest tym większy, im manipulator jest bardziej skomplikowany.

Wektory prędkości kątowych członów 2 i 3 wyznaczono wg wzorów (3.36) i (3.37), otrzymując

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_2 &= \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{B}_1 \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 s\theta_1 \\ -\dot{\theta}_2 c\theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega}_3 \\
 \boldsymbol{\omega}_{2,2} &= \mathbf{B}_{2,0}^{-1} \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 & s\theta_2 \\ s\theta_1 & -c\theta_1 & 0 \\ c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 & -c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 s\theta_1 \\ -\dot{\theta}_2 c\theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 s\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_1 c\theta_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

gdzie  $\mathbf{B}_{2,0}^{-1} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$

Pewne ułatwienie programowania obliczeń uzyskuje się stosując wzory rekurencyjne

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{Pi,i-1} &= \mathbf{A}_i \mathbf{r}_{Pi,i} \\
 \mathbf{r}_{Pi,i-2} &= \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{r}_{Pi,i-1} \\
 &\dots\dots\dots \\
 \mathbf{r}_{Pi,0} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{r}_{Pi,1}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Podobnie, zamiast obliczać wektory prędkości i przyspieszeń wg wzorów (3.29)÷(3.30), można stosować wzory rekurencyjne

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{Pi,i-1} &= \mathbf{Q}_i \mathbf{r}_{Pi,i-1} \\
\mathbf{v}_{Pi,i-2} &= \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{r}_{Pi,i-2} + \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{v}_{Pi,i-1} \\
&\dots\dots\dots \\
\mathbf{v}_{Pi,0} &= \mathbf{Q}_1 \mathbf{r}_{Pi,0} + \mathbf{A}_1 \mathbf{v}_{Pi,1}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{Pi,i-1} &= \mathbf{Q}_i (\ddot{q}_i + \dot{q}_i^2) \mathbf{r}_{Pi,i-1} \\
\mathbf{a}_{Pi,i-2} &= (\mathbf{Q}_{i-1} \ddot{q}_{i-1} + \mathbf{Q}_{i-1}^2 \dot{q}_{i-1}^2) \mathbf{r}_{Pi,i-2} + \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{a}_{Pi,i-1} + \\
&\quad + 2\mathbf{Q}_{i-1} \dot{q}_{i-1} \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{v}_{Pi,i-1} \\
&\dots\dots\dots \\
\mathbf{a}_{Pi,0} &= (\mathbf{Q}_1 \ddot{q}_1 + \mathbf{Q}_1^2 \dot{q}_1^2) \mathbf{r}_{Pi,0} + \mathbf{A}_1 \mathbf{a}_{Pi,1} + 2\mathbf{Q}_1 \dot{q}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{v}_{Pi,1}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

gdzie  $\mathbf{Q}_i$ ,  $\dot{q}_i$ ,  $\ddot{q}_i$  są określone wzorami (3.25b, 3.25c)

**Macierz jacobianowa** (jacobian) jest wielowymiarową postacią pochodnej funkcji wielu zmiennych. Na przykład pozycję i orientację członu roboczego względem podstawy manipulatora określa wektor współrzędnych kartezjańskich

$$\mathbf{w} = [p_x \ p_y \ p_z \ \varphi_x \ \varphi_y \ \varphi_z]^T \tag{3.34}$$

gdzie:  $p_x \ p_y \ p_z$  – współrzędne kartezjańskie punktu członu roboczego;  
 $\varphi_x \ \varphi_y \ \varphi_z$  – współrzędne kątowej orientacji członu roboczego, np. kąty Eulera.  
Konfigurację manipulatora określa wektor współrzędnych konfiguracyjnych

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T \tag{3.35}$$

gdzie:  $n$  – ruchliwość manipulatora,  $T$  – transponowanie.

Zależność między wektorami  $\mathbf{w}$  i  $\mathbf{q}$

$$\mathbf{w} = F(\mathbf{q}) \tag{3.36}$$

można zróżniczkować względem czasu i otrzymać zależność między prędkością członu roboczego i prędkościami względnymi w połączeniach ruchowych

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{3.37}$$

gdzie  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  – macierz jacobianowa funkcji  $F(\mathbf{q})$ . Elementami macierzy są pochodne cząstkowe współrzędnych kartezjańskich względem współrzędnych konfiguracyjnych.

Rząd macierzy jacobianowej jest określony przez największą liczbę liniowo niezależnych wierszy i kolumn, równą liczbie stopni swobody członu roboczego.

Powierzchnia jacobianowa jest miejscem geometrycznym tych punktów przestrzeni roboczej, w których macierz jacobianowa jest osobliwa. Środek kiści manipulatora, leżący na powierzchni jacobianowej, musi poruszać się w płaszczyźnie stycznej do tej powierzchni. Powierzchnie jacobianowe mogą leżeć na granicy przestrzeni roboczej lub wewnątrz tej przestrzeni.

Jeśli  $q_1, q_2$  i  $q_3$  są uogólnionymi współrzędnymi trzech pierwszych połączeń ruchowym, a  $\mathbf{p}$  jest wektorem położenia środka orientacji (kiści), to

$$\begin{bmatrix} dp_{jx} \\ dp_{jy} \\ dp_{jz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{jx}}{\partial q_1} & \frac{\partial p_{jx}}{\partial q_2} & \frac{\partial p_{jx}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial p_{jy}}{\partial q_1} & \frac{\partial p_{jy}}{\partial q_2} & \frac{\partial p_{jy}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial p_{jz}}{\partial q_1} & \frac{\partial p_{jz}}{\partial q_2} & \frac{\partial p_{jz}}{\partial q_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

gdzie

$$\mathbf{p}_j = p_{jx}\mathbf{i} + p_{jy}\mathbf{j} + p_{jz}\mathbf{k}$$

Jeśli połączenie jest obrotowe, to  $q_k = \theta_k$ ; jeśli połączenie jest przesuwne, to  $q_k = \lambda_k$ .

Środek orientacji jest w położeniu osobliwym tylko wówczas, gdy wyznacznik macierzy jacobianowej jest równy zero. Ponieważ wyznacznik macierzy jacobianowej jest równy wyznacznikowi macierzy transponowanej, zatem warunek osobliwości można zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial p_{jx}}{\partial q_1} & \frac{\partial p_{jy}}{\partial q_1} & \frac{\partial p_{jz}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial p_{jx}}{\partial q_2} & \frac{\partial p_{jy}}{\partial q_2} & \frac{\partial p_{jz}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial p_{jx}}{\partial q_3} & \frac{\partial p_{jy}}{\partial q_3} & \frac{\partial p_{jz}}{\partial q_3} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

Równanie (3.39) może być przedstawione w postaci iloczynu mieszanego trzech wektorów

$$\frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial q_1} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial q_2} \times \frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial q_3} \right) = 0 \quad (3.40)$$

gdzie  $\frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial q_i}$  oznacza przemieszczenie końca wektora  $\mathbf{p}_j$ , wywołane nieskończenie

małym przemieszczeniem w  $i$ -tym połączeniu ruchowym, przy czym:

– dla połączenia przesuwnego

$$\frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial q_i} = \mathbf{e}_{ij} \quad (3.41)$$

– dla połączenia obrotowego

$$\frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial q_i} = \mathbf{e}_{ij} \times (\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_{ij}) \quad (3.42)$$

gdzie:  $\mathbf{e}_{ij}$  – wersor osi  $i$ -tego połączenia ruchowego w  $j$ -tym położeniu,

$\mathbf{r}_{ij}$  – wektor pozycji osi  $i$ -tego połączenia ruchowego w  $j$ -tym położeniu.

Dla regionalnej struktury typu  $OOO$  równanie (3.40) przy uwzględnieniu zależności (3.42) przyjmuje postać

$$\left[ \mathbf{e}_{1j} \times (\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_{1j}) \right] \cdot \left\{ \left[ \mathbf{e}_{2j} \times (\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_{2j}) \right] \times \left[ \mathbf{e}_{3j} \times (\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_{3j}) \right] \right\} = 0 \quad (3.43)$$

Z równania (3.43) wynika, że łańcuch kinematyczny z połączeniami ruchowymi  $OOO$  jest w położeniu osobliwym wówczas, gdy wersor  $\mathbf{e}_2$  jest równoległy do wektora  $(\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_{2j})$ , tzn. gdy koniec wektora  $\mathbf{p}_j$  leży na osi wersora  $\mathbf{e}_2$ .

Równanie (3.40) oznacza, że w położeniu osobliwym trzy wektory  $\frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial q_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ )

leżą w jednej płaszczyźnie, a osie trzech wersorów  $\mathbf{e}_i$  przecinają tę samą prostą, która jest krawędzią przecięcia trzech płaszczyzn, zawierających po trzy pary wektorów  $\mathbf{e}_i$  i  $(\mathbf{p}_j - \mathbf{r}_{ij})$ .

W celu uproszczenia konstrukcji manipulatora przyjmuje się równoległe lub prostopadłe usytuowanie osi kolejnych połączeń ruchowych. Gdy  $n > 3$ , wówczas manipulator może zmieniać pozycję (częściowo) i orientację (częściowo) członu roboczego. Dla uproszczenia sterowania rozdziela się ruchy pozycjonowania i orientowania. Jeśli orientacja jest funkcją  $n$  zmiennych ( $1 \leq n' \leq 3$ ), wówczas  $n$  połączeń ruchowych powinno być przegubami obrotowymi o osiach przecinających się w punkcie usytuowanym na członie roboczym. Gdy  $n = 4$  ( $n' = 1, 2, 3$ ), wówczas manipulator powinien mieć co najmniej jedno połączenie obrotowe przy członie roboczym. Gdy  $n = 5$  ( $n' = 2, 3$ ), wówczas manipulator powinien mieć co najmniej dwa połączenia obrotowe o osiach przecinających się. Gdy  $n = 6$  ( $n' = 3$ ), wówczas manipulator powinien mieć trzy ostatnie połączenia obrotowe o osiach przecinających się w jednym punkcie.

Powierzchnię jacobianową można opisać analitycznie, przyjmując wartości dwóch zmiennych  $q_i$  i obliczając wartość trzeciej zmiennej z równania (3.43). Jeśli pierwsze połączenie ruchowe (przy podstawie) jest przegubem obrotowym, to powierzchnia jacobianowa jest powierzchnią obrotową. Zatem można przyjąć  $q_1 = 0$ . Jeśli pierwsze połączenie ruchowe jest parą przesuwną, to przyjmując dowolnie wartości jednej z dwóch zmiennych  $q_2$  lub  $q_3$ , można obliczyć pozostałą z równania (3.43).

# 4. Zadanie odwrotne kinematyki manipulatora i planowanie trajektorii

## 4.1 Zadanie odwrotne kinematyki

Zadanie odwrotne kinematyki manipulatora polega na wyznaczeniu wszystkich możliwych zbiorów wartości przemieszczeń kątowych i liniowych (współrzędnych konfiguracyjnych) w połączeniach ruchowych, które umożliwią manipulatorowi osiągnięcie zadanych pozycji i/lub orientacji członu roboczego (chwytaka lub narzędzia). Jest to podstawowe zadanie programowania i sterowania ruchu manipulatora, gdy trzeba znaleźć, jak poszczególne współrzędne konfiguracyjne powinny zmieniać się w czasie, aby zrealizować pożądaną ruch członu roboczego.

Na przykład w najprostszym zadaniu pozycjonowania – wziąć i położyć (ang. *take and place*) dane są początkowe i końcowe położenie członu roboczego oraz czas potrzebny na wykonanie przemieszczenia między tymi położeniami. Rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki umożliwia określenie wartości współrzędnych konfiguracyjnych, odpowiadających tym położeniom.

Dla niektórych manipulatorów o sześciu i pięciu stopniach swobody można wyznaczyć rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki w postaci jawnej. Warunkiem wystarczającym istnienia rozwiązania w postaci jawnej jest to, aby osie trzech kolejnych połączeń ruchowych przecinały się w jednym punkcie.

Stosowane są trzy metody rozwiązania zadania odwrotnego: macierzowa, wektorowa i numeryczna. W *metodzie macierzowej* stosuje się równania macierzowe przekształceń jednorodnych, zapisane w notacji Denavita-Hartenberga, w *metodzie wektorowej* – równanie zamknięcia wieloboku wektorowego i równanie o trzech wersorach, a w *metodzie numerycznej* – procedurę Newtona-Raphsona lub inne.

### 4.1.1 Metoda macierzowa

Jak podano poprzednio, jeśli pozycja i orientacja  $i$ -tego członu manipulatora są dane, to dana jest macierz  $T_{i,0}$  – macierz położenia tego członu względem układu odniesienia podstawy  $0$ .

$$T_i = T_{i,0} = \begin{bmatrix} l_i & m_i & n_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$



gdzie

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} l_{i,x} & m_{i,x} & n_{i,x} \\ l_{i,y} & m_{i,y} & n_{i,y} \\ l_{i,z} & m_{i,z} & n_{i,z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{i,x} \\ p_{i,y} \\ p_{i,z} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki polega na wyznaczeniu wartości zmiennych konfiguracyjnych, które spełniają równanie macierzowe

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_i = \mathbf{T}_i \quad (4.2)$$

Wektor pozycji początku układu członu ( $i-1$ ) względem tego układu określa się jako wektor zerowy

$$\mathbf{p}_{i-1,i-1} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (4.3a)$$

natomiast względem układu podstawy  $0$  wektor ten określa się wg zależności

$$\mathbf{p}_{i-1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{p}_{i-1,i-1} \quad (4.3b)$$

Uwzględniając równanie (4.2), zależność (4.3b) można przedstawić w postaci

$$\mathbf{p}_{i-1} = \mathbf{T}_i \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{p}_{i-1,i-1} \quad (4.3c)$$

Stąd, przy uwzględnieniu zależności (3.13), otrzymuje się

$$\mathbf{p}_{i-1} = \mathbf{p}_i + \mathbf{l}_i l_i - (\mathbf{m}_i s \alpha_i + \mathbf{n}_i c \alpha_i) \lambda_i \quad (4.3d)$$

Zależność (4.3d) podstawia się w miejsce lewej strony równania (4.3b), a otrzymane równanie mnoży się z lewej przez macierz  $\mathbf{A}_1^{-1}$  i otrzymuje następujące równanie

$$\mathbf{A}_1^{-1} [\mathbf{p}_i + \mathbf{l}_i l_i - (\mathbf{m}_i s \alpha_i + \mathbf{n}_i c \alpha_i) \lambda_i] = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \dots \mathbf{A}_i \mathbf{p}_{i-1,i-1} \quad (4.3e)$$

Z równania (4.3e) można wyznaczyć wartości trzech zmiennych konfiguracyjnych, które odpowiadają danym:  $\mathbf{p}_i$  – wektorowi pozycji i  $\mathbf{B}_i$  – macierzy orientacji.

Pozostałe niewiadome wartości zmiennych konfiguracyjnych można wyznaczyć za pomocą równania orientacji członu ( $i-1$ ) względem podstawy  $0$

$$\mathbf{n}_{i-1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{n}_{i-1,i-1} \quad (4.4a)$$

gdzie wersor  $\mathbf{n}_{i-1}$  jest określony względem układu odniesienia podstawy, natomiast

$$\mathbf{n}_{i-1,i-1} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \quad (4.4b)$$

Wersor  $\mathbf{n}_{i-1}$  można wyznaczyć z zależności

$$\mathbf{n}_{i-1} = \mathbf{T}_i \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{n}_{i-1,i-1} \quad (4.4c)$$

z której otrzymuje się

$$\mathbf{n}_{i-1} = \mathbf{m}_i s\alpha_i + \mathbf{n}_i c\alpha_i \quad (4.4d)$$

Zatem, mając dane wersory  $\mathbf{m}_i$  i  $\mathbf{n}_i$   $i$ -tego członu, za pomocą zależności (4.4d) można wyznaczyć wersor  $\mathbf{n}_{i-1}$  osi  $z_{i-1}$  układu odniesienia członu ( $i-1$ ).

Równanie (4.4a) można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i-3}^{-1} \dots \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{n}_{i-1} &= \mathbf{A}_{i-2} \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{n}_{i-1,i-1} \\ \mathbf{A}_{i-2}^{-1} \dots \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{n}_{i-1} &= \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{n}_{i-1,i-1} \end{aligned} \quad (4.4e)$$

Z równań macierzowych (4.4e) można wyprowadzić odpowiednie równania, zawierające pozostałe niewiadome zmienne konfiguracyjne. Równania te można sprowadzić do postaci typowych równań trygonometrycznych. Rozróżnia się sześć typowych równań:

$$1. \quad A c\theta + B s\theta = D \quad (4.5a)$$

gdzie  $A, B, D$  – stałe. Jeśli  $D = 0$ , to otrzymuje się dwa rozwiązania:

$$\theta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{B \pm \sqrt{A^2 + B^2}}{A}$$

Jeśli  $D \neq 0$  oraz  $A^2 + B^2 > D^2$ , to otrzymuje się również dwa rozwiązania:

$$\theta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{B \pm \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}}{A + D}$$

$$2. \quad s\theta = D_1, \quad c\theta = D_2 \quad (4.5b)$$

gdzie:  $D_1$  i  $D_2$  – stałe.

Równanie (4.5b) ma tylko jedno rozwiązanie:

$$\theta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{D_1}{1 + D_2}$$

$$3. \quad X s\theta = D_1, \quad X c\theta = D_2 \quad (4.5c)$$

gdzie:  $X$  – zmienna,  $D_1$  i  $D_2$  – stałe. Tutaj jest tylko jedno rozwiązanie

$$\begin{aligned} \theta &= \operatorname{Atan} 2(D_1, D_2), & \text{jeśli } X > 0 \\ \theta &= \theta + \pi, & \text{jeśli } X < 0 \end{aligned}$$

Gdzie  $\operatorname{Atan} 2(y, x)$  jest dwuargumentową funkcją arcus tangens, która oblicza wartość  $\operatorname{arctg}(y, x)$  oraz uwzględnia znaki, zarówno przy  $x$  jak i  $y$ , w celu określenia ćwiartki kąta pełnego, w której znajduje się wyznaczany kąt.

$$4. \quad A c\theta_{ij} + B c\theta_i = D_1, \quad A s\theta_{ij} + B s\theta_i = D_2 \quad (4.5d)$$

gdzie:  $\theta_{ij} = \theta_i + \theta_j$ ;  $A, B, D_1$  i  $D_2$  – stałe. Podnosząc do kwadratu oba równania i dodając stronami, otrzymuje się dwa rozwiązania na  $\theta_j$

$$\theta_j = \text{Atan } 2\left(\pm\sqrt{1-K^2}, K\right)$$

gdzie  $K = (D_1^2 + D_2^2 - A^2 - B^2)/2AB$

Następnie wyznacza się  $\theta_i$  wg wzoru

$$\theta_i = \text{Atan } 2(K_1, K_2)$$

gdzie:  $K_1 = D_2(Ac\theta_j + B) - D_1(As\theta_j)$ ,  $K_2 = D_1(Ac\theta_j + B) - D_2(As\theta_j)$

$$\begin{aligned} 5. \quad A s\theta_{ij} + B c\theta_{ij} + D c\theta_i &= F_1 \\ A c\theta_{ij} + B s\theta_{ij} + D s\theta_i &= F_2 \end{aligned} \quad (4.5e)$$

gdzie:  $A, B, D, F_1, F_2$  – stałe. Powyższy układ dwóch równań można zredukować do jednego równania

$$F_1 c\theta_i + F_2 s\theta_i = (F_1^2 + F_2^2 + D^2 - A^2 - B^2)/2D$$

które rozwiązuje się względem  $\theta_i$ , podobnie jak równanie typu (a). Mając wyznaczone  $\theta_i$ , można określić  $\theta_{ij}$  za pomocą wzoru

$$\theta_{ij} = \text{Atan } 2(AK_1 + BK_2, BK_1 - AK_2)$$

gdzie:  $K_1 = F_1 - Dc\theta_i$ ,  $K_2 = F_2 - Ds\theta_i$

Następnie oblicza się drugą niewiadomą wg wzoru

$$\theta_j = \theta_{ij} - \theta_i$$

$$6. \quad A s\theta_{ij} + D c\theta_i = F_1, \quad -A c\theta_{ij} + D s\theta_i = F_2 \quad (4.5f)$$

Układ równań (4.5f) jest podobny do równań typu (e), z wyjątkiem  $B = 0$ . Zatem procedura rozwiązania jest taka sama.

Sześć stopni swobody wystarcza do pozycjonowania i zorientowania członu roboczego, np. wg współrzędnych kartezjańskich. Jeśli ruchliwość manipulatora  $r > 6$ , to manipulator jest nadmiernie ruchliwy (tzw. *redundantny*) i układ równań (4.2) jest nieokreślony (tzn. liczba możliwych konfiguracji jest nieskończenie wielka).

Jeśli  $r < 6$ , to układ równań (4.2) staje się nadokreślony. Jeśli  $r = 6$  z równania macierzowego (4.2), przy wykorzystaniu równań (4.3) i (4.4), otrzymuje się 12 nietrywialnych równań, z których tylko 6 równań jest niezależnych.

Inna metoda rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki polega na wykorzystaniu własności macierzy obrotu. Mając iloczyn macierzy  $A$  zapisany w postaci

$$A_i A_j = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_i \mathbf{p}_j + \mathbf{p}_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

można równanie (4.1) rozdzielić na równania pozycji i orientacji

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{B}_1 (\mathbf{B}_2 (\mathbf{B}_3 (\mathbf{B}_4 (\mathbf{B}_5 \mathbf{p}_6 + \mathbf{p}_5) + \mathbf{p}_4) + \mathbf{p}_3) + \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_5 \mathbf{B}_6 \end{aligned} \quad (4.7)$$

gdzie:  $\mathbf{p}_i = [l_i c \theta_i \quad l_i s \theta_i \quad \lambda_i]^T$  – wektor pozycji punktu  $O_i$  względem  $O_{i-1}$ ,  $\mathbf{p}$  – wektor pozycji początku układu odniesienia członu roboczego względem podstawy.

Jeśli ostatnim połączeniem ruchowym jest przegub obrotowy, to  $\mathbf{p}_6 = 0$  i równanie (4.7) upraszcza się do postaci

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}_1 (\mathbf{B}_2 (\mathbf{B}_3 (\mathbf{B}_4 \mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_4) + \mathbf{p}_3) + \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_1 \quad (4.8)$$

Ponieważ obroty są przekształceniami ortogonalnymi, zatem odpowiednie iloczyny skalarne pozostają niezmiennie, tzn.

$$\mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (4.9a)$$

dla dowolnej macierzy obrotu  $\mathbf{B}$  i dowolnej pary wektorów  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$ . W szczególnym przypadku równania (4.9a), często wykorzystywanym, otrzymuje się

$$\mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{v} \quad (4.9b)$$

Własność ta znacznie ułatwia eliminowanie wyrażeń algebraicznych i niepotrzebnych zmiennych z równań (4.8). Stąd

$$\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{p}_i = [l_i \quad \lambda_i s \alpha_i \quad \lambda_i c \alpha_i]^T \quad (4.9c)$$

oraz

$$\mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{k} = [0 \quad s \alpha_i \quad c \alpha_i]^T, \text{ dla } \mathbf{k} = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (4.9d)$$

Wektory (4.9c i d) są zatem niezależne od  $\theta_i$  dla  $i$ -tego przegubu obrotowego. Ponadto, układ odniesienia członu roboczego przyjmuje się tak, aby  $\alpha_6 = 0$ . Stąd otrzymuje się

$$\mathbf{B}_6 \mathbf{k} = \mathbf{k} \quad (4.9e)$$

Wykorzystując wielokrotnie zależności (4.9), otrzymuje się cztery równania zredukowane. Pierwsze z nich wyprowadza się jak następuje:

$$\begin{aligned} n_z &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = (\mathbf{B} \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \\ n_z &= (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_5 \mathbf{B}_6 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \\ n_z &= (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_5 \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \\ n_z &= \mathbf{k} \cdot (\mathbf{B}_5^{-1} \mathbf{B}_4^{-1} \mathbf{B}_3^{-1} \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4.10a)$$

przy czym to ostatnie nazywa się *równaniem*  $n_z$ .

Drugie równanie zredukowane, tzw. *równanie*  $p_z$ , otrzymuje się w następujący sposób:  $\mathbf{p} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4 \mathbf{q}$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_5 + \mathbf{B}_4^{-1} \{ \mathbf{p}_4 + \mathbf{B}_3^{-1} [ \mathbf{p}_3 + \mathbf{B}_2^{-1} ( \mathbf{p}_2 + \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{p}_1 ) ] \} \quad (4.10b)$$

$$p_z = \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{q} \cdot ( \mathbf{B}_4^{-1} \mathbf{B}_3^{-1} \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{B}_1^{-1} ) \mathbf{k}$$

Trzecie i czwarte równania zredukowane otrzymuje się z iloczynów skalarnych

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_5^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} \quad (4.10c)$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = p^2 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = q^2 \quad (4.10d)$$

Ponieważ  $\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{p}_1$  i  $\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{k}$  są niezależne od  $\theta_i$ , zatem wektor  $\mathbf{q}$  może być rozważany jako niezależny od pierwszej i ostatniej zmiennej, a układ czterech równań (4.10) ma cztery niewiadome  $\theta_i$  ( $i = 2, 3, 4, 5$ ). Jeżeli układ ten zostanie rozwiązany, to pozostałe dwie zmienne mogą być wyznaczone z pozostałych równań układu (4.2).

Uproszczenia, uzyskane dzięki wykorzystaniu niezmienników (4.9), dają nie tylko skrócenie procedury obliczeń, lecz również dobry wgląd w strukturę i własności równań kinematyki. Rozwiązania równań (4.10) mają podwójne znaki. W wielu praktycznych przypadkach otrzymuje się jednoznaczne rozwiązanie ze względu na możliwość jawnego obliczenia wartości  $s\theta_i$  i  $c\theta_i$ . W niektórych przypadkach, w celu wyznaczenia wartości  $s\theta_i$  lub  $c\theta_i$ , trzeba korzystać z tożsamości Pitagorasa, wprowadzającej podwójne znaki do wyznaczanej funkcji. W pewnych przypadkach liczba rozwiązań z podwójnymi znakami może być zredukowana dzięki uwzględnieniu dodatkowych równań więzów, występujących w równaniach (4.2). Te dodatkowe równania pomagają wyeliminować obce rozwiązania i uprościć procedurę obliczeń.

Równania, określające składowe  $p_x, p_y, n_x$  i  $n_y$ , dostarczają dodatkowe równania więzów:

$$\begin{aligned} p_x &= (\mathbf{B}_1 (\mathbf{B}_2 (\mathbf{B}_3 (\mathbf{B}_4 \mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_4) + \mathbf{p}_3) + \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{i} \\ p_y &= (\mathbf{B}_1 (\mathbf{B}_2 (\mathbf{B}_3 (\mathbf{B}_4 \mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_4) + \mathbf{p}_3) + \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{j} \\ n_x &= \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_5 \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} \\ n_y &= \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_5 \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.11)$$

gdzie:  $\mathbf{i} = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{j} = [0 \ 1 \ 0]^T$  – wersory osi układu odniesienia podstawy.

Szeregowy łańcuch kinematyczny z połączeniami obrotowymi i przesuwными jest ortogonalny, jeśli wszystkie kąty skręceń wynoszą:  $\alpha_i = 0$  lub  $\pi/2$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Manipulator ortogonalny o sześciu stopniach swobody klasyfikuje się w zależności od wartości kolejnych kątów skręceń  $\alpha_i$ . Ponieważ  $\alpha_6$  jest zwykle równe 0, więc można znaleźć tylko  $2^5 = 32$  różnych klas manipulatorów ortogonalnych, z których 8 ma 4 lub więcej kolejnych osi równoległych, co zmniejsza liczbę stopni swobody poniżej 6. Zatem, tylko 24 manipulatory ortogonalne dysponują pełnymi

możliwościami przestrzennego pozycjonowania i orientowania. Większość robotów przemysłowych zalicza się do manipulatorów ortogonalnych.

Macierze  $A_i$  dla manipulatorów ortogonalnych przyjmują postacie:

$$A_i(\alpha = 0) = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & l_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & l_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$A_i(\alpha = \pi/2) = \begin{bmatrix} c_i & 0 & s_i & l_i c_i \\ s_i & 0 & -c_i & l_i s_i \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Stąd:

$$\begin{aligned} B_i k &= B_i^{-1} k = k && \text{dla } \alpha_i = 0 \\ B_i^{-1} k &= j && \text{dla } \alpha_i = \pi/2 \end{aligned}$$

Do manipulatorów ortogonalnych, mających rozwiązania w postaci jawnej, zalicza się następujące przypadki:

- $\alpha_i = \pi/2, 0, 0, \pi/2, 0$
- $\alpha_i = 0, \pi/2, 0, \pi/2, 0$
- $\alpha_i = 0, 0, \pi/2, 0, \pi/2$
- $\alpha_i = 0, 0, \pi/2, \pi/2, 0$
- $\alpha_i = 0, \pi/2, 0, 0, \pi/2$

Dla manipulatora ortogonalnego o sześciu połączeniach obrotowych, w którym można wydzielić układy pozycjonowania i orientowania, równanie (4.1) zapisuje się w postaci

$$\begin{bmatrix} B & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{3,0} & p_r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{6,3} & p_w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

gdzie

- $B_{3,0}$  – macierz orientacji układu odniesienia członu 3 względem podstawy 0,
- $p_r$  – wektor pozycji początku układu odniesienia członu 3 względem podstawy,
- $p_w$  – wektor pozycji początku układu odniesienia członu roboczego 6 względem układu odniesienia członu 3,
- $B_{6,3}$  – macierz orientacji układu odniesienia członu roboczego względem układu odniesienia członu 3.

Na podstawie równania (4.14) otrzymuje się

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{3,0} \mathbf{B}_{6,3} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}_{3,0} \mathbf{p}_w + \mathbf{p}_r$$

gdzie  $p_w$  – długość kiści, tzn. odległość początku układu członu roboczego od początku układu 3. U większości robotów wektor  $\mathbf{p}_w$  ma kierunek określony przez wektor podjęcia  $\mathbf{n}$ . W tym przypadku drugie równanie układu (4.15) przekształca się do postaci

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{p} - p_w \mathbf{n} \quad (4.16)$$

Zatem, jeśli dane są współrzędne wektora pozycji i wektorów orientacji układu członu roboczego, tzn.  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ ,  $\mathbf{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$  i długość kiści  $p_w$ , to wg wzoru (4.16) można wyznaczyć współrzędne  $\mathbf{p}_r$  – wektora pozycji końca ramienia manipulatora. Z drugiej strony wektor  $\mathbf{p}_r$  można określić za pomocą iloczynu macierzy przekształceń

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{p}_3 + \mathbf{B}_1 \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1 \quad (4.17)$$

gdzie

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} l_i c\theta_i \\ l_i s\theta_i \\ \lambda_i \end{bmatrix} \quad (4.17a)$$

Gdy środek kiści  $O_4$  jest odsunięty od punktu  $O_3$  o wektor  $\mathbf{p}_4 = \overline{O_3 O_4}$ , wówczas zamiast równania (4.17) korzysta się z zależności:

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{p}_4 + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{p}_3 + \mathbf{B}_1 \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1 \quad (4.18)$$

Po podstawieniu zależności (4.17) lub (4.18) do równania (4.16) otrzymuje się układ trzech równań o trzech niewiadomych  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  i  $\theta_3$ .

W celu wyznaczenia niewiadomych  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  i  $\theta_6$  równanie orientacji z układu (4.15) przekształca się do postaci

$$\mathbf{B}_{6,3} = \mathbf{B}_{3,0}^{-1} \mathbf{B} \quad (4.19)$$

przy czym

$$\mathbf{B}_{3,0}^{-1} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3)^{-1} = \begin{bmatrix} l_{3x} & l_{3y} & l_{3z} \\ m_{3x} & m_{3y} & m_{3z} \\ n_{3x} & n_{3y} & n_{3z} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

gdzie  $l_3$ ,  $m_3$  i  $n_3$  – weksory osi układu odniesienia członu 3.

Mając wartości  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  i  $\theta_3$  wyznaczone z równania (4.20), można wyznaczyć współrzędne wektorów  $l_3$ ,  $m_3$  i  $n_3$ . Z równania (4.19) wyznacza się elementy macierzy  $\mathbf{B}_{6,3}$  jako iloczyny skalarne odpowiednich par wektorów macierzy orientacji:

$[l \ m \ n]$  – układu odniesienia członu roboczego oraz  $[l_3 \ m_3 \ n_3]$  – członu 3. Z równania (4.14) można wyprowadzić zależność

$$\mathbf{B}_{6,3} = \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_5 \mathbf{B}_6 \quad (4.21)$$

którą można przekształcić do postaci

$$\mathbf{B}_4^{-1} \mathbf{B}_{6,3} = \mathbf{B}_5 \mathbf{B}_6 \quad (4.22)$$

W większości stosowanych manipulatorów, np. w robotach PUMA, ASEA i in., osie połączeń obrotowych kiści są względem siebie prostopadłe, tzn.  $\alpha_4 = \pm\pi/2$ ,  $\alpha_5 = \pm\pi/2$ ,  $\alpha_6 = 0$ . Zatem,  $c\alpha_4 = c\alpha_5 = 0$ ,  $s\alpha_6 = 0$ ,  $c\alpha_6 = 1$ . Ze względu na te relacje, jak również (4.19) i (4.20), równanie (4.22) może być zapisane w postaci

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c\theta_4 & s\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & s\alpha_4 \\ s\alpha_4 s\theta_4 & -s\alpha_4 c\theta_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \cdot l_{3x} & m \cdot l_{3y} & n \cdot l_{3z} \\ l \cdot m_{3x} & m \cdot m_{3y} & n \cdot m_{3z} \\ l \cdot n_{3x} & m \cdot n_{3y} & n \cdot n_{3z} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} c\theta_5 c\theta_6 & -c\theta_5 s\theta_6 & s\alpha_5 s\theta_5 \\ s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & s\alpha_5 c\theta_5 \\ s\alpha_5 s\theta_6 & s\alpha_5 c\theta_6 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

gdzie

$$\begin{aligned} l \cdot l_3 &= l_x c\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3) + l_y s\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3) - l_z s(\theta_2 + \theta_3) \\ l \cdot m_3 &= -l_x s\theta_1 + l_y c\theta_1 \\ l \cdot n_3 &= l_x c\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) + l_y s\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) + l_z c(\theta_2 + \theta_3) \\ m \cdot l_3 &= m_x c\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3) + m_y s\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3) - m_z s(\theta_2 + \theta_3) \\ m \cdot m_3 &= -m_x s\theta_1 + m_y c\theta_1 \\ m \cdot n_3 &= m_x c\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) + m_y s\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) + m_z c(\theta_2 + \theta_3) \\ n \cdot l_3 &= n_x c\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3) + n_y s\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3) - n_z s(\theta_2 + \theta_3) \\ n \cdot m_3 &= -n_x s\theta_1 + n_y c\theta_1 \\ n \cdot n_3 &= n_x c\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) + n_y s\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) + n_z c(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (4.23a)$$

Po wykonaniu mnożeń macierzy po lewej stronie równania (4.23), a następnie przyrównaniu do siebie elementów (3, 3) po obu stronach równania, otrzymuje się zależność na  $\theta_4$  w postaci

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}_3) s\theta_4 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_3) c\theta_4 = 0 \quad (4.24)$$

Po przyrównaniu odpowiednich elementów (1, 3) i (2, 3) po obu stronach równania (4.23) otrzymuje się układ równań względem  $s\theta_5$  i  $c\theta_5$

$$\begin{aligned} s\theta_5 &= [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}_3) c\theta_4 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_3) s\theta_4] / s\alpha_5 \\ c\theta_5 &= -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_3) s\alpha_4 / s\alpha_5 \end{aligned} \quad (4.25)$$



Podobnie, po przyrównaniu elementów (3, 1) i (3, 2) otrzymuje się

$$\begin{aligned} s\theta_6 &= [(\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}_3)s\theta_4 - (\mathbf{l} \cdot \mathbf{m}_3)c\theta_4]s\alpha_4/s\alpha_5 \\ c\theta_6 &= [(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l}_3)s\theta_4 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_3)c\theta_4]s\alpha_4/s\alpha_5 \end{aligned} \quad (4.26)$$

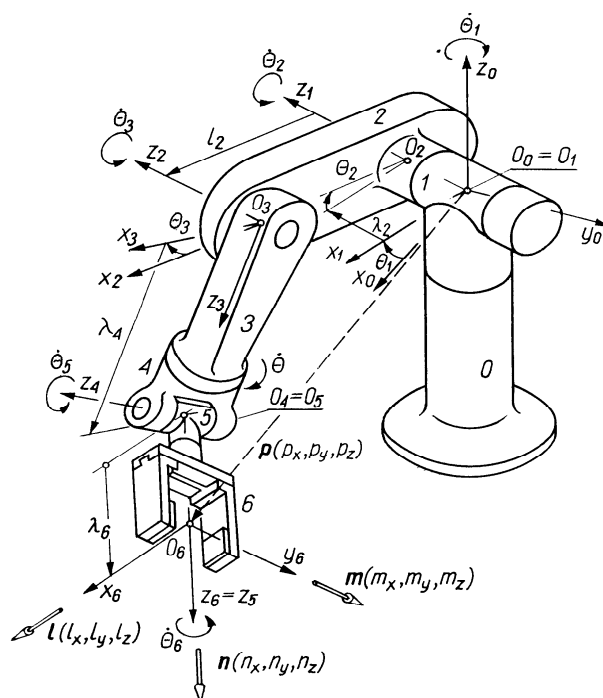
Algorytm rozwiązania zadania odwrotnej kinematyki można podzielić na bloki:

- 1) wyznaczenie współrzędnych środka kiści, tzn. wektora  $\mathbf{p}_r$  wg wzoru (4.16),
- 2) wyznaczenie niewiadomych  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  i  $\theta_3$  z równań (4.16), (4.17) i (4.18),
- 3) wyznaczenie pozostałych niewiadomych  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  i  $\theta_6$  wg wzorów (4.24)÷(4.26).

**Przykład 4.1.** Dany jest manipulator PUMA 560 o sześciu połączeniach obrotowych, których wzajemne usytuowanie określają następujące wymiary (rys. 4.1)

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_i = & -\pi/2, & 0, & \pi/2, & -\pi/2, & \pi/2, & 0 \\ l_i = & 0, & l_2, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \lambda_i = & 0, & \lambda_2, & 0, & \lambda_4, & 0, & \lambda_6 \end{array}$$

Zadanie odwrotne kinematyki sformułowano następująco: dane są pozycja i orientacja członu roboczego, tzn. wektor  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$  oraz wersory  $\mathbf{m} = [m_x \ m_y \ m_z]^T$  i  $\mathbf{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$ . Należy wyznaczyć wartości zmiennych  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ).



Rys. 4.1. Schemat konstrukcyjny manipulatora o 6 połączeniach obrotowych (PUMA Unimation), zwymiarowany za pomocą współrzędnych D-H:  $\alpha_i = -\pi/2, 0, \pi/2, -\pi/2, \pi/2, 0$ ;  $l_i = 0, l_2, 0, 0, 0, 0$ ;  $\lambda_i = 0, \lambda_2, 0, \lambda_4, 0, \lambda_6$ . (Źródło: Knapczyk, 1990)

Uwzględniając powyższe dane wg (4.17a), otrzymuje się

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{p}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{p}_2 &= \begin{bmatrix} l_2 c\theta_2 \\ l_2 s\theta_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_3 &= \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & s\theta_3 \\ s\theta_3 & 0 & -c\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{p}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_4 &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{p}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_5 &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{p}_5 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_6 &= \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{p}_6 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_6 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Stąd wyznacza się

$$\mathbf{B}_{3,0} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3) & -s\theta_1 & c\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) \\ s\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3) & c\theta_1 & s\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) \\ -s(\theta_2 + \theta_3) & 0 & c(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Ze wzoru (4.18) otrzymuje się

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} l_2 c\theta_1 c\theta_2 - \lambda_2 s\theta_1 + \lambda_4 c\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) \\ l_2 s\theta_1 c\theta_2 + \lambda_2 c\theta_1 + \lambda_4 s\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) \\ -l_2 s\theta_2 + \lambda_4 c(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Dla rozważanego manipulatora  $p_w = \lambda_6$ , zatem wg wzoru (4.16) będzie

$$\begin{aligned}
l_2 c\theta_1 c\theta_2 - \lambda_2 s\theta_1 + \lambda_4 c\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) &= p_x - \lambda_6 n_x \\
l_2 s\theta_1 c\theta_2 + \lambda_2 c\theta_1 + \lambda_4 s\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) &= p_y - \lambda_6 n_y \\
-l_2 s\theta_2 + \lambda_4 c(\theta_2 + \theta_3) &= p_z - \lambda_6 n_z
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Jeśli pierwsze równanie układu (4.30) pomnożyć przez  $s\theta_1$ , drugie – przez  $(-c\theta_1)$ , a następnie dodać stronami, to otrzyma się równanie typu (4.5a)

$$(p_x - \lambda_6 n_x) s\theta_1 - (p_y - \lambda_6 n_y) c\theta_1 = -\lambda_2$$

Stąd wg wzoru (4.5a) będzie

$$\theta_1 = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{B \pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2 - D_1^2}}{A_1 + D_1} \quad (4.31)$$

gdzie

$$A_1 = -(p_y - \lambda_6 n_y); \quad B_1 = (p_x - \lambda_6 n_x); \quad D_1 = -\lambda_2 \quad (4.32)$$

Jeśli pierwsze równanie układu (4.30) pomnoży się przez  $c\theta_1$ , drugie – przez  $s\theta_1$ , to równanie wynikające z sumowania stron otrzymanych równań oraz dołączone trzecie równanie dają następujący układ równań

$$\begin{aligned} \lambda_4 s(\theta_2 + \theta_3) &= p_{rx} c\theta_1 + p_{ry} s\theta_1 - l_2 c\theta_2 \\ \lambda_4 c(\theta_2 + \theta_3) &= p_{rz} + l_2 s\theta_2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Po podniesieniu do kwadratu równania (4.33) i dodaniu stronami otrzymuje się równanie typu (4.5a)

$$A_2 s\theta_2 + B_2 c\theta_2 = D_2$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A_2 &= -p_{rz} \\ B_2 &= p_{rx} c\theta_1 + p_{ry} s\theta_1 \\ D_2 &= (B_2^2 + p_{rz}^2 + l_2^2 - \lambda_4^2) / 2l_2 \end{aligned} \quad (4.34a)$$

Stąd wg wzoru (4.5a)

$$\theta_2 = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{A_2 \pm \sqrt{A_2^2 + B_2^2 - D_2^2}}{B_2 + D_2} \quad (4.35)$$

Po wyznaczeniu  $\theta_2$  można wrócić do układu (4.33) i rozwiązać go względem sumy  $(\theta_2 + \theta_3)$ . W ten sposób otrzymuje się

$$\theta_3 = 2 \operatorname{arctg} (B_2 - l_2 c\theta_2) / (\lambda_4 + p_{rz} + l_2 s\theta_2) - \theta_2 \quad (4.36)$$

Pozostałe niewiadome  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  i  $\theta_6$  można wyznaczyć wg procedury określonej poprzednio (patrz równania (4.24)÷(4.26)). Z równania (4.24) otrzymuje się następujące rozwiązanie

$$\theta_4 = \operatorname{Atan}2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_3, \mathbf{n} \cdot \mathbf{l}_3) \quad (4.37)$$

Z zależności (4.25) i (4.26) otrzymuje się

$$\theta_5 = \operatorname{Atan}2[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}_3) c\theta_4 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_3) s\theta_4, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_3] \quad (4.38)$$

$$\theta_6 = \operatorname{Atan}2(-(\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}_3) s\theta_4 + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{m}_3) c\theta_4, -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l}_3) s\theta_4 + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_3) c\theta_4) \quad (4.39)$$

Na podstawie przedstawionego algorytmu opracowano program obliczeń komputerowych, który może być wykorzystany do programowania ruchu manipulatora wg zadanej trajektorii, tzn. pozycji i orientacji członu roboczego jako funkcji czasu. Program ten może być również wykorzystany do wyznaczenia granic przestrzeni roboczej i manipulacyjnej. W tym celu rozwiązuje się zadanie odwrotne dla kolejnych punktów trajektorii. Brak rozwiązania oznacza, że trajektoria przekroczyła granice tej przestrzeni. Metodą połowienia przedziałów między ostatnimi punktami trajektorii można wyznaczyć z potrzebną dokładnością wartości współrzędnych punktów granicznych.

**Przykład liczbowy.** Dla manipulatora PUMA 560, rozważanego poprzednio, przyjęto następujące wymiary:  $l_2 = 0,4320$ ,  $\lambda_2 = 0,1495$ ,  $\lambda_4 = 0,4320$ ,  $\lambda_6 = 0,056$ . Ponadto przyjęto dopuszczalne przedziały wartości zmiennych ( $\theta_{i,max}$ ,  $\theta_{i,min}$ ):

$$\begin{array}{lll} \theta_1 (-160^\circ, +160^\circ), & \theta_2 (-225^\circ, +45^\circ), & \theta_3 (-45^\circ, +225^\circ), \\ \theta_4 (-110^\circ, +170^\circ), & \theta_5 (-100^\circ, +100^\circ), & \theta_6 (-266^\circ, +266^\circ) \end{array}$$

Pozycję i orientację członu roboczego zadano w postaci macierzy

$$T_6 = \begin{bmatrix} -0,0461 & -0,7892 & -0,6124 & 0,3000 \\ 0,6609 & 0,4356 & -0,6112 & 0,2000 \\ 0,7491 & -0,4329 & 0,5015 & 0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W pierwszym kroku rozwiązania obliczono współrzędne punktu końca ramienia wg wzoru (4.16). Otrzymano:

$$p_{rx} = 0,3346, \quad p_{ry} = 0,2345, \quad p_{rz} = 0,1217$$

Z kolei wg wzoru (4.31) obliczono

$$\theta_1 = 35,036^\circ \pm 21,459^\circ$$

Do dalszych obliczeń wzięto  $\theta_1 = 13,576^\circ$ .

Następnie wg wzoru (4.34a) obliczono:  $A = -0,1217$ ,  $B = 0,3803$ ,  $D = 0,1846$ .

Na podstawie wzoru (4.35) otrzymano

$$\theta_2 = 72,249^\circ \pm 27,529^\circ$$

Do dalszych obliczeń przyjęto  $\theta_2 = 44,720^\circ$ . Następnie wg wzoru (4.36) obliczono

$$\theta_3 = -34,943^\circ$$

Według wzoru (4.23a) obliczono elementy macierzy

$$\begin{bmatrix} l \cdot l_3 & m \cdot l_3 & n \cdot l_3 \\ l \cdot m_3 & m \cdot m_3 & n \cdot m_3 \\ l \cdot n_3 & m \cdot n_3 & n \cdot n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0202 & -0,5817 & -0,8132 \\ 0,6524 & 0,6087 & -0,4516 \\ 0,7576 & -0,5396 & 0,3672 \end{bmatrix}$$

W końcu wg wzorów (4.37)÷(4.39) dla jednej konfiguracji obliczono

$$\theta_4 = -\text{Atan2}(-0,4516, -0,8132) = 209,045^\circ$$

W podobny sposób dla drugiej konfiguracji otrzymano

$$\theta_4 = -\text{Atan2}(0,4516, 0,8132) = 29,045^\circ$$

Ponieważ pierwsza z otrzymanych wartości leży poza dopuszczalnym przedziałem, dlatego do dalszych obliczeń przyjęto  $\theta_4 = 29,045^\circ$ . Następnie obliczono:

$$\theta_5 = \text{Atan2}\left[-0,8132\cos(29,045^\circ) - 0,4516\sin(29,045^\circ); 0,3672\right] = -68,458^\circ$$

$$\theta_6 = \text{Atan2}(-0,0202s\theta_4 + 0,6524c\theta_4; -0,5817s\theta_4 + 0,6087c\theta_4) = -35,46^\circ$$

Podstawiając otrzymane wartości  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  i  $\theta_6$  do równania (4.23), sprawdzono, że zostały poprawnie obliczone.

**Przykład 4.2.** Rozwiązać zadanie odwrotne kinematyki dla manipulatora typu PUMA, lecz o wymiarach różniących się od podanych w przykładzie 4.1. Przyjęto wymiary:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \pi/2, & 0, & \pi/2, & \pi/2, & \pi/2, & 0 \\ l_i &= 0, & l_2, & l_3, & 0, & 0, & 0 \\ \lambda_i &= 0, & 0, & \lambda_3, & \lambda_4, & 0, & 0 \end{aligned}$$

W celu rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki wykorzystano równania (4.7)÷(4.11), które w rozważanym przypadku będą następujące

$$\begin{aligned} n_x &= c\theta_1c(\theta_2 + \theta_3)c\theta_4s\theta_5 + s\theta_1s\theta_4s\theta_5 - c\theta_1s(\theta_2 + \theta_3)c\theta_5 \\ n_y &= s\theta_1c(\theta_2 + \theta_3)c\theta_4s\theta_5 - c\theta_1s\theta_4s\theta_5 - s\theta_1s(\theta_2 + \theta_3)c\theta_5 \\ n_z &= s(\theta_2 + \theta_3)c\theta_4s\theta_5 + c(\theta_2 + \theta_3)c\theta_5 \\ p_x &= [\lambda_4s(\theta_2 + \theta_3) + l_3c(\theta_2 + \theta_3) + l_2c\theta_2]c\theta_1 + \lambda_3s\theta_1 \\ p_y &= [\lambda_4s(\theta_2 + \theta_3) + l_3c(\theta_2 + \theta_3) + l_2c\theta_2]s\theta_1 - \lambda_3c\theta_1 \\ p_z &= l_2s\theta_2 + l_3s(\theta_2 + \theta_3) - \lambda_4c(\theta_2 + \theta_3) \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} &= (l_3 + l_2c\theta_3)c\theta_4s\theta_5 + \lambda_3s\theta_4s\theta_5 - (\lambda_4 + l_2s\theta_3)c\theta_5 \\ p^2 - l_2^2 - l_3^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2 &= 2l_2(\lambda_4s\theta_3 + l_3c\theta_3) \end{aligned} \tag{4.40}$$

Z ośmiu równań (4.40) tylko pięć jest niezależnych, ponieważ trzecie równanie jest zależne od pierwszych dwóch, a ostatnie dwa równania są zależne od poprzednich.

Z równań na  $p_x$  i  $p_y$  można wyznaczyć  $\theta_1$

$$\theta_1 = 2\arctg\left((p_x \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - \lambda_3^2}) / (\lambda_3 - p_y)\right) \tag{4.41}$$

Z ostatnich dwóch równań (4.40) można wyznaczyć  $\theta_3$

$$\theta_3 = 2\arctg\left((A_3 \pm \sqrt{A_3^2 + B_3^2 - D_3^2}) / (B_3 + D_3)\right) \tag{4.42}$$

gdzie:

$$A_3 = \lambda_4, \quad B_3 = l_3, \quad D_3 = (p^2 - l_2^2 - l_3^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2)/2l_2$$

Następnie z równania na  $p_z$  wyznacza się  $\theta_2$

$$\theta_2 = 2\arctg\left(\frac{(A_2 \pm \sqrt{A_2^2 + B_2^2 - D_2^2})}{(B_2 + D_2)}\right) \quad (4.43)$$

gdzie:

$$A_2 = l_2 + l_3 c\theta_3 + \lambda_4 s\theta_3$$

$$B_2 = l_3 s\theta_3 - \lambda_4 c\theta_3$$

$$D_2 = p_z$$

W następnym kroku wyznacza się  $\theta_4$  i  $\theta_5$  z zależności na  $n_x$ ,  $n_y$  i  $n_z$ , które przekształca się do postaci

$$\begin{aligned} c\theta_1 c\theta_4 s\theta_5 + s\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3) s\theta_4 s\theta_5 &= n_x c(\theta_2 + \theta_3) + n_z c\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) \\ s\theta_1 c\theta_4 s\theta_5 - c\theta_1 c(\theta_2 + \theta_3) s\theta_4 s\theta_5 &= n_y c(\theta_2 + \theta_3) + n_z s\theta_1 s(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ten układ równań liniowych można rozwiązać względem iloczynów:  $(c\theta_4 s\theta_5)$  i  $(s\theta_4 s\theta_5)$ . Gdy  $s\theta_5 \neq 0$ , wówczas są dwa rozwiązania na  $\theta_4$ :

$$\theta_4 = \text{Atan2}(s\theta_4 s\theta_5, c\theta_4 s\theta_5) \quad \text{lub} \quad \theta_4 = \text{Atan2}(-s\theta_4 s\theta_5, -c\theta_4 s\theta_5) \quad (4.45)$$

Natomiast, gdy  $s\theta_5 = 0$ , wówczas osie  $z_3$  i  $z_5$  leżą w jednej linii i manipulator traci jeden stopień swobody.

Po wyznaczeniu  $\theta_4$  pierwsze dwa równania na  $n_x$  i  $n_y$  stanowią układ równań liniowych względem niewiadomych  $s\theta_5$  i  $c\theta_5$ . Ostatnią z niewiadomych  $\theta_6$  wyznacza się z równań (4.23), dotyczących  $l_z$   $m_z$ . Taka procedura rozwiązania daje osiem rozwiązań, które powinny być sprawdzone ze względu na ograniczenia zakresów zmiennych konfiguracyjnych.

Niezmiennosc iloczynów skalarnych przy obrotach układów odniesienia pozwala na uniknięcie mnożenia wszystkich macierzy przekształceń. To uproszczenie procedury daje lepszy wgląd w samą istotę zadania odwrotnego kinematyki i umożliwia redukcję złożonego układu równań do czterech równań o czterech niewiadomych.

**Przykład 4.3.** Manipulator o równoległych osiach połączeń obrotowych 2 i 3 oraz wzajemnie prostopadłych osiach 3, 4 i 5 przedstawiono na rys. 4.2. Przyjęto następujące wymiary:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \pi/2, & 0, & 0, & -\pi/2, & \pi/2, & 0 \\ l_i &= 0, & l_2, & l_3, & l_4, & 0, & 0 \\ \lambda_i &= 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{aligned}$$

Macierze  $A_i$  przy uwzględnieniu wymiarów tego manipulatora przyjmują postacie

$$A_j = \begin{bmatrix} c_j & 0 & s_j & 0 \\ s_j & 0 & -c_j & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dla } j = 1, 5$$

$$A_k = \begin{bmatrix} c_k & -s_k & 0 & l_k c_k \\ s_k & c_k & 0 & l_k s_k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dla } k = 2, 3, 4$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Najpierw można rozwiązać równanie macierzowe

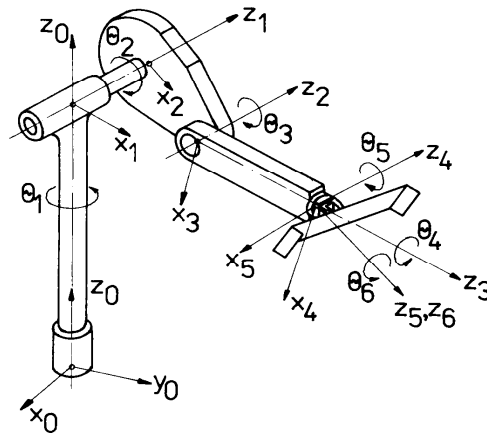
$$A_1^{-1} T_6 = T_{6,1} \quad (4.46)$$

gdzie

$$T_{6,1} = \begin{bmatrix} c_{234}c_5c_6 - s_{234}s_6 & -c_{234}c_5s_6 - s_{234}c_6 & c_{234}s_5 & l_4c_{234} + l_3c_{23} + l_2c_2 \\ s_{234}c_5c_6 + c_{234}s_6 & -s_{234}c_5s_6 + c_{234}c_6 & s_{234}s_5 & l_4s_{234} + l_3s_{23} + l_2s_2 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1} T_6 = \begin{bmatrix} l_x c_1 + l_y s_1 & m_x c_1 + m_y s_1 & n_x c_1 + n_y s_1 & p_x c_1 + p_y s_1 \\ -l_z & -m_z & -n_z & -p_z \\ -l_x s_1 + l_y c_1 & -m_x s_1 + m_y c_1 & -n_x s_1 + n_y c_1 & -p_x s_1 + p_y c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

przy czym  $c_{234} = \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$ ,  $c_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$ ,  $c_2 = \cos\theta_2$  itp.



Rys. 4.2. Schemat manipulatora typu PUMA. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Po porównaniu elementów (3, 4) po obu stronach równania (4.46) otrzymuje się równanie

$$p_x s\theta_1 - p_y c\theta_1 = 0 \quad (4.47)$$

którego rozwiązanie względem  $\theta_1$  można przedstawić w postaci

$$\theta_1 = 2\text{arctg}\left(\frac{(p_x \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2})}{(-p_y)}\right) \quad (4.48)$$

Przyrównując element (3, 1), (3, 2) i (3, 3) po obu stronach równania (4.46) otrzymano

$$\begin{aligned} -s_5c_6 &= l_x s_1 - l_y c_1 \\ s_5s_6 &= m_x s_1 - m_y c_1 \\ c_5 &= n_x s_1 - n_y c_1 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Rozwiązanie układu (4.49) względem  $\theta_6$  można zapisać w postaci

$$\theta_6 = \text{Atan2}(m_x s_1 - m_y c_1, l_y c_1 - l_x s_1) \quad (4.50)$$

Rozwiązanie względem  $\theta_5$  jest następujące

$$\theta_5 = \text{Atan2}[s_1(l_x c_6 - m_x s_6) - c_1(l_y c_6 - m_y s_6), n_x s_1 - n_y c_1] \quad (4.51)$$

Po przyrównaniu odpowiednio pierwszych trzech elementów drugiej wiersza macierzy po obu stronach równania (4.46) otrzymuje się układ równań względem niewiadomych  $s_{234}$  i  $c_{234}$ , którego rozwiązanie będzie

$$\begin{aligned} s_{234} &= -m_z c_5 s_6 + n_z s_5 + l_z c_5 c_6 \\ c_{234} &= l_z s_6 - m_z c_6 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Kolejną niewiadomą  $\theta_3$  można wyznaczyć z równania (4.46), przyrównując odpowiednie elementy (1,4) i (2,4). W ten sposób otrzymuje się układ równań

$$\begin{aligned} p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1 &= l_4 c_{234} + l_3 c_{23} + l_2 c_2 \\ p_z &= l_4 s_{234} + l_3 s_{23} + l_2 s_2 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Oznaczając

$$\begin{aligned} p_{cx} &= p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1 - l_4 c_{234} \\ p_{cy} &= p_z - l_4 s_{234} \end{aligned} \quad (4.54)$$

rozwiązanie można otrzymać w postaci

$$\theta_3 = 2\text{Atan2}\left(\pm\sqrt{1+c_3^2}, 1+c_3\right) \quad (4.55)$$

gdzie

$$c_3 = (l_2^2 + l_3^2 - p_{cx}^2 - p_{cy}^2) / 2l_2 l_3 \quad (4.56)$$

oraz



$$\begin{aligned}\theta_2 &= \text{Atan2}[l_3 p_{cx} s_3 + (l_3 c_3 + l_2) p_{cy}, (l_3 c_3 + l_2) p_{cx} + l_3 p_{cy} s_3] \\ \theta_4 &= \text{Atan2}(s_{234}, c_{234}) - \theta_3 - \theta_2\end{aligned}\quad (4.57)$$

**Przykład 4.4.** Dla manipulatora typu stanfordzkiego (rys. 4.3) przyjęto następujące wymiary:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \quad -\pi/2, & \pi/2, & \quad 0, & -\pi/2, & \pi/2, & \quad 0 \\ l_i &= \quad 0, & \quad 0, & \quad 0, & \quad 0, & \quad 0, & \quad 0 \\ \lambda_i &= \quad 0, & \lambda_2, & \lambda_3, & \quad 0, & \quad 0, & \quad 0\end{aligned}$$

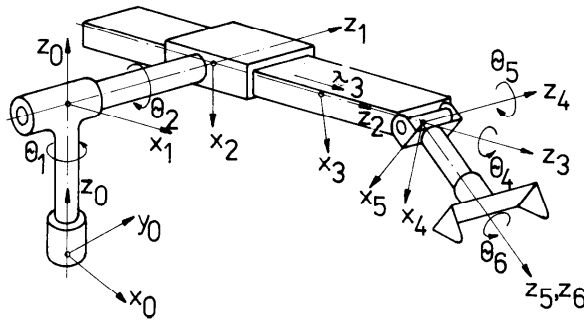
gdzie  $\lambda_3$  jest zmiennym przesunięciem, a  $\theta_3$  jest stałą.

W wyniku mnożenia odpowiednich macierzy przekształceń otrzymuje się

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{6,1} &= \begin{bmatrix} c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5s_6 & -c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6 & c_2c_4s_5 + s_2c_5 & s_2\lambda_3 \\ s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + c_2s_5s_6 & -s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - c_2s_5s_6 & s_2c_4s_5 + c_2c_5 & -c_2\lambda_3 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{T}_6 &= \begin{bmatrix} l_x c_1 + l_y s_1 & m_x c_1 + m_y s_1 & n_x c_1 + n_y s_1 & p_x c_1 + p_y s_1 \\ -l_z & -m_z & -n_z & -p_z \\ -l_x s_1 + l_y c_1 & -m_x s_1 + m_y c_1 & -n_x s_1 + n_y c_1 & -p_x s_1 + p_y c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.58)$$

Po porównaniu elementów (3,4) obu macierzy otrzymuje się równanie

$$-p_x s \theta_1 + p_y c \theta_1 = \lambda_2 \quad (4.59)$$



Rys.4.3. Manipulator stanfordzki.

Stąd

$$\theta_1 = 2 \arctg \left( (-p_x \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - \lambda_2^2}) / (\lambda_2 + p_y) \right)$$

Z porównania odpowiednich elementów (1, 4) i (2, 4) wynikają równania

$$\begin{aligned}s_2 \lambda_3 &= c_1 p_x + s_1 p_y \\ -c_2 \lambda_3 &= -p_z\end{aligned}\quad (4.60)$$

Stąd

$$\theta_2 = 2\arctg[(p_y s_1 + p_x c_1) / (\lambda_3 + p_z)]$$

$$\lambda_3 = (p_x c_1 + p_y s_1) s_2 + p_z c_2$$

Po przyrównaniu kolejnych elementów trzeciej kolumny z obu macierzy otrzymuje się układ, którego rozwiązanie względem  $\theta_4$  i  $\theta_5$  jest w postaci

$$\theta_4 = 2\arctg\{(-n_x s_1 + n_y c_1) / [(n_x c_1 + n_y s_1) c_2 - n_z s_2]\} \quad (4.61)$$

$$\theta_5 = \text{Atan2}\{c_4[c_2(n_x c_1 + n_y s_1) - n_z s_2] + s_4(-n_x s_1 + n_y c_1), \\ s_2(n_x c_1 + n_y s_1) + n_z s_2\} \quad (4.62)$$

Po przyrównaniu elementów (3, 1) i (3, 2) z obu macierzy otrzymuje się układ równań liniowych względem  $s\theta_6$  i  $c\theta_6$ . Stąd

$$\theta_6 = \text{Atan2}[(-l_x s_1 + l_y c_1) c_4 - (-m_x s_1 + m_y c_1) s_4 c_5, \\ (-l_x s_1 + l_y c_1) s_4 c_5 + (m_x s_1 + m_y c_1) c_4] \quad (4.63)$$

**Przykład 4.5.** Dla robota SCARA, o pionowych osiach trzech pierwszych połączeń obrotowych i czwartego przesuwne, przyjęto następujące wymiary:

$$\begin{array}{l} \alpha_i = 0, \quad 0, \quad 0, \quad \pi/2, \quad -\pi/2, \quad 0 \\ l_i = l_1, \quad l_2, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \\ \lambda_i = 0, \quad 0, \quad \lambda_3, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \end{array}$$

Rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki za pomocą metody macierzowej dla pierwszych trzech niewiadomych  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  i  $\lambda_3$  otrzymano z równania (4.23)

$$\theta_1 = \text{Atan2}\left(2l_1 p_y \pm \sqrt{4l_1^2(p_x^2 + p_y^2) - p_{11}^2}, p_{11} + 2l_1 p_x\right) \quad (4.64)$$

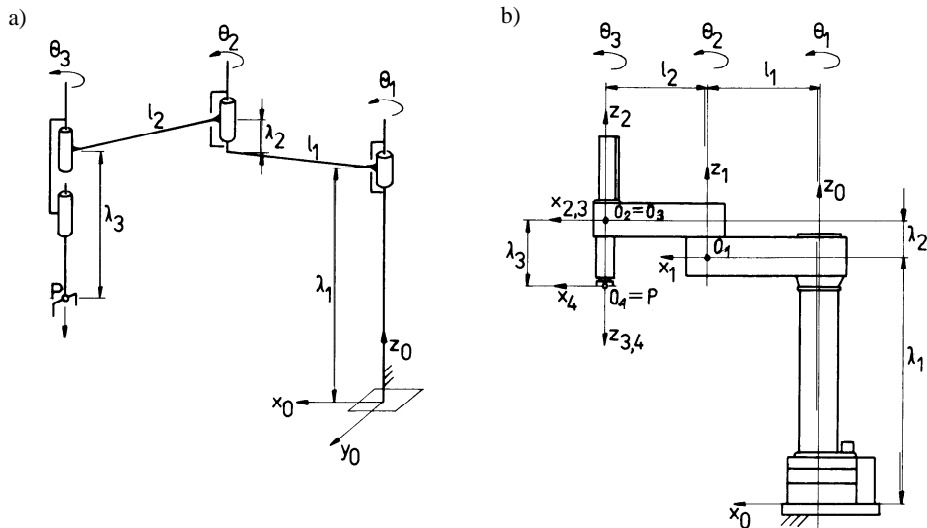
$$p_{11} = p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - l_2^2 \\ \theta_2 = \text{Atan2}(p_y c_1 - p_x s_1, p_x c_1 + p_y s_1 - l_1) \quad (4.65)$$

$$\lambda_3 = p_z \quad (4.66)$$

Pozostałe trzy niewiadome  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  i  $\theta_6$  otrzymuje się jako rozwiązanie równania

$$\mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_6 \quad (4.67)$$

którego część dotycząca orientacji można zapisać następująco



Rys. 4.4. Manipulator typu SCARA, którego ramię ma trzy połączenia obrotowe ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ) i połączenie przesuwne ( $\lambda_3$ ) o pionowych osiach: a) schemat kinematyczny, b) schemat konstrukcyjny, zwymiarowany za pomocą współrzędnych D-H:  $\alpha_i = 0, 0, 0$ ;  $l_i = l_1, l_2, 0$ ;  $\lambda_i = 0, 0, \lambda_3$ . (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

$$\begin{bmatrix} l_{0x} & m_{0x} & n_{0x} \\ l_{0y} & m_{0y} & n_{0y} \\ l_{0z} & m_{0z} & n_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & -c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & -s_4 s_5 \\ s_5 c_6 & -s_5 c_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

Stąd

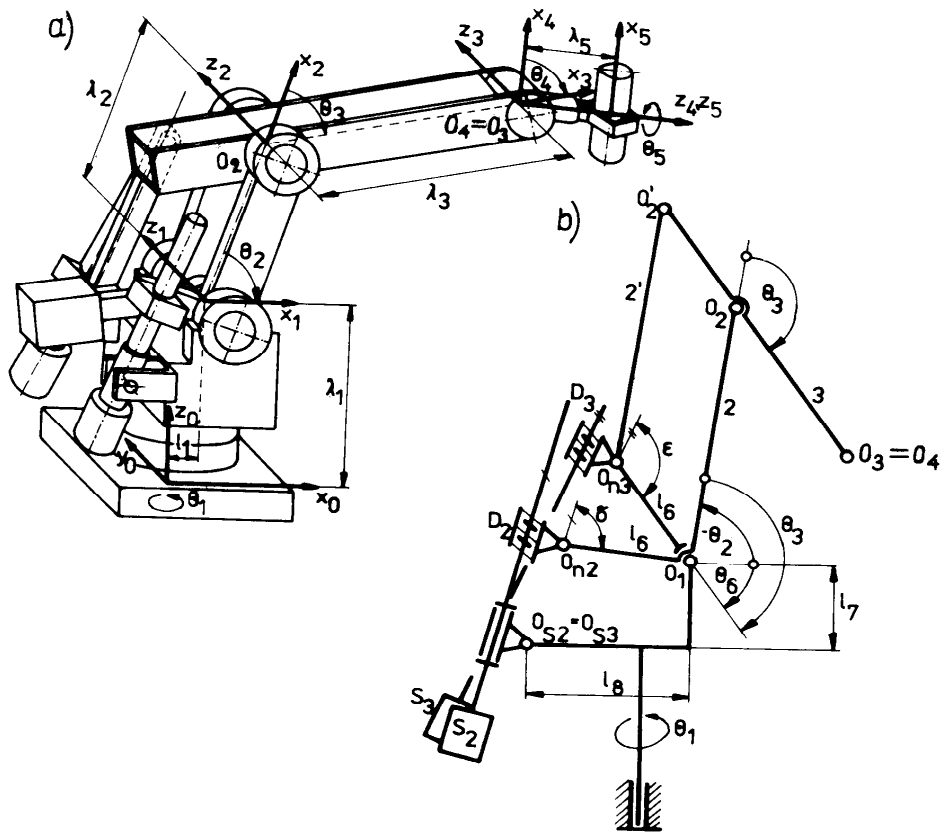
$$\theta_4 = \text{Atan2}(-n_{0y}, -n_{0x}) \quad (4.68)$$

$$\theta_5 = \text{Atan2}(-n_{0y}s_4 - n_{0x}c_4, n_{0z}) \quad (4.69)$$

$$\theta_6 = \text{Atan2}(-m_{0z}s_5 - (m_{0y}s_4 + m_{0x}c_4)c_5, m_{0y}c_4 - m_{0x}s_4) \quad (4.70)$$

**Przykład 4.6.** Wymiary manipulatora robota IRb-60 są następujące:

$$\begin{array}{lcl} \alpha_i & = & -\pi/2, \quad 0, \quad 0, \quad \pi/2, \quad 0 \\ l_i & = & 0,130, \quad 0,800, \quad 1,280, \quad 0, \quad 0 \\ \lambda_i & = & 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0,400 \end{array}$$



Rys. 4.5. Robot IRb-60: a) schemat konstrukcyjny manipulatora; b) schemat kinematyczny napędów śrubowych;  $O_{n2}$  – oś obrotu drugiego napędu,  $O_{n3}$  – trzeciego napędu. (Źródło: Knapczyk, 1990)

Uwzględniając powyższe dane w macierzach  $A_i$ , otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & l_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & l_1 s\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_3 c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & l_3 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Elementy macierzy  $T_{6,5} = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$  są następujące:

$$l_x = c\theta_1 c\theta_5 c\theta_t + s\theta_1 s\theta_5,$$

$$\begin{aligned}
m_x &= s\theta_1 c\theta_5 - c\theta_1 s\theta_5 c\theta_t, \\
n_x &= -c\theta_1 s\theta_t \\
l_y &= s\theta_1 c\theta_5 c\theta_t - c\theta_1 s\theta_5, \\
m_y &= -s\theta_1 s\theta_5 c\theta_t - c\theta_1 c\theta_5, \\
n_y &= -s\theta_1 s\theta_t \\
l_z &= -c\theta_5 s\theta_t, \\
m_z &= s\theta_5 s\theta_t, \\
n_z &= -c\theta_t \\
p_x &= c\theta_1[l_1 + l_2 c\theta_2 + l_3 c(\theta_2 + \theta_3) - \lambda_5 s\theta_t] \\
p_y &= s\theta_1[l_1 + l_2 c\theta_2 + l_3 c(\theta_2 + \theta_3) - \lambda_5 s\theta_t] \\
p_z &= -[l_2 s\theta_2 + l_3 s(\theta_2 + \theta_3) + \lambda_5 c\theta_t]
\end{aligned} \tag{4.71}$$

gdzie  $\theta_t = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ .

Mając dane elementy macierzy  $T_{5,0}$ , można wyznaczyć wartości kątów  $\theta_i$  wg następujących wzorów:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \arctg(n_y/n_x), \\
\theta_5 &= \arctg(-m_z/l_z) \\
\theta_t &= \arctg\left(\pm\sqrt{l_z^2 + m_z^2}/n_z\right) \\
\theta_2 &= 2\arctg\frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B + C},
\end{aligned}$$

gdzie:  $A = \lambda_5 n_z - p_z$  (4.72)

$$\begin{aligned}
B &= (p_x - \lambda_5 n_x - l_1 c\theta_1)/c\theta_1, \\
C &= (A^2 + B^2 + l_2^2 - l_3^2)/2l_2 \\
\theta_1 + \theta_2 &= \arctg\frac{A - l_2 s\theta_2}{B - l_2 c\theta_2}, \\
\theta_4 &= \theta_t - (\theta_2 + \theta_3)
\end{aligned}$$

**Przykład liczbowy.** Dla robota IRb-60 zadano macierz położenia członu roboczego

$$T_{5,0} = \begin{bmatrix} 0,98430 & 0,17357 & 0,03489 & 0,08100 \\ -0,03134 & -0,02324 & 0,99923 & 2,31963 \\ 0,17361 & -0,98464 & -0,01746 & 0,69514 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Należy wyznaczyć wartości kątów  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Według wzorów (4.72) otrzymano

$$\theta_1 = \arctg(0,99923/0,03489) = 88,000^\circ$$

$$\theta_5 = \arctg(0,98464/0,17361) = 80,000^\circ$$

$$\theta_2 = 2\arctg\left[\frac{(-0,70212 \pm 0,92088)/3,48010}{1}\right] = 7,194^\circ \text{ lub } -50,006^\circ$$

przy czym:  $A = -0,70212$ ,  $B = 1,79106$ ,  $C = 1,68904$

$$\theta_i = \arctg\left(\pm\sqrt{0,17361^2 + 0,98464^2}/0,01746\right) = \pm 89,017^\circ$$

$$\begin{aligned} \theta_2 + \theta_3 &= 2\arctg\left[\frac{(-0,70212 - 0,800 \sin 50,006^\circ)}{(1,79106 - 0,800 \cos 50,006^\circ)}\right] = \\ &= -33,997^\circ \end{aligned}$$

$$\theta_3 = -3,997^\circ + 50,006^\circ = 46,009^\circ$$

$$\theta_4 = \pm 89,017^\circ + 3,997^\circ = -85,020^\circ \text{ lub } 93,014^\circ$$

Biorąc pod uwagę ograniczenia zakresów zmiennych, można zaakceptować tylko następujące rozwiązanie:

$$\theta_i = 88,000^\circ, -50,006^\circ, 46,009^\circ, -85,020^\circ, 80,000^\circ$$

Według przedstawionego algorytmu opracowano program obliczeń komputerowych wartości kątów  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), który wykorzystano do planowania trajektorii prostoliniowej między punktami

$$P_0(0,050; 0,740; 0,070) \text{ i } P_k(0,500; 0,200; 0,700)$$

dla ustalonej orientacji członu roboczego

$$n(0,4767; -0,5721; 0,7682) \text{ i } m(0,7682; 0,6402; 0)$$

## 4.2 Zadanie planowania trajektorii manipulatora

Zbiór przebiegów czasowych położenia, prędkości i przyspieszenia pewnego punktu lub członu roboczego manipulatora nazywa się *trajektorią punktu* lub *członu* opisaną *we współrzędnych kartezjańskich*. Natomiast zbiór odpowiednich przebiegów czasowych przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia względnych członów w połączeniach ruchowych członów nazywa się *trajektorią we współrzędnych konfiguracyjnych*. Zadanie wyznaczania takiego zbioru nazywa się *planowaniem trajektorii*.

Planowanie trajektorii manipulatora we współrzędnych konfiguracyjnych polega na obliczeniu przebiegów czasowych przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia w połączeniach ruchowych, które spełniają warunki zadania, np. przemieszczenie obiektu z położenia początkowego w końcowe. Planowanie trajektorii dla takiego zadania rozpoczyna się od rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki dla danych położenia członu roboczego (początkowego i końcowego). Spośród kilku możliwych rozwiązań wybiera się takie, które spełnia dodatkowe warunki, np. najkrótszy czas

ruchu, najmniejsze wartości ekstremalne przyśpieszeń, minimum zużycia energii, omijanie położeń osobliwych itp.

W najprostszym zadaniu planowania ruchu manipulatora, dotyczącym operacji wziąć i położyć (ang. *pick-and-place*) dane są dwa położenia członu roboczego, tzn. początkowe i końcowe, a trzeba wyznaczyć trajektorię między tymi położeniami. Dla manipulatora o  $n$  stopniach swobody wyznacza się współrzędne konfiguracyjne:  $q_{ip}$ ,  $q_{ik}$ , dla  $i = 1, \dots, n$ , przy czym indeksy  $p$  i  $k$  oznaczają konfigurację początkową i końcową. Występuje kilka rozwiązań, ponieważ dla każdego położenia członu roboczego można wyznaczyć kilka konfiguracji manipulatora.

Jeśli nie ma dodatkowych ograniczeń na wartości  $q_i$ , to można zastosować algorytm oparty na priorytecie współrzędnej konfiguracyjnej połączenia ruchowego bliższego podstawy, ponieważ zmiana tej współrzędnej powoduje ruch większej liczby członów manipulatora. Zmiana każdej poprzedniej współrzędnej powoduje ruch większej masy niż zmiana następnej. Zatem priorytet daje się takiemu rozwiązaniu, w którym bezwzględna wartość różnicy ( $q_{1k} - q_{1p}$ ) jest minimalna. Jeśli wartości tej różnicy są takie same dla kilku konfiguracji, to wybiera się tę konfigurację, dla której  $|q_{2k} - q_{2p}|$  ma wartość minimalną itd.

Jeśli zmienne konfiguracyjne spełniają ograniczenia typu:  $q_{i \min} \leq q_i \leq q_{i \max}$ , wtedy wprowadza się co najmniej cztery warunki dotyczące tych zmiennych w położeniu początkowym i końcowym:

$$q_i(t_{ip}) = q_{ip}, \quad q_i(t_{ik}) = q_{ik}, \quad \dot{q}_i(t_{ip}) = \dot{q}_i(t_{ik}) = 0 \quad (4.73)$$

Te cztery warunki mogą być spełnione przez funkcje wielomianowe co najmniej trzeciego stopnia

$$q(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 \quad (4.74)$$

gdzie  $\tau = t/t_k$ ,  $\tau \in [0, 1]$  – unormowana zmienna czasowa.

W celu wyznaczenia wartości czterech niewiadomych współczynników  $a_i$  na podstawie warunków (4.73) zależność (4.74) różniczkuje się względem czasu

$$\dot{q}(\tau) = (a_1 + 2a_2\tau + 3a_3\tau^2)/t_k \quad (4.75)$$

Po podstawieniu zależności (4.74) i (4.75) do równań (4.73) otrzymuje się

$$\begin{aligned} a_0 &= q_p \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= q_k \\ a_1 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

Rozwiązanie układu równań (4.76) względem niewiadomych  $a_i$  jest następujące

$$\begin{aligned} a_0 &= q_p \\ a_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$a_2 = 3(q_k - q_p) \quad (4.77)$$

$$a_3 = -2(q_k - q_p)$$

Zatem planowana trajektoria we współrzędnych konfiguracyjnych będzie

$$q(\tau) = q_p + (3\tau^2 - 2\tau^3)(q_k - q_p) \quad (4.78)$$

Jeśli wymaga się ciągłości trajektorii aż do drugiej pochodnej, to powinny być spełnione następujące warunki

$$\begin{aligned} q(0) &= q_p, & q(t_k) &= q_k \\ \dot{q}(0) &= 0, & \dot{q}(t_k) &= 0 \\ \ddot{q}(0) &= 0, & \ddot{q}(t_k) &= 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

Jeśli wymaga się ciągłości trajektorii, aż do drugiej pochodnej, to powinny być spełnione następujące warunki:

$$\begin{aligned} q(0) &= q_p, & \dot{q}(0) &= 0, & \ddot{q}(0) &= 0, \\ q(t_k) &= q_k, & \dot{q}(t_k) &= 0, & \ddot{q}(t_k) &= 0. \end{aligned}$$

Powyższe sześć warunków może spełnić wielomian 5 stopnia

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu tej zależności otrzymamy

$$\dot{q}(t) = (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4) / t_k$$

$$\ddot{q}(t) = (2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3) / t_k^2$$

$$a_0 = q_p, \quad a_1 = a_2 = 0$$

$$a_3 + a_4 + a_5 = q_k$$

$$3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 0$$

$$6a_3 + 12a_4 + 20a_5 = 0$$

$$a_0 = q_p, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = 10(q_k - q_p),$$

$$a_4 = -15(q_k - q_p), \quad a_5 = 6(q_k - q_p),$$

$$q(t) = q_p + (10t^3 - 15t^4 + 6t^5)(q_k - q_p)$$

### Planowanie trajektorii za pomocą funkcji sklejanej z wielomianów „4-3-4”

Wprowadza się zmienną unormowaną czasu na podstawie wzoru

$$t = \frac{(t - t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})}, \quad t \in [t_{i-1}, t_i]$$

$t_i$  – czas rzeczywisty ukończenia  $i$ -tego odcinka trajektorii,  $(t_i - t_{i-1})$  – przedział czasu rzeczywistego na przejście  $i$ -tego odcinka trajektorii.



Kolejne odcinki trajektorii opisuje się w postaci wielomianów 4-3-4

$$q_1 = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3 + a_{14}t^4$$

$$q_2 = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$

$$q_3 = a_{30} + a_{31}t + a_{32}t^2 + a_{33}t^3 + a_{34}t^4$$

gdzie: indeks  $i$  przy zmiennej konfiguracyjnej  $q_i$  oznacza numer odcinka trajektorii, natomiast indeksy przy współczynnikach  $a_{ij}$  oznaczają:  $i$  – numer odcinka,  $j$  – numer współczynnika.

Zatem prędkości i przyspieszenia na kolejnych odcinkach trajektorii zapisuje się w postaci wielomianowych funkcji zmiennej  $\tau \in [0, 1]$

$$\dot{q}_1(\tau) = (4a_{14}\tau^3 + 3a_{13}\tau^2 + 2a_{12}\tau + a_{11})/t_r$$

$$\ddot{q}_1(\tau) = (12a_{14}\tau^2 + 6a_{13}\tau + 2a_{12})/t_r^2$$

$$\dot{q}_2(\tau) = (3a_{23}\tau^2 + 2a_{22}\tau + a_{21})/t_b$$

$$\ddot{q}_2(\tau) = (6a_{23}\tau + 2a_{22})/t_b^2$$

$$\dot{q}_3(\tau) = (4a_{34}\tau^3 + 3a_{33}\tau^2 + 2a_{32}\tau + a_{31})/t_w$$

$$\ddot{q}_3(\tau) = (12a_{34}\tau^2 + 6a_{33}\tau + 2a_{32})/t_w^2$$

Warunki brzegowe nakładane na funkcje przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń dla punktu początkowego ( $t = t_p$ ) i końcowego ( $t = t_k$ ), dostarczają sześciu równań

#### Przykład liczbowy. Planowanie trajektorii manipulatora typu PUMA 560.

Przyjęto wymiary i zakresy przemieszczeń kątowych w połączeniach obrotowych.

Położenia początkowe i końcowe chwytaka są dane w postaci macierzy  $T_{6,0p}$  i  $T_{6,0k}$

Przyjęto czas ruchu  $t = 3$  s. Obliczono przebiegi wartości przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń, przyjmując, że czasy odcinków rozbiegu, przejściowego i wybiegu są równe, natomiast zakresy przemieszczeń w tych przedziałach mają proporcje 1 :2: 1, tzn.  $t_r = t_b = t_w = 1$ s,  $\dot{q}_p = \ddot{q}_p = \dot{q}_k = \ddot{q}_k = 0$

Tab. 4.1

Wymiary D-H i zakresy przemieszczeń kątowych w połączeniach obrotowych.

$l_i$ [m]	$\lambda_i$ [m]	$\alpha_i$	$(\theta_{i \min}, \theta_{i \max})$
0	0	90	$(-160^\circ, 60^\circ)$
0,432	0,15	0	$(-125^\circ, 25^\circ)$
0	0	-90	$(-135^\circ, 35^\circ)$
0	0,432	90	$(-140^\circ, 40^\circ)$
0	0	-90	$(-100^\circ, 00^\circ)$
0	0,1	0	$(-260^\circ, 60^\circ)$

Położenia początkowe i końcowe członu roboczego są dane w postaci macierzy

$$T_{6,0p} = \begin{bmatrix} -0,0474 & -0,979 & -0,196 & 0,566 \\ 0,789 & -0,157 & 0,594 & 0,225 \\ -0,612 & -0,127 & 0,780 & 0,668 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{6,0k} = \begin{bmatrix} -0,0474 & -0,979 & -0,196 & 0,200 \\ 0,789 & -0,157 & 0,594 & 0,300 \\ -0,612 & -0,127 & 0,780 & 0,400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tab. 4.2

Wyniki obliczeń numerycznych.

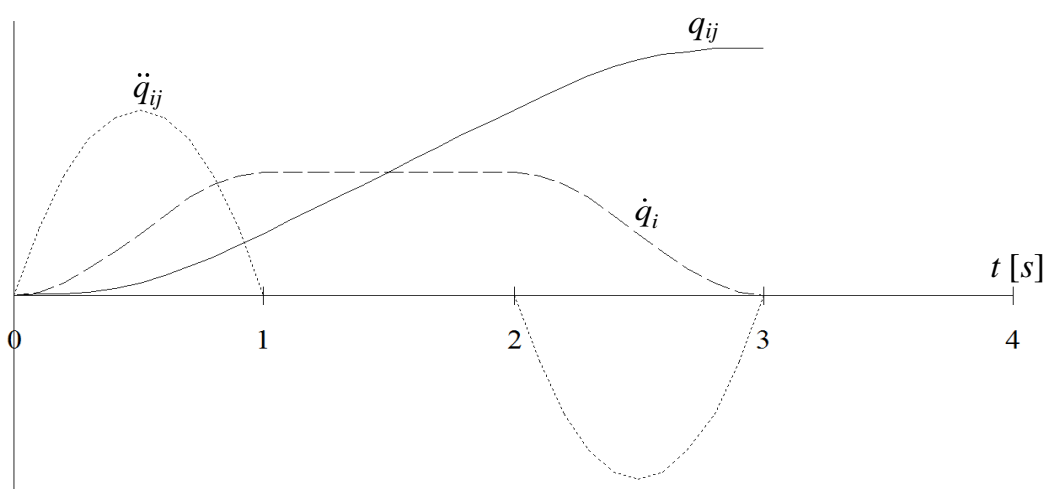
I	1	2	3	4	5	6
$\theta_{ip} [^\circ]$	30	60	-120	-45	60	90
$\theta_{ik} [^\circ]$	75,02	108,00	-209,88	-21,50	69,44	23,29
$\dot{\theta}_{i,extr} [\text{rad/s}]$	0,393	0,419	-0,784	0,205	0,0824	-0,582
$\ddot{\theta}_{i,extr} [\text{rad/s}^2]$	0,589	0,628	1,177	0,308	0,124	0,873

Dla pierwszego połączenia obrotowego w kolejnych przedziałach ruchu otrzymano przemieszczenia kątowe jako funkcje czasu unormowanego w postaci

$$q_{11}(\tau) = -11,256\tau^4 + 22,513\tau^3 + 30$$

$$q_{12}(\tau) = 22,513\tau + 41,256$$

$$q_{13}(\tau) = 11,256\tau^4 - 22,513\tau^3 + 22,513\tau + 63,769$$



Rys. 4.6. Przebiegi czasowe przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń w przegubach manipulatora typu PUMA 560 (przykład). (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

# 5. Przestrzeń robocza, wskaźniki i osiągi funkcjonalne manipulatorów

## 5.1 Wprowadzenie

Roboty przemysłowe są powszechnie stosowane do wykonywania zadań, takich jak: zgrzewanie, spawanie, malowanie lub montaż. Bez względu na różnorodność zastosowań w przemyśle roboty mają wiele wspólnych właściwości geometrycznych. Parametry geometryczne i konstrukcyjne robota przemysłowego zazwyczaj wynikają z warunków optymalnego kompromisu między zwartością i sztywnością przy zachowaniu maksymalnej objętości osiąganego przestrzeni roboczej.

Manipulatory szeregowe mają liczbę par kinematycznych równą liczbie stopni swobody. Większość manipulatorów jest zaprojektowanych tak, że ostatnie  $n-3$  pary obrotowe łańcucha kinematycznego, orientujące człon roboczy, mają osie przecinające się w jednym punkcie nazywanym *środkiem kiści*. Pierwsze trzy pary kinematyczne określają pozycję środka kiści. Dlatego rozróżnia się dwie części struktury manipulatora: strukturę pozycjonowania zwaną regionalną (ramieniem) oraz strukturę orientowania zwaną lokalną (kiścią).

**Struktura pozycjonowania** jest prawie zawsze bardzo uproszczona. Kąty skośności osi połączeń ruchowych są równe 0 lub  $\pm\pi/2$ , a wiele długości członów lub odsunięć równa się zeru. Manipulatory są zazwyczaj skonstruowane z ograniczeniami ruchów w połączeniach ruchowych. Nieograniczony ruch w parach przesuwnych lub śrubowych nie jest możliwy do zrealizowania. Zakresy przemieszczeń i usytuowanie ograniczeń względem położenia zerowego ma wpływ na kształt i wielkość przestrzeni roboczej oraz liczbę możliwych konfiguracji.

Struktura pozycjonowania robota określa kształt przestrzeni roboczej i jej objętość. Można wykazać, że dla manipulatora z sześcioma parami obrotowymi objętość przestrzeni roboczej jest maksymalna, gdy osie pierwszych dwóch par obrotowych przecinają się pod kątem prostym, a oś trzeciej pary obrotowej jest równoległa do osi drugiej pary obrotowej.

**Struktura orientowania** określa zdolności ustalenia lub zmiany orientacji członu roboczego. Jak wykazano, optymalną zdolność orientowania uzyskuje się wówczas, gdy osie ostatnich trzech par obrotowych przecinają się kolejno pod kątem prostym, przy czym pary obrotowe 4 i 6 powinny mieć możliwość obrotu co najmniej o  $2\pi$ , a para obrotowa 5 – co najmniej o  $\pi$ . Jeżeli osie trzech par obrotowych są ortogonalne i przecinają się w jednym punkcie, to są one równoważne przegubowi kulistemu. Zatem idealna struktura manipulatora może być typu: 3R-S (R – para obrotowa, S – para kulista lub 3P-S (P – para przesuwna).

**Osiągalna (całkowita) przestrzeń robocza** jest to miejsce geometryczne punktów członu roboczego (np. środka chwytaka, wierzchołka narzędzia lub środka kiści) osiągniętych przy pełnym wykorzystaniu zakresów ruchów we wszystkich parach kinematycznych. Ponieważ nie do wszystkich miejsc w przestrzeni roboczej można podejść z dowolnego kierunku, dlatego wydziela się tę część przestrzeni, w której człon roboczy może przyjąć dowolną orientację i określa ją jako **przestrzeń manipulacyjną**. W pozostałej części przestrzeni roboczej orientacja członu jest ograniczona.

Zadania, jakie może wykonywać manipulator, są zależne od jego konstrukcji i ogólnych wskaźników, takich jak np. udźwig, szybkobieżność, wymiary przestrzeni roboczej, dokładność i powtarzalność. W pewnych zastosowaniach bierze się pod uwagę wymiary manipulatora, zużycie mocy i koszt. Zdolność udźwigu manipulatora zależy od wymiarów konstrukcyjnych członów, momentów napędowych silników. Zdolność udźwigu jest zależna od miejsca przestrzeni roboczej, konfiguracji manipulatora oraz sił bezwładności.

Rozróżnia się maksymalną prędkość członu roboczego i całkowity czas cyklu poszczególnego zadania. Często fazy przyśpieszania i opóźniania trwają przez większą część cyklu i dlatego zdolność przyśpieszania może być ważniejsza od maksymalnej prędkości.

## 5.2 Analiza przestrzeni roboczej manipulatora

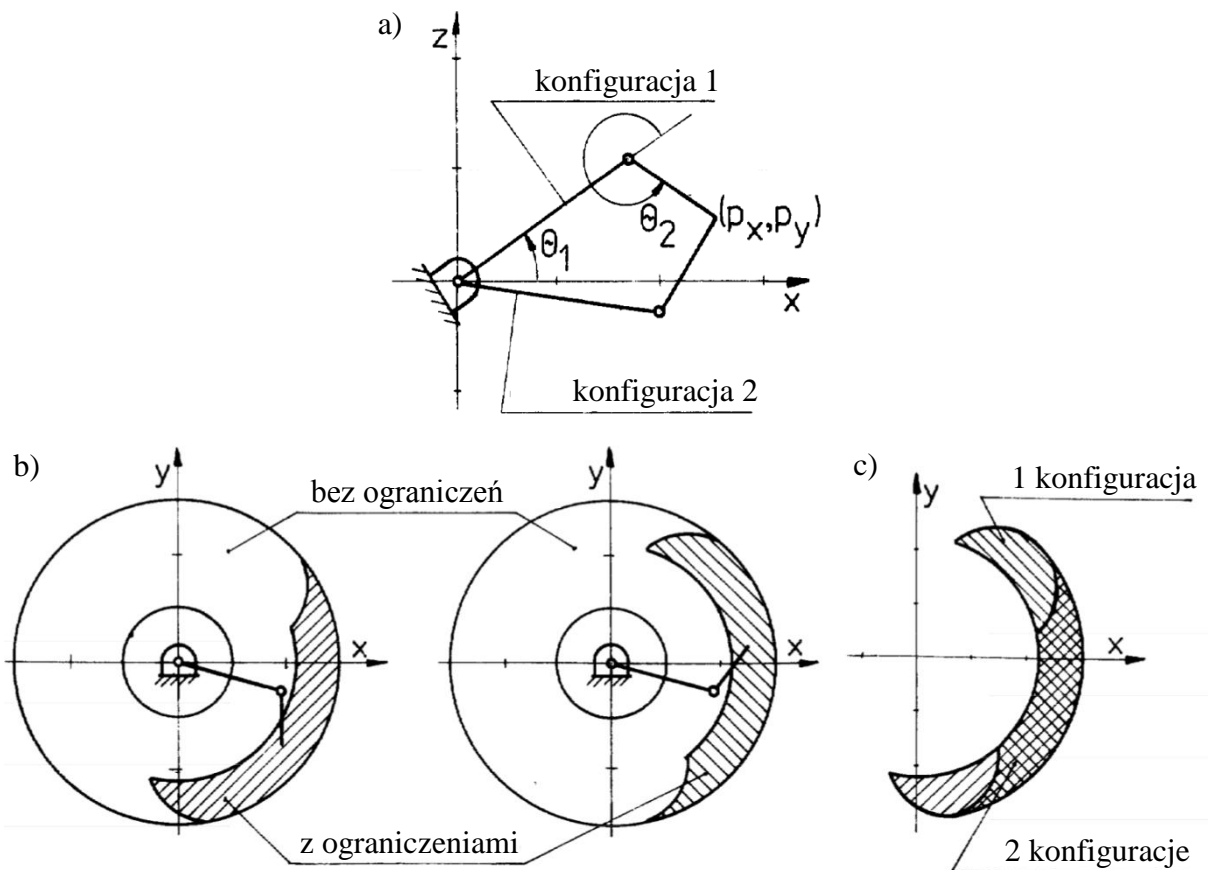
Można wykazać, że przestrzeń robocza manipulatora dzieli się na oddzielne podprzestrzenie, w których człon roboczy może przyjąć zadaną pozycję i orientację w pewnej konfiguracji. Na granicy tych podprzestrzeni jest możliwa zmiana konfiguracji. Granice przestrzeni roboczej  $n$ -członowego robota jest trudno opisać przez ogólne równania przemieszczeń. Łatwiej jest to zrobić za pomocą przekrojów tej przestrzeni i wyznaczenia granicznego konturu na zadanej płaszczyźnie przekroju. Obracając lub przesuwając tę płaszczyznę, otrzymuje się trójwymiarową przestrzeń roboczą.

Manipulatory są zazwyczaj skonstruowane z ograniczeniami ruchów w połączeniach ruchowych. Ograniczenia te wynikają z rozwiązań konstrukcyjnych napędów mechanicznych, hydraulicznych lub elektrycznych. W pewnych przypadkach wymaganą przestrzeń roboczą i liczbę konfiguracji można uzyskać bez konieczności pełnego obrotu w każdym połączeniu obrotowym. Natomiast ograniczenia ruchów w parach przesuwanych lub śrubowych są konieczne. Wpływ tych ograniczeń na kształt i zasięg przestrzeni roboczej oraz liczbę możliwych konfiguracji powinien być znany przy projektowaniu manipulatora i programowaniu jego ruchu.

Można wykazać, że przestrzeń robocza manipulatora dzieli się na dwie odrębne podprzestrzenie. W każdej z tych podprzestrzeni człon roboczy może osiągnąć zadaną pozycję i orientację, przy czym w obu podprzestrzeniach liczba możliwych

konfiguracji jest taka sama. Na powierzchni granicznej, oddzielającej te podprzestrzenie, występuje pokrywanie się pary konfiguracji. Zatem zmiana konfiguracji może wystąpić tylko na odpowiedniej powierzchni granicznej. Dlatego dla każdej konfiguracji można zdefiniować przestrzeń osiągalną i przestrzeń roboczą. Na powierzchni granicznej takiej przestrzeni roboczej podana konfiguracja może pokrywać się z jakąś inną.

**Przykład 5.1.** Płaski manipulator dwuczłonowy z parami obrotowymi może osiągać dowolny punkt leżący w polu roboczym, będąc w jednej z dwóch możliwych konfiguracji (rys. 5.1). Rozważany jest punkt końcowy członu roboczego  $P(p_x, p_y)$ . Krzywą graniczną, oddzielającą pola robocze dla obu konfiguracji, otrzymuje się przyjmując  $\theta_2 = 0$  i  $\theta_2 = \pi$  (rys. 5.2b i c). Pole robocze dla pierwszej konfiguracji odpowiada zakresowi zmiennej  $\theta_1$  w przedziale  $(0, 2\pi)$ , a zmiennej  $\theta_1$  – w przedziale  $(0, \pi)$ .

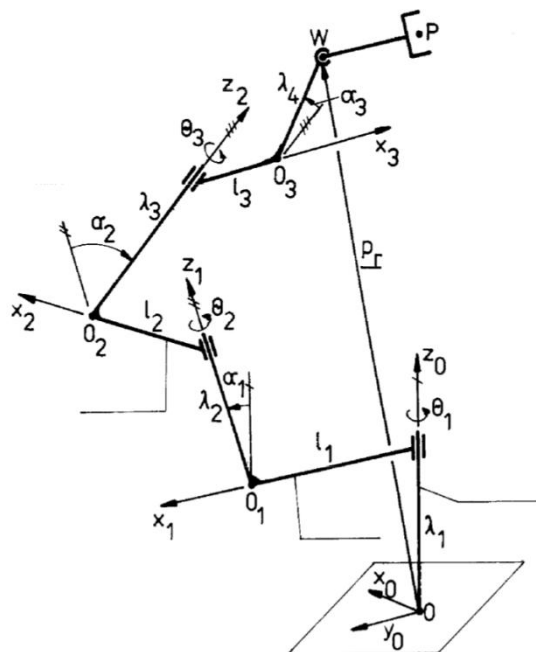


Rys. 5.1. a) Manipulator płaski 2-członowy z parami obrotowymi, osiągający punkt  $(p_x, p_y)$  w dwóch konfiguracjach, b) pole robocze dla konfiguracji bez ograniczeń i z ograniczeniami ruchów w parach obrotowych (pole zakreskowane), c) pole robocze (pole pracy) manipulatora. (Źródło Morecki, Knapczyk 1999)

Jeśli ruch w połączeniach obrotowych jest ograniczony do przedziałów  $-75^\circ \leq \theta_1 \leq 45^\circ$  oraz  $-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ , to ograniczenie nałożone na  $\theta_1$  wpływa symetrycznie na pola pracy obu konfiguracji. Ograniczenie na  $\theta_1$  można natomiast rozdzielić na dwa oddzielne przedziały. Pierwszy przedział  $\pi \leq \theta_2 \leq 3/2\pi$  dotyczy tylko pola roboczego manipulatora w konfiguracji pierwszej. Drugi przedział  $\pi/2 \leq \theta_2 \leq \pi$  może wpływać tylko na pole robocze konfiguracji drugiej. Pola robocze dla obu konfiguracji z powyższymi ograniczeniami pokazano na rys. 5.1 b, c (pole zakreskowane). Pole pracy manipulatora otrzymuje się przez objęcie pól roboczych obu konfiguracji (rys. 5.1c).

W celu przedstawienia analitycznej metody wyznaczania granic przestrzeni roboczej rozważmy ogólny przypadek manipulatora o sześciu parach obrotowych, który można rozdzielić na dwie oddzielne struktury: pozycjonowania i orientacji. Rozdzielenie tych dwóch struktur jest dopuszczalne tylko wtedy, gdy osie trzech ostatnich par obrotowych przecinają się w jednym punkcie, zwanym *środkiem kiści*.

Wyznaczenie przestrzeni roboczej w przestrzeni kartezjańskiej dla dowolnego manipulatora o sześciu parach obrotowych jest zadaniem złożonym i pracochłonnym. Dlatego zazwyczaj ogranicza się to zadanie do wyznaczenia przestrzeni roboczej manipulatora o trzech parach obrotowych przy założeniu, że struktura pozycjonowania ma ogólne parametry geometryczne. W dalszym ciągu będzie pokazane, że równanie zamknięcia łańcucha kinematycznego takiego manipulatora można zapisać w postaci wielomianu czwartego stopnia względem jednej zmiennej, np.  $t = \tan \theta_i$ . Współczynniki tego wielomianu są funkcjami parametrów współrzędnych D-H i współrzędnych kartezjańskich członu roboczego.



Rys. 5.2. Manipulator ma 6 par obrotowych, osie ostatnich 3 par przecinają się w punkcie  $W$ . Oznaczenia:  $l_i, a_i, l_i$  – wymiary geometryczne członu  $i$ ,  $p_r$  – wektor pozycji środka kiści (punktu  $W$ ) względem układu podstawy.

Jak pokazano na rys. 5.2, pozycję środka kiści  $W$  względem układu podstawy można określić za pomocą wektora  $\mathbf{p}_r = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ . Rozwiązując zadanie odwrotne pozycjonowania, otrzymuje się trzy równania względem trzech zmiennych  $\theta_i$

$$\begin{aligned} A c \theta_2 + B s \theta_2 &= l_2 + l_3 c \theta_3 + \lambda_4 s \alpha_4 s \theta_3 \\ -(A s \theta_2 - B c \theta_2) c \alpha_2 + D s \alpha_2 &= \lambda_2 s \alpha_2 + l_3 c \theta_3 - \lambda_4 s \alpha_3 c \theta_3 \\ (A s \theta_2 - B c \theta_2) s \alpha_2 + D c \alpha_2 &= \lambda_2 s \alpha_2 + \lambda_3 - \lambda_4 c \alpha_3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A &= p_x c \theta_1 + p_y s \theta_1 - l_1 \\ B &= -(p_x s \theta_1 - p_y c \theta_1) c \alpha_1 + p_3 s \alpha_1 \\ D &= -(p_x s \theta_1 - p_y c \theta_1) s \alpha_1 + p_3 c \alpha_1 \\ p_3 &= p_z - \lambda_1 \\ \lambda_4 &= \text{przesunięcie środka kiści względem początku układu 3.} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dla zadanej pozycji środka kiści, tzn. dla danych współrzędnych:  $p_x$ ,  $p_y$  i  $p_z$ , rozwiązanie układu (5.1) względem  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  i  $\theta_3$  przedstawia geometryczną konfigurację struktury pozycjonowania. Aby otrzymać jedno równanie względem  $\theta_1$ , trzeba wyeliminować  $\theta_2$  i  $\theta_3$ . W celu wyrugowania  $\theta_3$  pierwsze dwa równania układu (5.1) przekształca się tak, aby po prawych stronach pozostały tylko funkcje  $\theta_3$ , następnie podnosi się je do kwadratu i dodaje stronami. Stąd otrzymuje się

$$(A c \theta_2 + B s \theta_2) l_2 = Q - (p_x c \theta_1 + p_y s \theta_1) l_1 - \lambda_2 D \quad (5.3)$$

gdzie

$$2Q = p_x^2 + p_y^2 + p_3^2 + l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2 - 2\lambda_3\lambda_4 c \alpha_3$$

Zmienną  $\theta_2$  można wyrugować z trzeciego równania układu (5.1) i równania (5.3), przekształcając je do postaci

$$\begin{aligned} (A s \theta_2 - B c \theta_2) l_2 s \alpha_2 &= E \\ (A c \theta_2 + B s \theta_2) l_2 s \alpha_2 &= F \end{aligned} \quad (5.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} E &= (R - D c \theta_2) l_2 \\ F &= [Q - (p_x c \theta_1 - p_y s \theta_1) l_1 - \lambda_2 D] s \alpha_2 \\ R &= \lambda_2 c \alpha_2 + \lambda_3 + \lambda_4 c \alpha_3 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Po podniesieniu do kwadratu i dodaniu stronami równania (5.4) otrzymuje się wielomian trygonometryczny drugiego rzędu względem  $\theta_1$

$$K_1 c^2 \theta_1 + K_2 s^2 \theta_1 + K_3 c \theta_1 s \theta_1 + K_4 c \theta_1 + K_5 s \theta_1 + K_6 = 0 \quad (5.6)$$

gdzie:

$$K_1 = -(p_x^2 + p_y^2) l_2^2 s^2 \alpha_2 + (p_x l_1 - p_y \lambda_2 s \alpha_1)^2 s^2 \alpha_2 + p_y^2 l_2^2 s^2 \alpha_1$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= -(p_x^2 + p_y^2)l_2^2 s^2 \alpha_2 + (p_y l_1 + p_x \lambda_2 s \alpha_1)^2 s^2 \alpha_2 + p_x^2 l_2^2 s^2 \alpha_1 \\
K_3 &= 2[p_x p_y (l_1^2 - \lambda_2 s^2 \alpha_1) + (p_x^2 - p_y^2) l_1 \lambda_2 s \alpha_1] s^2 \alpha_2 - 2 p_x p_y l_2^2 s^2 \alpha_1 \\
K_4 &= 2 \left[ (p_x l_1 - p_y p_3 s \alpha_1 c \alpha_1) l_2^2 s^2 \alpha_2 - (p_x l_1 + p_y p_3 \lambda_2 s \alpha_1) (Q - p_3 \lambda_2 s \alpha_1) s^2 \alpha_2 + \right. \\
&\quad \left. + p_x s \alpha_1 (R - p_3 c \alpha_1 c \alpha_2) l_2^2 \right] \\
K_5 &= 2 \left[ (p_y l_1 - p_x p_3 s \alpha_1 c \alpha_1) l_2^2 s^2 \alpha_2 - (p_y l_1 + p_x p_3 \lambda_2 s \alpha_1) (Q - p_3 \lambda_2 s \alpha_1) s^2 \alpha_2 + \right. \\
&\quad \left. + p_x s \alpha_1 (R - p_3 c \alpha_1 c \alpha_2) l_2^2 \right] \\
K_6 &= -(l_1^2 + p_3^2) l_2^2 s^2 \alpha_2 + (Q - p_3 \lambda_2 c \alpha_1)^2 s^2 \alpha_2 + (R - p_3 c \alpha_1 c \alpha_2)^2
\end{aligned}$$

W końcu po podstawieniu

$$t = \operatorname{tg} \theta_1 / 2, \quad s \theta_1 = 2t / (1 + t^2), \quad c \theta_1 = (1 - t^2) / (1 + t^2)$$

otrzymuje się

$$t^4 + a t^3 + b t^2 + c t + d = 0 \quad (5.7)$$

Warto zwrócić uwagę na dwa przypadki specjalne, które często występują w robotach przemysłowych:

1. Gdy  $\alpha_2 = 0$ , wówczas równanie (5.7) przyjmuje postać

$$(L_1 t^2 + 2L_2 t + L_3)^2 = 0 \quad (5.8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
L_1 &= -R + p_y s \alpha_1 + (p_z - \lambda_1) c \alpha_1 \\
L_2 &= p_y s \alpha_1 \\
L_3 &= -R - p_y s \alpha_1 + (p_z - \lambda_1) c \alpha_1 \\
R &= \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 c \alpha_3
\end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (5.8)

$$\theta_1 = 2 \arctg \left( -L_2 \pm \sqrt{L_2^2 - L_1 L_3} \right) / L_1 \quad (5.9)$$

2. Gdy  $l_2 = 0$ , wówczas równanie (5.7) przyjmuje postać

$$N_1 t^2 + 2N_2 t + N_3 = 0 \quad (5.10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
N_1 &= l_1 p_x - \lambda_2 p_y s \alpha_1 - \lambda_2 (p_z - \lambda_1) c \alpha_1 + Q \\
N_2 &= -(l_1 p_y + \lambda_2 p_x s \alpha_1) \\
N_3 &= l_1 p_x - \lambda_2 p_y s \alpha_1 - \lambda_2 (p_z - \lambda_1) c \alpha_1 + Q \\
Q &= \frac{1}{2} \left[ (p_x^2 + p_y^2 + p_3^2) + (l_1^2 + l_3^2) + (\lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2) - 2 \lambda_3 \lambda_4 c \alpha_3 \right]
\end{aligned}$$



Dla dowolnego punktu z przestrzeni roboczej pozycjonowania istnieją cztery różne rozwiązania równania (5.7) odpowiadające czterem różnym konfiguracjom manipulatora. Jeśli zadany punkt leży poza przestrzenią roboczą, to rozwiązania równania (5.7) będą urojone. Natomiast dla punktu leżącego na granicy będą dwa rozwiązania rzeczywiste identyczne i dwa urojone.

Jeśli rozważymy płaski przekrój przestrzeni roboczej płaszczyzną równoległą do osi  $x_0y_0$  układu współrzędnych podstawy, wtedy granica przestrzeni roboczej jest krzywą zakreśloną przez środek kiści, gdy manipulator obraca się wokół osi pierwszej pary, a człony struktury pozycjonowania są w konfiguracji skrajnej. Położenie przekroju jest określone przez  $p_z$  i dlatego wystarczą dwa równania, które zawierają  $p_x$  i  $p_y$  jako niewiadome współrzędne środka kiści na granicy przestrzeni roboczej. Ponieważ wartość  $\theta_1$  jest tutaj dowolna, zatem przyjmuje się  $\theta_1 = 0$ , a z równania (5.8) otrzymuje się  $d = 0$  i stąd

$$K_1 + K_4 + K_6 = 0 \quad (5.11)$$

gdzie  $K_1$ ,  $K_4$  i  $K_6$  są współczynnikami równania (5.6) i są zależne od  $p_x$  i  $p_y$ . Drugie równanie na  $p_x$  i  $p_y$  można otrzymać z warunku, że równanie (5.7) ma dwa rzeczywiste i identyczne rozwiązania przy  $\theta_1 = 0$ . Zatem różniczkując (5.7) względem  $t$  i podstawiając do otrzymanego równania  $\theta_1 = 0$ , otrzymuje się  $c = 0$ . Stąd

$$K_3 + K_5 = 0 \quad (5.12)$$

Podstawiając  $c = 0$  i  $d = 0$  do równania (5.7), otrzymuje się

$$t^2(t^2 + at + b) = 0 \quad (5.13)$$

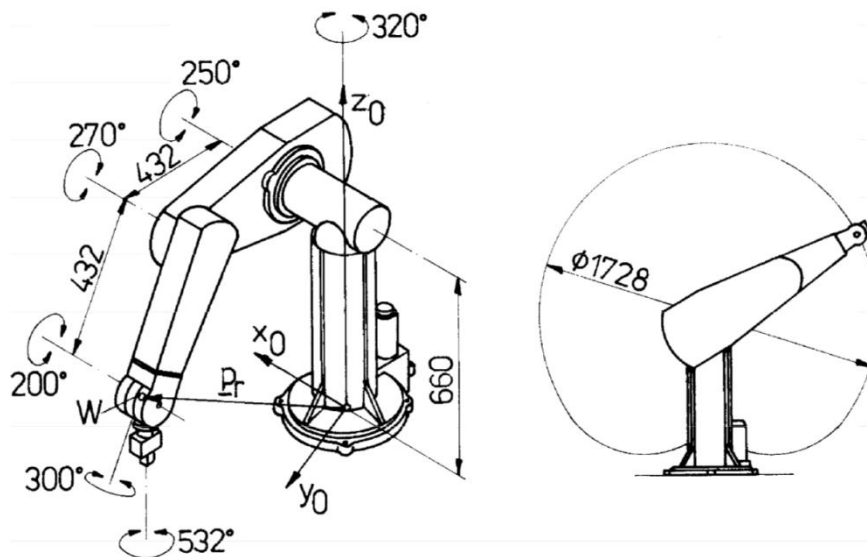
Wykres lewej strony równania (5.13) jest symetryczną funkcją  $\theta_1$  wokół  $\theta_1 = 0$  i periodyczną w przedziale  $-\pi/2 < \theta_1 < \pi/2$ . Jeśli pominąć przypadek trywialny, tzn. gdy wszystkie cztery pierwiastki są równe zero, wtedy dwa niezerowe pierwiastki są zespolone i leżą na linii asymptoty  $\theta_1 = \pm p/2$ . Równania (5.11) i (5.12) stanowią nieliniowy układ równań o dwóch niewiadomych  $p_x$  i  $p_y$ . Wewnętrzną i zewnętrzną granicę przekroju przestrzeni roboczej płaszczyzną równoległą do  $x_0 y_0$  można wyznaczyć z zależności

$$R_{1,2} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (5.14)$$

Zadając nową wartość  $p_3$ , można wyznaczyć nowe wartości  $p_x$  i  $p_y$  dla zewnętrznej i wewnętrznej granicy przestrzeni roboczej. Powtarzając tę procedurę, a następnie wykonując obrót wokół osi  $z_0$ , otrzymuje się trójwymiarowe przedstawienie granic przestrzeni roboczej (rys. 5.3).

Aby uzyskać minimum zużycia energii w czasie pracy robota, przemieszczenia w parach kinematycznych struktury pozycjonowania (regionalnej) powinny być możliwe małe. Zatem korzystnie jest, gdy struktura pozycjonowania ma duże

wymiary, natomiast orientowania – małe. Wtedy przestrzeń robocza jest zdominowana przez strukturę pozycjonowania.



Rys. 5.3. Schemat konstrukcyjny manipulatora PUMA 560 oraz jego przestrzeń robocza.

**Ograniczenia przemieszczeń** w połączeniach ruchowych wynikają z rozwiązań konstrukcyjnych napędów. Wymaganą przestrzeń roboczą oraz liczbę konfiguracji można uzyskać bez konieczności pełnego obrotu w każdym połączeniu obrotowym. Ograniczenia ruchów w parach przesuwnych lub śrubowych są konieczne. Wpływ tych ograniczeń na kształt i zasięg przestrzeni roboczej oraz liczbę możliwych konfiguracji analizuje się przy projektowaniu manipulatora i programowaniu jego ruchu.

**Przestrzeń robocza** manipulatora dzieli się na:

- przestrzeń osiągalną, gdzie człon roboczy może osiągnąć zadaną pozycję,
- przestrzeń manipulacyjną, gdzie osiąga zadaną orientację.

Zależność między objętością przestrzeni roboczej i objętością sześcianu o boku równym łącznej długości członów określa **wskaźnik objętości**

$$k_v = \frac{V}{\left[ \sum_{i=1}^n (l_i + \lambda_i) \right]^3} = \frac{V}{L^3} = \text{const} \quad (5.15)$$

$l_i$  i  $\lambda_i$  – wymiary długości członów i odsunięć w parach obrotowych.

**Wskaźnik objętości**  $k_v$  określa efektywność długości członów ze względu na osiągalną przestrzeń roboczą. Wskaźnik ten może być znormalizowany przez podzielenie go przez maksymalną możliwą wartość, tzn. objętość kuli o promieniu  $L$ .

$$k_{v, \max} = \frac{4\pi L^3/3}{L^3} = \frac{4\pi}{3} = 4,1888$$

Na przykład dla manipulatora PUMA 600 wskaźniki te wynoszą:  $k_v = 1,39$ ;  $k_{v, \text{norm}} = 0,33$ . Natomiast dla manipulatora Cincinnati Milacron T3:  $k_v = 2,23$ ;  $k_{v, \text{norm}} =$

0,53. Ten drugi ma lepsze wykorzystanie długości członów. Manipulator kartezjański ma wskaźnik  $k_V$  maksymalny wówczas, gdy wszystkie trzy pary przesuwne mają tę samą długość przedziału ruchu  $l_i$  i wynosi  $k_V = 1/9 = 0,11$ .

Dla manipulatora typu SCARA przyjęto wymiary liniowe:  $l_1 = l_2 = l/2$  oraz  $\lambda_3$ . Przyjęto, że nie występują ograniczenia ruchów w połączeniach ruchowych. Suma długości członów manipulatora wynosi

$$L = l_1 + l_2 + \lambda_3 = l + \lambda_3$$

Ponieważ przestrzeń robocza jest cylindrem o promieniu  $l$  i wysokości  $l_3$

$$V = p l^2 \lambda_3$$

Maksymalną wartość wskaźnika objętości  $k_V$  otrzymuje się wówczas, gdy  $\lambda_3 = l/2$  i wynosi

$$k_V = \frac{\pi l^3}{2\left(\frac{3}{2}l\right)^3} = \frac{2\pi}{9} = 0,6981$$

Liczbę możliwych konfiguracji oblicza się wg wzoru:  $k = 2^{p-1}$ , gdzie  $p$  - liczba przegubów obrotowych.

**Położenia osobliwe** manipulatora charakteryzuje możliwość zmiany konfiguracji. W położeniach osobliwych manipulator traci jeden lub więcej stopni swobody, co może oznaczać, że pewne zadania nie mogą być wykonane. W sąsiedztwie punktów osobliwych działania manipulatora nie mogą być dobrze uwarunkowane. Im położenie manipulatora jest bardziej odległe od punktu osobliwego, tym bardziej jest on zdolny do jednostajnego ruchu i wywierania ustalonych sił we wszystkich kierunkach.

Położenia osobliwe są wyznaczane jako rozwiązanie równania

$$\det(J(Q)) = 0 \quad (5.16)$$

Wartości wyznacznika jacobianu dają kryterium oceny manewrowości manipulatora.

$$w = \sqrt{\det(J(\Theta)) J^T(\Theta)} \quad (5.17)$$

Dla manipulatora nieredundantnego wskaźnik  $w$  przyjmuje postać

$$w = |\det(J(\Theta))| \quad (5.18)$$

Dobre rozwiązanie manipulatora cechuje duża objętość jego przestrzeni roboczej wykazujący wysoką wartość  $w$ . Proponowane były również inne miary właściwości oparte na analizie przyspieszeń lub zdolności wywierania sił przez człon roboczy we wszystkich kierunkach.

## 5.3 Analiza dokładności manipulatora

W wielu przemysłowych zastosowaniach robotów, np. przy automatycznym montażu zespołów elektronicznych, wykorzystuje się roboty o wysokiej dokładności działania. W takim robocie powinny być spełnione pewne warunki: odpowiednie sztywności członów i układów napędowych oraz odpowiednie dokładności układów sterowania.

**Dokładność** określa zdolność manipulatora do osiągnięcia zaprogramowanego położenia członu roboczego, którego odległość od położenia osiągniętego jest miarą dokładności.

**Powtarzalność** jest pojęciem najczęściej stosowanym przy ilościowej ocenie zdolności manipulatora do przemieszczania członu roboczego w to samo położenie przy kolejnych próbach. Odchylenie średnie (lub maksymalne) powtarzanych położzeń od położenia zadanego jest miarą powtarzalności.

Większość współczesnych robotów przemysłowych ma powtarzalność znacznie lepszą od dokładności. Powtarzalność jest ważna w przypadku „nauczania” manipulatora przez przemieszczanie do pożądanego położenia za pomocą programatora przenośnego. Natomiast w przypadku programowania ruchu manipulatora metodą „off-line” dokładność manipulatora staje się ważniejsza, a zatem występuje potrzeba analizy odchyłeń pozycjonowania i orientacji.

Niedokładności (odchylenia, błędy) pozycjonowania i orientacji członu roboczego manipulatora są funkcjami położenia i konfiguracji manipulatora, a wynikają z wielu przyczyn, takich jak np. odchyłki wymiarowe wykonania (tolerancje), odkształcenia sprężyste członów w układach napędowych oraz niedokładności ustawienia zmiennych konfiguracyjnych.

Aktualne wartości parametrów współrzędnych Denavita-Hartenberga na ogół nie są równe wartościom nominalnym. Zazwyczaj wykazują losowe wartości odchyłek, tzn.

$$l_i + \Delta l_i, \quad a_i + \Delta a_i, \quad q_i + \Delta q_i,$$

przy czym niedokładności czujników położenia i wzorcowania mogą spowodować wystąpienie odchyłeń ustawienia:  $\Delta q_i$  w parach obrotowych i  $\Delta l$  w parach przesuwnych, a tolerancje wykonania – wystąpienie odchyłek wymiarów:  $\Delta a_i$  i  $\Delta l_i$ .

Jeśli przyjmiemy, że wszystkie odchyłki są tego samego rzędu, to wektor niedokładności orientacji układu odniesienia członu  $i$  względem układu odniesienia członu  $i-1$  można określić wg wzoru

$$\Delta \delta_{i,i-1} = \Delta a_i \mathbf{l}_i + \Delta q_i \mathbf{n}_{i-1} \quad (5.19)$$

gdzie:  $\mathbf{l}_i$ ,  $\mathbf{m}_i$ ,  $\mathbf{n}_i$  oznaczają wersory osi układu odniesienia  $i$ .

Niedokładność pozycjonowania punktu  $O_i$  (początku układu odniesienia  $i$ ) względem punktu  $O_{i-1}$  (początku układu odniesienia  $i-1$ ) jest zależny od błędów wszystkich parametrów. Zatem

$$\Delta \mathbf{p}_{i,i-1} = \Delta l_i \mathbf{l}_i + \Delta l_i \mathbf{n}_i + \Delta \alpha_i l_i (\mathbf{l}_i \times \mathbf{n}_{i-1}) + \Delta q_i l_i (\mathbf{n}_{i-1} \times \mathbf{l}_i) \quad (5.20)$$

Założono, że wartości odchyłek ustawień zmiennych konfiguracyjnych i tolerancji wymiarów są małe w porównaniu z wartościami zmiennych i wymiarów nominalnych, zatem niedokładności pozycjonowania i orientacji członu roboczego mogą być rozważane jako różniczki zupełne:

$$\Delta \mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \lambda} \Delta \lambda + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta} \Delta \theta \quad (5.21)$$

$$\Delta \boldsymbol{\delta} = \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \theta} \Delta \theta \quad (5.22)$$

$\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$  – wektor pozycji układu członu roboczego względem podstawy;

$\boldsymbol{\delta} = [\delta_x \ \delta_y \ \delta_z]^T$  – wektor orientacji członu roboczego,

$\mathbf{l} = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]^T$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n]^T$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T$  – wektory wymiarów liniowych i kątowych członów manipulatora;

$\Delta l_i$  i  $\Delta \alpha_i$  – odchyłki (tolerancje) wymiarów liniowych i kątowych;

$\Delta q_i$  – odchyłka ustawienia zmiennej konfiguracyjnej w parze obrotowej;

$\Delta \lambda_i$  – odchyłka ustawienia zmiennej konfiguracyjnej w parze przesuwnej.

W analizie dokładności manipulatora są rozważane tylko odchyłki ustawień ( $\Delta \theta_i$  i/lub  $\Delta \lambda_i$ ), ponieważ rzeczywiste wartości wymiarów geometrycznych mogą być zidentyfikowane w wyniku cechowania (kalibracji) i odpowiednio skompensowane.

Macierz pochodnych cząstkowych wektora pozycji  $\mathbf{p}$  dla manipulatora zawierającego  $n$  połączeń obrotowych ma wymiar  $3 \times n$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial p_x}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial p_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial p_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_z}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial p_z}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Małe przyrosty wektorów pozycji i orientacji mogą być wyrażone przez macierz jacobianową (5.23)

$$\begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\delta} \\ \Delta \mathbf{p} \end{bmatrix} = \mathbf{J}[\Delta \boldsymbol{\theta}] \quad (5.24)$$

gdzie

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{1x} & \gamma_{2x} & \cdots & \gamma_{nx} \\ \gamma_{1y} & \gamma_{2y} & \cdots & \gamma_{ny} \\ \gamma_{1z} & \gamma_{2z} & \cdots & \gamma_{nz} \\ \beta_{1x} & \beta_{2x} & \cdots & \beta_{nx} \\ \beta_{1y} & \beta_{2y} & \cdots & \beta_{ny} \\ \beta_{1z} & \beta_{2z} & \cdots & \beta_{nz} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

przy czym  $\mathbf{J}$  jest macierzą  $(6 \times n)$ , której elementy mogą być wyrażone w układzie członu roboczego. Dla pary obrotowej

$$\boldsymbol{\gamma}_i = [l_z \quad m_z \quad n_z]_{i-1}^T, \quad \boldsymbol{\beta}_i = [(l_y p_x - l_x p_y) \quad (m_y p_x - m_x p_y) \quad (n_y p_x - n_x p_y)]_{i-1}^T$$

a dla pary przesuwnej

$$\boldsymbol{\gamma}_i = [0 \quad 0 \quad 0]_{i-1}^T, \quad \boldsymbol{\beta}_i = [l_z \quad m_z \quad n_z]_{i-1}^T$$

gdzie indeks  $i-1$  u dołu wektorów  $\boldsymbol{\gamma}_i$  i  $\boldsymbol{\beta}_i$  oznacza, że wersory  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  i wektor  $\mathbf{p}$  są odniesione do układu  $i-1$ . Wektory różniczkowego przesunięcia i obrotu członu roboczego odniesione do układu tego członu są następujące:

$$\Delta \boldsymbol{\delta} = \sum_{i=1}^6 \boldsymbol{\gamma}_i \Delta \theta_i, \quad \Delta \mathbf{p} = \sum_{i=1}^6 \boldsymbol{\beta}_i \Delta \theta_i \quad (5.26)$$

gdzie  $\Delta \boldsymbol{\delta} = [\Delta \delta_x \quad \Delta \delta_y \quad \Delta \delta_z]^T$  i  $\Delta \mathbf{p} = [\Delta p_x \quad \Delta p_y \quad \Delta p_z]^T$  oznaczają wektory odchyłek pozycjonowania i orientacji. Jeśli wektory  $\Delta \boldsymbol{\delta}$  i  $\Delta \mathbf{p}$  pomnoży się przez macierz  $\mathbf{T}_{6,0}$ , to otrzyma się te wektory wyrażone w układzie odniesienia podstawy.

Wektory (5.26) można ująć w postaci macierzy niedokładności (błędu) w układzie odniesienia członu roboczego

$$\Delta^n = \begin{bmatrix} 0 & \Delta \delta_z & \Delta \delta_y & \Delta p_x \\ \Delta \delta_z & 0 & -\Delta \delta_x & \Delta p_y \\ -\Delta \delta_y & \Delta \delta_x & 0 & \Delta p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Macierz tę można przekształcić do układu odniesienia podstawy wg wzoru

$$\Delta = \mathbf{T}_n \Delta^n \quad (5.28)$$

W rzeczywistości niedokładności te są zależne od położenia i konfiguracji, a zatem trudno jest przewidzieć wszystkie możliwe niedokładności. Zwykle wektor odchyłek zmiennych konfiguracyjnych określa się przez górne i dolne granice

$$-\Delta \boldsymbol{\Theta}^d \leq \Delta \boldsymbol{\Theta} \leq \Delta \boldsymbol{\Theta}^g$$

Niedokładności pozycjonowania i orientacji są zatem zawarte w objętościach pewnych brył, które nazywa się **bryłami tolerancji**. Analiza niedokładności jest względnie

prosta, jeśli odchyłki  $\Delta\Theta$  są traktowane jako zmienne zdeterminowane. Jednak przy takim podejściu otrzymuje się w wyniku przypadek najgorszy.

Bryły tolerancji otrzymuje się, biorąc bezwzględne wartości elementów macierzy jacobianowej i maksymalne wartości bezwzględne odchyłek zmiennych konfiguracyjnych w równaniu (5.28). Zatem niedokładności pozycjonowania i orientacji są określone przez nierówności:

$$-\Delta\mathbf{p}^* \leq \Delta\mathbf{p} \leq \Delta\mathbf{p}^*, \quad -\Delta\delta^* \leq \Delta\delta \leq \Delta\delta^*$$

gdzie:  $\Delta\mathbf{p}^* = \sum_{i=1}^6 |\beta_i| \Delta\theta_i^*$ ,  $\Delta\delta^* = \sum_{i=1}^6 |\gamma_i| \Delta\theta_i^*$  przy czym  $\Delta\theta_i^* = \max(\Delta\theta_i^d, \Delta\theta_i^s)$ .

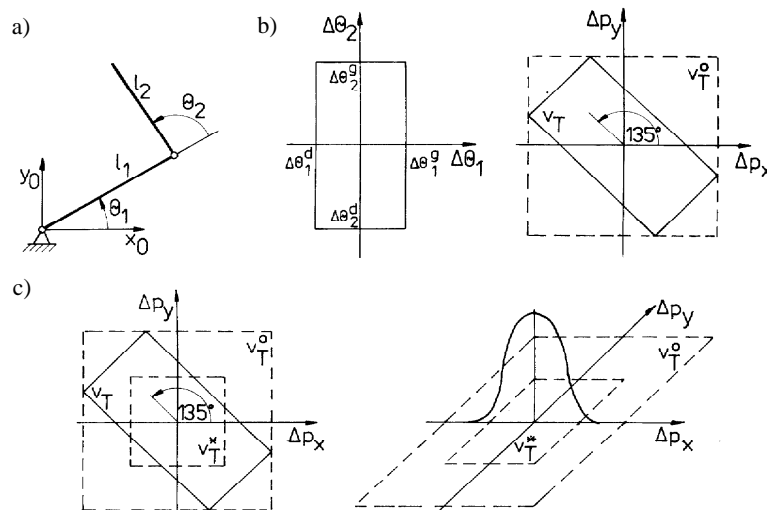
**Przykład 5.3.** Dla manipulatora płaskiego o dwóch parach obrotowych macierz jacobianowa przyjmuje postać

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 s(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) & l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Przyjęto wartości wymiarów:  $l_2 = 1,4142$ ,  $l_1 = 1,000$  oraz wartości zmiennych konfiguracyjnych:  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 135^\circ$ . Stąd

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -0,7071 & -0,7071 \\ 0,7071 & -0,7071 \end{bmatrix}$$

Zgodnie z zależnością (5.21) otrzymana macierz jacobianowa odpowiada obrotowi wektora  $\Delta\Theta$  o kąt  $135^\circ$  w przeciwną stronę do ruchu wskazówek zegara. Pole tolerancji  $V_T^o$  (rys. 5.4b), otrzymane w wyniku podejścia deterministycznego, pokrywa całkowicie pole  $V_T$  rozumiane jako przedział ufności w podejściu probabilistycznym. Przyjmując mały udział niepokrywania się, np. 0,3, można otrzymać pole tolerancji  $V_T^*$  znacznie mniejsze od  $V_T^o$ , co pokazano na rys. 5.4c.



Rys. 5.4. a) Schemat manipulatora o dwóch parach obrotowych, b) pole przedziałów zmiennych konfiguracyjnych przekształcone w pole tolerancji pozycjonowania  $V_T$ , c) pole tolerancji pozycjonowania  $V_T^o$  zmniejszone do  $V_T^*$  przy normalnym rozkładzie zmiennych.

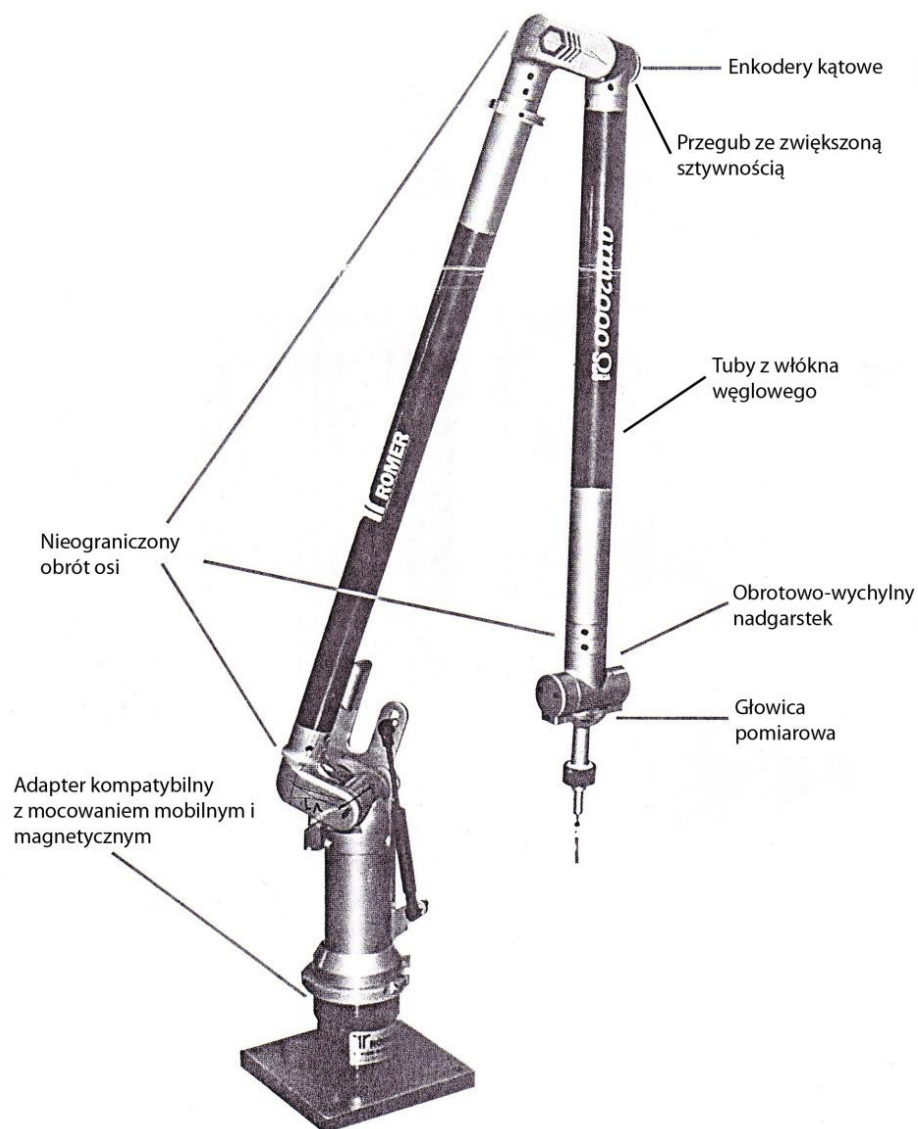
## 5.4 Analiza dokładności manipulatora pomiarowego

Manipulator pomiarowy, jako współrzędnościowe ramię pomiarowe, jest urządzeniem przenośnym, wykorzystywanym w otoczeniu produkcji, a ponadto do pomiarów wewnątrz obiektów wielkogabarytowych. Wykazuje zalety, dzięki którym wykazuje potencjalnie szeroki zakres zastosowań w systemach mobilnej metrologii współrzędnościowej. Wykorzystanie ramion pomiarowych jako narzędzi mobilnej kontroli dokładności pozwala na znaczne przyspieszenie procesu pomiaru bezpośrednio na stanowisku wytwarzania czy montażu. Wzrost wymagań jakościowych w obszarze przemysłu samochodowego, lotniczego czy elektromechanicznego prowadzi do koniecznej specyfikacji wymagań wymiarowo-kształtowych i związanej z tym technologii pomiarów, stąd zapotrzebowanie na systemy mobilne takie jak ramiona pomiarowe.

Manipulator pomiarowy zwykle ma sześć par obrotowych: dwie pary obrotowe „ramienia”, jedna do obrotu wokół osi pionowej, a druga do podnoszenia ramienia, trzecia para obrotowa, zwana „łokciem”, a ostatnie dwie lub trzy pary obrotowe tworzą kiść przy członie roboczym manipulatora. W powszechnie stosowanych konfiguracjach kiści występują dwie lub trzy pary obrotowe o osiach prostopadłych i przecinających się. Konfiguracja trzech wzajemnie prostopadłych osi gwarantuje, że człon roboczy może osiągnąć dowolną orientację (przyjmując, że nie ma ograniczeń przemieszczeń kątowych w parach obrotowych).

Na rysunku 5.5 przedstawiono ramię Sigma. Człony o kształcie tuby wykonane są z włókna węglowego, co zapewnia stosunkowo dużą sztywność i małą podatność na wpływ temperatury. Ramię wyposażone jest we własne zasilanie i bezprzewodową komunikację WIFI. W poszczególnych przegubach wmontowane są enkodery kątowe, które zerowane są przy przejściu przez pozycje „zerowe” w trakcie uruchamiania i przygotowania ramienia do pomiaru. Jeden z przegubów ma zwiększoną sztywność. Z przegubem obrotowo-wychylnym połączona jest głowica pomiarowa wyposażona w trzpień pomiarowy, najczęściej z końcówką kulistą. Podstawowy zestaw końcówek pomiarowych, wykonanych z rubinu ma średnice 6 i 15mm. W wyposażeniu jest też końcówka o promieniu zerowym. Ramię to wykonywane jest o różnych zakresach pomiarów od 1,800m do 5,200m.



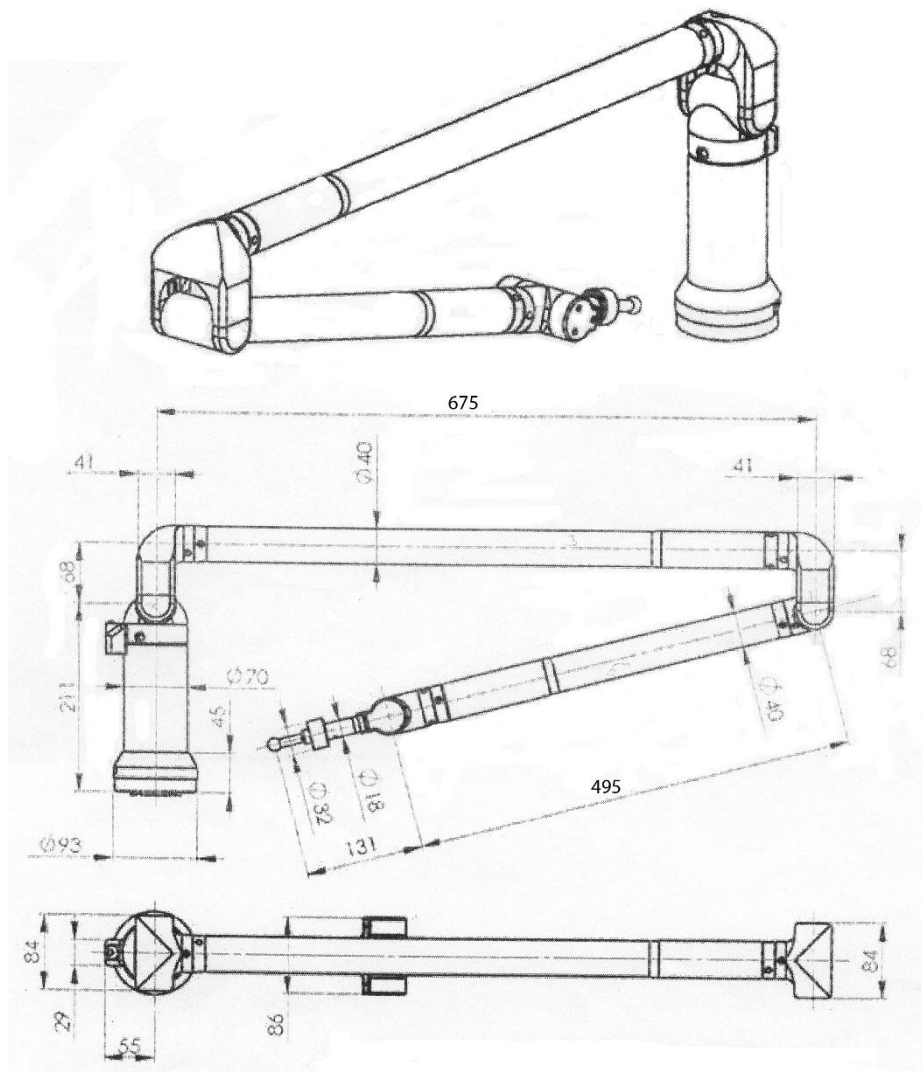


Rys.5.5. Współrzędnościowe ramię pomiarowe Sigma.

Tab. 5.1

*Parametry techniczne współrzędnościowego ramienia pomiarowego Sigma.*

Model	Zakres pomiarowy [mm]	Powtarzalność Test kuli [mm]	Powtarzalność Test stożka [mm]	Dokładność Pomiar długości [mm]	Waga [kg]	Rozdzielczość enkodera pierwszej osi [punktów/obrót]	Rozdzielczość pozostałych enkoderów [punktów/obrót]
2025	2500	± 0.017	± 0.024	± 0.034	5.0	1280000	640000

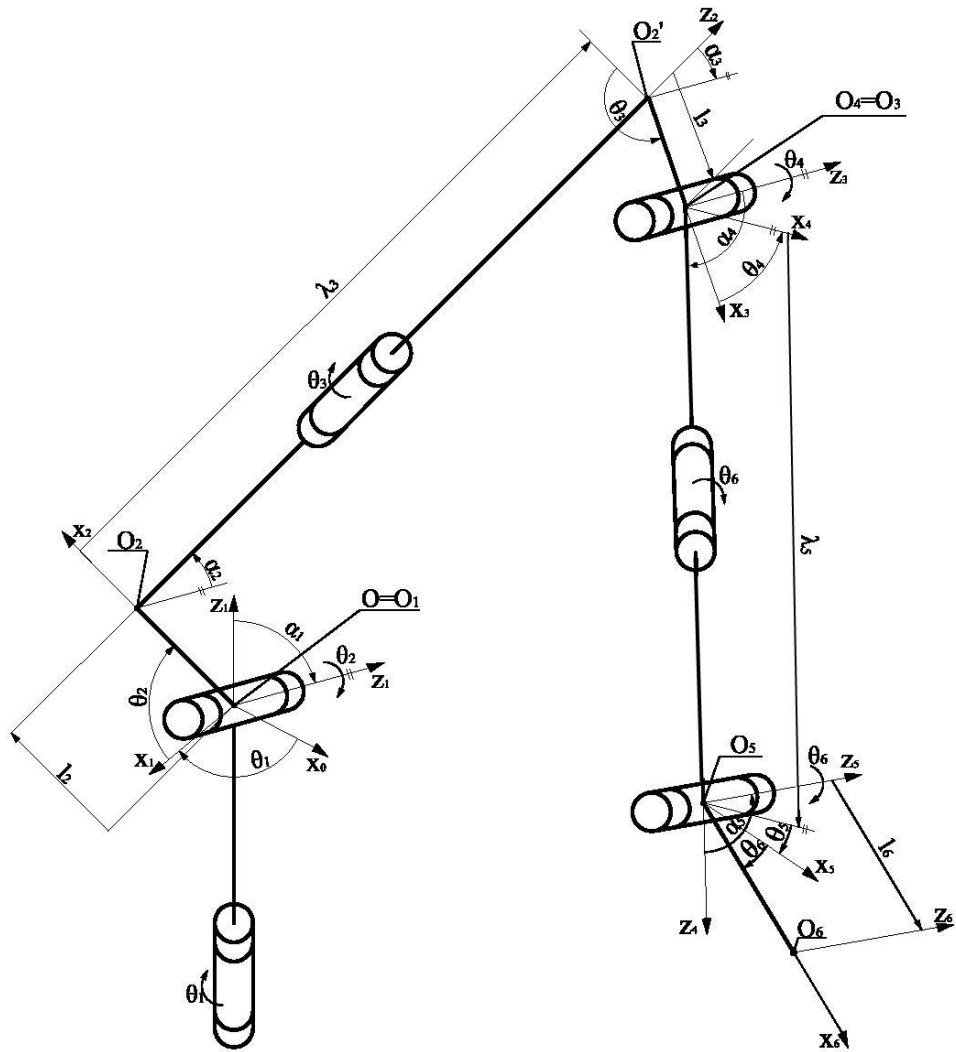


Rys. 5.6. Wymiary gabarytowe ramienia pomiarowego Sigma.

Tab. 5.2

Parametry geometryczne ramienia pomiarowego, zwymiarowanego za pomocą współrzędnych D-H.

$\theta_1=var$	$\theta_2=var$	$\theta_3=var$	$\theta_4=var$	$\theta_5=var$	$\theta_6=var$
$l_1=0$	$l_2=68$	$l_3=68$	$l_4=0$	$l_5=0$	$l_6=131\text{mm}$
$\lambda_1=211$	$\lambda_2=0$	$\lambda_3=675$	$\lambda_4=0$	$\lambda_5=495$	$\lambda_6=0 \text{ mm}$
$\alpha_1=-90^\circ$	$\alpha_2=-90^\circ$	$\alpha_3=-90^\circ$	$\alpha_4=-90^\circ$	$\alpha_5=90^\circ$	$\alpha_6=0$



Rys. 5.7. Model ramienia pomiarowego z 6 parami obrotowymi zwymiarowany za pomocą współrzędnych D-H.

W każdym cyklu pracy końcówka pomiarowa manipulatora jest ustawiona w pewnym ustalonym punkcie  $P_0=O_6$ , opisanym przez wektor pozycji o współrzędnych nominalnych

$$\mathbf{p}^0 = [p_x^0, p_y^0, p_z^0]^T$$

Jednak rzeczywiste wartości tych współrzędnych są pewnymi funkcjami kątów pozycjonowania

$$\theta_i = \theta_i^0 + \Delta\theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

gdzie  $\theta_i^0$  - wartości nominalne kątów pozycjonowania, które w każdym powtarzalnym cyklu pracy są realizowane z pewnym małym błędem losowym  $\Delta\theta_i$ .

Niedokładność pozycjonowania punktu pomiarowego może być przedstawiona jako wektor o trzech współrzędnych

$$\Delta p_x = p_x - p_{x0}, \quad \Delta p_y = p_y - p_{y0}, \quad \Delta p_z = p_z - p_{z0}$$

gdzie  $p_x, p_y, p_z$  oznaczają aktualne współrzędne pozycji końcówki pomiarowej,

$p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}$  – współrzędne pozycji nominalnej.

Jeżeli wartości  $\Delta\theta_i$  małych odchyłek zmiennych niezależnych są znane, to składowe wektora błędu można obliczyć ze zlinearyzowanych zależności:

$$\begin{aligned}\Delta p_x &= \frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 + \frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial p_x}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 + \dots + \frac{\partial p_x}{\partial \theta_6} \Delta \theta_6 \\ \Delta p_y &= \frac{\partial p_y}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 + \frac{\partial p_y}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial p_y}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 + \dots + \frac{\partial p_y}{\partial \theta_6} \Delta \theta_6 \\ \Delta p_z &= \frac{\partial p_z}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 + \frac{\partial p_z}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial p_z}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 + \dots + \frac{\partial p_z}{\partial \theta_6} \Delta \theta_6\end{aligned}\tag{5.28}$$

Stąd

$$\Delta p = \sqrt{\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 + \Delta p_z^2}$$

Wartość  $\Delta p$  można porównać z wartością podaną przez producenta i wynoszącą  $\pm 0.034\text{mm}$ .

# 6. Statyka, sztywność i dynamika manipulatorów

## 6.1 Statyka manipulatorów

Każde z połączeń ruchowych manipulatora zazwyczaj ma oddzielny napęd. Siły i momenty napędowe w połączeniach ruchowych równoważą obciążenia przenoszone przez człony mechanizmu manipulatora, gdy na człon roboczy (chwytek) oddziałują siła i moment siły oddziaływania otoczenia. Zależności między siłami i momentami sił wejściowych (napędowych) i wyjściowych (działających na człon roboczy) wykorzystuje się w układzie sterowania.

Siły i momenty sił są wielkościami wektorowymi, opisanymi w określonym układzie współrzędnych. Wektor siły oznaczono przez  $F$ , natomiast wektor momentu siły –  $M$ . Wektor siły przyjęto jako działający w początku układu odniesienia członu.

Jeśli dane są, działające na człon, para sił i siła przyłożona w początku układu współrzędnych, związanego z tym członem, to można znaleźć równoważną siłę i moment sił, działające na ten człon, lecz opisane w innym układzie współrzędnych, również związanym z tym członem. W celu rozwiązania takiego zadania korzysta się z zasady prac przygotowanych. Rozpatruje się siłę i moment sił, przyłożone do członu i wywołujące różniczkowe przemieszczenie, tzw. przygotowane (wirtualne), a zatem wykonujące pracę przygotowaną. Ponieważ przemieszczenie jest nieskończenie małe i nie zmienia energii układu mechanicznego, więc suma prac przygotowanych wszystkich sił działających na człon jest równa zeru.

Pracę przygotowaną, wynikającą z działania siły  $F$ , określa się wg wzoru

$$\delta W = F^T d \quad (6.1)$$

przy czym

$$F = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z]^T \quad (6.1a)$$

$$d = [d_x \ d_y \ d_z \ \delta_x \ \delta_y \ \delta_z]^T$$

gdzie  $d$  – wektor różniczkowego przemieszczenia, złożony z wektorów przesunięcia i obrotu.

To samo przemieszczenie  $d_j$  członu  $i$  może być spowodowane przez obciążenie  $F_j$ , tzn. parę sił i siłę, działającą w innym punkcie tego członu, opisane w układzie  $j$ , a wykonujące taką samą pracę przygotowaną

$$F_i^T d_i = F_j^T d_j \quad (6.2)$$

Ponieważ przemieszczenie przygotowane  $\mathbf{d}_j$ , opisane w układzie  $j$ , jest równoważne przemieszczeniu  $\mathbf{d}_i$  w układzie  $i$ , zatem

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{J} \mathbf{d}_i \quad (6.3)$$

gdzie  $\mathbf{J}$  – jakobian (macierz Jacobiego) opisujący przekształcenie nieskończenie małego przemieszczenia z układu  $i$  do układu  $j$ .

Po podstawieniu (6.3) do (6.2) otrzymuje się

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{J}^T \mathbf{F}_j \quad \text{lub} \quad \mathbf{F}_i^T = \mathbf{F}_j^T \mathbf{J} \quad (6.4)$$

Jeśli orientację i pozycję układu  $i$  względem  $j$  opisze się za pomocą macierzy

$$\mathbf{T}_{i,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{l} & \mathbf{m} & \mathbf{n} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

to zależność (6.4), przy uwzględnieniu (6.1a), można rozwinąć we współrzędnych

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{j,x} &= \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{F}_i \times \mathbf{p}) + \mathbf{M}_i] \\ \mathbf{M}_{j,y} &= \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{F}_i \times \mathbf{p}) + \mathbf{M}_i] \end{aligned} \quad (6.5a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{j,z} &= \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{F}_i \times \mathbf{p}) + \mathbf{M}_i] \\ \mathbf{F}_{j,x} &= \mathbf{l} \cdot \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_{j,y} &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{F}_i \end{aligned} \quad (6.5b)$$

$$\mathbf{F}_{j,z} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_i$$

**Przykład 6.1.** Dane są siła i moment sił działające na człon 6 i opisane w układzie podstawy 0:  $\mathbf{F} = [10 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{M} = [0 \ 100 \ 0]^T$ , a należy wyznaczyć równoważne siłę i moment, wyrażone w układzie członu 6, przy czym

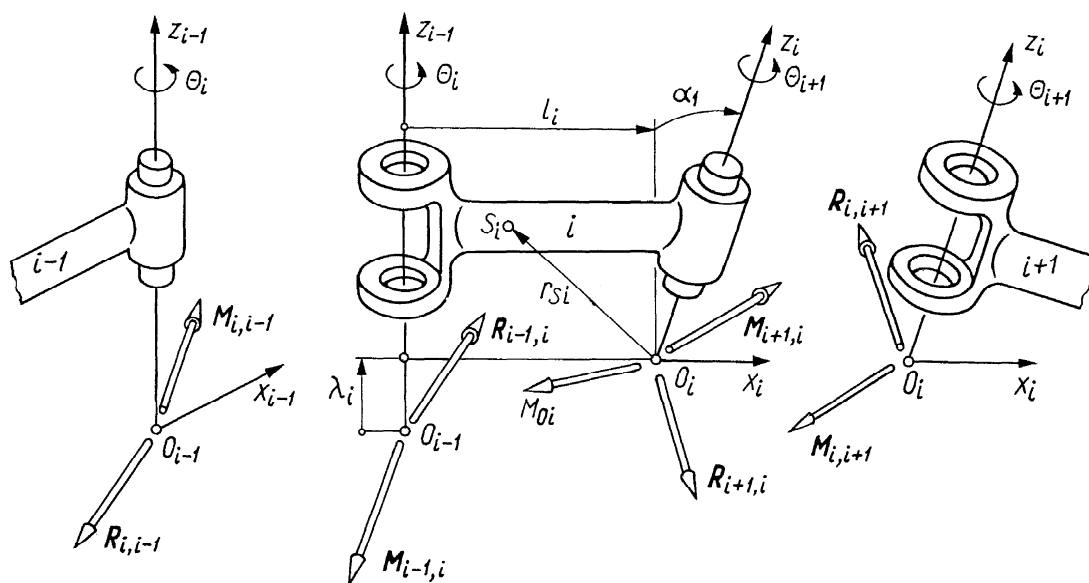
$$\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podstawiając dane współrzędne wektorów  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{M}$  oraz elementy macierzy  $\mathbf{T}_{6,0}$  ( $\mathbf{l} = [0 \ 1 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{m} = [0 \ 0 \ 1]^T$ ,  $\mathbf{n} = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{p} = [10 \ 5 \ 0]^T$ ) do wzorów (6.5), otrzymuje się

$$\mathbf{F} \times \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 10 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 50\mathbf{k}, \quad \mathbf{F} \times \mathbf{p} + \mathbf{M} = [0 \ 100 \ 50]^T$$

Rozwiązanie:  $\mathbf{M}_6 = [100 \ 50 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{F}_6 = [0 \ 0 \ 10]^T$

Rozważmy rozkład sił i momentów sił wywieranych na pojedynczy człon  $i$  łańcucha kinematycznego. Na rysunku 6.1 pokazano siły i momenty sił wywierane na człon  $i$  przez człony sąsiednie  $i-1$  oraz  $i+1$ , połączone z nim obrotowo. Siła przyłożona w punkcie  $O_{i-1}$ , oznaczona jako wektor  $\mathbf{R}_{i-1,i}$ , określa siłę oddziaływania członu  $i-1$  na człon  $i$ . Wektor  $\mathbf{R}_{i,i+1}$  oznacza siłę oddziaływania na człon  $i+1$  przez człon  $i$ . Siła ciężkości jest przyłożona w środku masy  $S_i$  i równa  $m_i \mathbf{g}$ , gdzie  $m_i$  – masa członu  $i$ ,  $\mathbf{g}$  – wektor przyspieszenia grawitacji.



Rys. 6.1. Schemat rozkładu sił i momentów sił działających na człon  $i$  łańcucha kinematycznego z połączeniami obrotowymi. Oznaczenia:  $\mathbf{R}_{i-1,i}$ ,  $\mathbf{M}_{i-1,i}$  – wektory siły i momentu sił oddziaływania na człon  $i$  przez człon  $i-1$ .

Równanie równowagi sił działających na człon  $i$  jest następujące

$$\mathbf{R}_{i-1,i} - \mathbf{R}_{i,i+1} + m_i \mathbf{g} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.6)$$

przy czym wszystkie wektory są wyrażone w układzie odniesienia podstawy.

W analogiczny sposób można sformułować równanie równowagi momentów sił względem punktu  $S_i$

$$\mathbf{M}_{i-1,i} - \mathbf{M}_{i,i+1} - (\mathbf{p}_{i-1,i} + \mathbf{r}_{S_i}) \times \mathbf{R}_{i-1,i} - (-\mathbf{r}_{S_i}) \times \mathbf{R}_{i,i+1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6.7)$$

gdzie:  $\mathbf{p}_{i-1,i}$  – wektor pozycji punktu  $O_i$  względem  $O_{i-1}$  (tzn. wektor  $\overline{O_{i-1}O_i}$ ) wyrażony w układzie podstawy;  $\mathbf{r}_{S_i}$  – wektor  $\overline{O_i S_i}$  określający pozycję punktu  $S_i$  względem  $O_i$ , również wyrażony w układzie podstawy. Siły i momenty sił zewnętrznych, oznaczone jako wektory:  $\mathbf{R}_{n,n+1}$  i  $\mathbf{M}_{n,n+1}$ , są wywierane na człon roboczy  $n$  przez otoczenie oznaczone jako dodatkowy człon  $n+1$ .

Równania (6.6) i (6.7) można zapisać dla wszystkich członów, zatem łączna liczba równań wektorowych wynosi  $2n$ , podczas gdy liczba wprowadzonych

wektorów sił i momentów sił wynosi  $2(n+1)$ . Aby układ równań (6.6) i (6.7) był rozwiązalny, dwa z tych wektorów muszą być dane. Mogą to być siła i moment sił wywierane na człon roboczy przez otoczenie. Przyjmując, że tarcie jest pomijalnie małe, wyznaczono siły i momenty napędowe w połączeniach ruchowych.

W połączeniu przesuwym  $i$  siła napędowa wynosi

$$f_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{R}_{i-1,i} \quad (6.8)$$

gdzie  $\mathbf{e}_i$  – wersor osi przesunięcia. Równanie (6.8) wskazuje, że siła napędowa jest składową siły  $\mathbf{R}_{i-1,i}$  o kierunku osi przesunięcia, natomiast pozostałe składowe są przenoszone przez konstrukcję połączenia przesuwnego i są siłami wewnętrznymi, które nie wykonują pracy.

W połączeniu obrotowym moment napędowy wynosi

$$f_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{M}_{i-1,i} \quad (6.9)$$

Pozostałe składowe  $\mathbf{M}_{i-1,i}$  są przenoszone przez konstrukcję połączenia obrotowego.

Wszystkie siły i momenty napędowe można ująć razem i zapisać w postaci wektora  $n$ -wymiarowego

$$\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_i \ f_n]^T \quad (6.10)$$

Zależność między siłami i momentami napędowymi a siłą i momentem sił zewnętrznych, przyłożonymi do członu roboczego określa się wg zależności

$$\mathbf{f} = \mathbf{J}^T [\mathbf{R}_{n,n+1} \ \mathbf{M}_{n,n+1}]^T \quad (6.11)$$

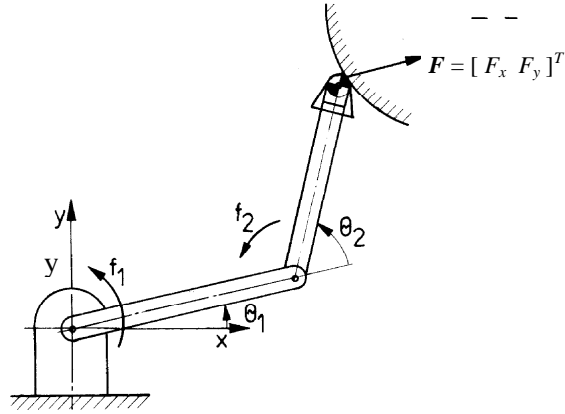
gdzie:  $[\mathbf{R}_{n,n+1} \ \mathbf{M}_{n,n+1}]^T$  – wektor siły i momentu sił zewnętrznych działających na człon roboczy;  $\mathbf{J}$  – macierz o wymiarach  $6 \times n$ , zwana **jakobianem manipulatora**, który określa zależność między różniczkowymi przemieszczeniami w połączeniach ruchowych a różniczkowym przemieszczeniem członu roboczego. Trzeba tutaj zauważyć, że wyznaczone siły i momenty napędowe nie uwzględniają sił ciężkości lub innych sił poza tymi, które są przyłożone do członu roboczego.

**Przykład 6.2.** Na rysunku 6.2 przedstawiono dwuczłonowy płaski manipulator wywierający siłę  $\mathbf{F} = [F_x \ F_y]^T$  na pewną powierzchnię. Znaleźć równoważne momenty napędowe  $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2]^T$ , przyjmując, że tarcie w przegubach jest pomijalnie małe.

Jakobian rozpatrywanego manipulatora jest następujący

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 s \theta_1 - l_2 s(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 s(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 c \theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) & l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (6.12)$$





Rys. 6.2. Płaski manipulator dwuczłonowy o połączeniach obrotowych. Siła  $\mathbf{F} = [F_x \ F_y]^T$  jest wywierana na powierzchnię, w przypadku działania momentów napędowych  $f_1$  i  $f_2$ .

Podstawiając (6.12) do (6.11) otrzymuje się równoważne momenty napędowe

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s(\theta_1 + \theta_2) & l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_2 s(\theta_1 + \theta_2) & l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Z równania (6.13) wynika, że momenty napędowe są odnoszone do siły i momentu sił działających na człon roboczy za pomocą macierzy jacobianowej. Zatem stan obciążeń statycznych jest ściśle związany ze stanem chwilowego położenia manipulatora. Rząd macierzy jacobianowej określa liczbę wszystkich możliwych prędkości generowanych przez napędy. Siły i momenty napędowe w połączeniach ruchowych są wyznaczane dla określonego stanu obciążenia członu roboczego. Jednak w pewnych położeniach manipulatora, tzw. osobliwych, całe obciążenie może być przejmowane przez konstrukcję.

**Przykład 6.3.** Pozycję i orientację członu roboczego manipulatora stanfordzkiego z przykładu 4.3 podano w postaci macierzy

$$\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

której odpowiadają następujące współrzędne konfiguracyjne

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi/2, \quad \lambda_3 = 20, \quad \theta_4 = 0, \quad \theta_5 = \pi/2, \quad \theta_6 = \pi/2$$

oraz macierz jacobianowa

$$\frac{\partial \mathbf{T}_6}{\partial q_i} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Należy obliczyć siły i momenty napędowe, równoważące siłę i moment sił przyłożone do członu roboczego, które dane są w postaci współrzędnych, określonych w układzie odniesienia tego członu:  $\mathbf{F} = [0 \ 0 \ 10 \ 0 \ -200 \ 1000]^T$ .

W celu uzyskania rozwiązania wykorzystamy równanie (6.11), które w rozważanym przypadku będzie następujące

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -6 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ -200 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 \\ 2000 \\ 0 \\ -200 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

## 6.2 Macierze sztywności lub podatności manipulatora

Obciążenie zewnętrzne członu roboczego powoduje jego odchylenie od pożądanego położenia. Wielkość tego odchylenia zależy od wielkości przyłożonego obciążenia i sztywności manipulatora. Zatem sztywność manipulatora bezpośrednio wpływa na dokładność pozycjonowania. W przypadku sterowania siłą styku członu roboczego z otoczeniem, wykorzystuje się charakterystykę sztywności do sprzężenia zwrotnego układu sterowania.

Większość robotów przemysłowych ma człony bardzo sztywne. Natomiast ich układy napędowe wykazują znaczące podatności ze względu na sprężyste odkształcenia skrętne wałków napędowych i przekładni, np. przekładni harmoniczných, przekładni pasowych, linkowych itp. Zależność pomiędzy skrętnym odkształceniem sprężystym i obciążeniem układu napędowego połączenia obrotowego  $i$  można przedstawić w zależności o postaci zlinearyzowanej

$$k_i \Delta q_i = M_i \tag{6.14}$$

gdzie:  $k_i$  – sztywność układu napędowego zredukowana do połączenia obrotowego,

$M_i$  – moment napędowy w połączeniu obrotowym  $i$ ,

$\Delta q_i$  – odkształcenie układu napędowego zredukowane do połączenia ruchowego.

Obciążenie zewnętrzne, zapisane w postaci  $\mathbf{m}$  - wektora momentów napędowych w połączeniach obrotowych, wywołuje proporcjonalne odkształcenia sprężyste zapisane jako  $\Delta \mathbf{q}$  - wektor odkształceń skrętnych w układach napędowych

$$\mathbf{m} = \mathbf{K}_\theta \Delta \mathbf{q}$$

$$\mathbf{m} = [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_i]^T \quad (6.15a)$$

$$\Delta \mathbf{q} = [\Delta \theta_1 \ \Delta \theta_2 \ \dots \ \Delta \theta_i]^T \quad (6.15b)$$

$$\mathbf{K}_\theta = \text{diag} [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_i] \quad (6.15c)$$

Zależność  $\Delta \mathbf{p}$  - przyrostu wektora położenia członu roboczego od  $\Delta \mathbf{q}$  - przyrostu wektora zmiennych konfiguracyjnych można zapisać w postaci

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{q} \quad (6.16)$$

W przypadku manipulatora o trzech połączenia obrotowych zależność (6.16) będzie

$$\begin{bmatrix} \Delta p_x \\ \Delta p_y \\ \Delta p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial p_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial p_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Na podstawie zasady prac przygotowanych wyprowadza się zależność

$$\mathbf{m} = \mathbf{J}^T \mathbf{f}_z \quad (6.18)$$

gdzie  $\mathbf{m}$  – wektor momentów i sił napędowych,  $\mathbf{f}_z$  – wektor sił i momentów sił zewnętrznych, działających na człon roboczy, przy czym

$$\mathbf{m} = [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_i]^T,$$

$$\mathbf{f}_z = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z]^T$$

W przypadku manipulatora o trzech parach obrotowych, którego człon roboczy jest obciążony tylko siłą zewnętrzną  $\mathbf{f}_z = [F_x \ F_y \ F_z]^T$  równanie (6.18) przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_z}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial p_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_z}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial p_x}{\partial \theta_3} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial p_z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Uwzględniając zależności (6.15), (6.16) i (6.18) otrzymuje się

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{C} \mathbf{f}_z \quad (6.20)$$

gdzie  $\mathbf{C}$  – macierz podatności manipulatora, zależna od sztywności układów napędowych, jak również od macierzy jacobianowej, w tym położeniu manipulatora, przy czym

$$\mathbf{C} = \mathbf{J} \mathbf{K}_\theta^{-1} \mathbf{J} \quad \mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_\theta \mathbf{J}^{-1} \quad (6.21)$$

$\mathbf{K}$  – macierz sztywności manipulatora.

Macierze sztywności i podatności manipulatora o trzech połączeniach obrotowych

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial p_x} & \frac{\partial F_x}{\partial p_y} & \frac{\partial F_x}{\partial p_z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial p_x} & \frac{\partial F_y}{\partial p_y} & \frac{\partial F_y}{\partial p_z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial p_x} & \frac{\partial F_z}{\partial p_y} & \frac{\partial F_z}{\partial p_z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial F_x} & \frac{\partial p_x}{\partial F_y} & \frac{\partial p_x}{\partial F_z} \\ \frac{\partial p_y}{\partial F_x} & \frac{\partial p_y}{\partial F_y} & \frac{\partial p_y}{\partial F_z} \\ \frac{\partial p_z}{\partial F_x} & \frac{\partial p_z}{\partial F_y} & \frac{\partial p_z}{\partial F_z} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

Odształcenie sprężyste manipulatora pod działaniem siły  $\Delta \mathbf{F} = [\Delta F_x \quad \Delta F_y \quad \Delta F_z]^T$  przyłożonej w punkcie  $P$

$$\begin{aligned} \Delta p_x &= \frac{\partial p_x}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial p_x}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial p_x}{\partial F_z} \Delta F_z \\ \Delta p_y &= \frac{\partial p_y}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial p_y}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial p_y}{\partial F_z} \Delta F_z \\ \Delta p_z &= \frac{\partial p_z}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial p_z}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial p_z}{\partial F_z} \Delta F_z \end{aligned} \quad (6.23)$$

**Wyznaczanie macierzy sztywności** na podstawie pomiarów przemieszczeń członu roboczego pod obciążeniem

Poniżej przedstawiono procedurę wyznaczenia elementów macierzy sztywności manipulatora w wybranych punktach przestrzeni roboczej, na podstawie estymowanych współczynników sprężystości układów napędowych przegubów obrotowych.

Model elastokinematyczny manipulatora rozpatrzono jako łańcuch przestrzenny o strukturze szeregowej, zawierający sześć członów sztywnych, połączonych przez idealne przeguby obrotowe (bez luzów i elementów odkształcalnych), które wykazują sprężystość skrętną, tzn. ich odkształcenia kątowe są proporcjonalne do momentów obrotowych. Przyjęty model wykorzystano do analizy przemieszczeń członu roboczego pod wpływem obciążenia w stanie quasi-statycznym.

Roboty przemysłowe, stosowane do wykonywania takich operacji, jak „weź – połóż”, malowanie lub spawanie, wymagają dobrej powtarzalności, ale niekoniecznie wysokiej dokładności pozycji i orientacji (określonej wg ISO9283). Jednak w przypadku wykonania wielu operacji obróbki skrawaniem, szlifowania, cięcia i innych wymaga się wysokiej dokładności i sztywności.

Modele elasto-kinematyczne manipulatorów są rozpatrywane w wielu pracach, jednak odpowiednie wartości elementów macierzy sztywności są podane tylko dla nielicznych robotów, np. dla robota PUMA 560, Kuka KR40-2, FANUC S420F i ARC Mate100i.

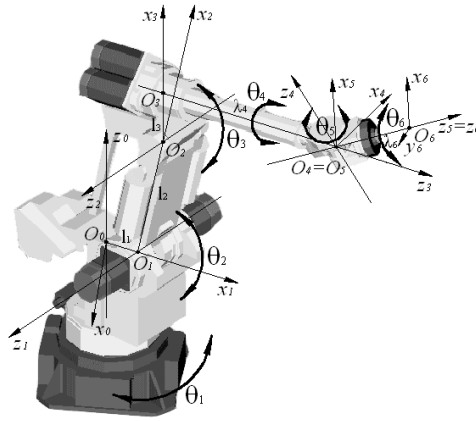
Znane są dwie metody wyznaczania macierzy sztywności tzw. kartezyjskiej:

1. Ustalenie jako nieruchome (zablokowanie) wszystkich przegubów obrotowych za wyjątkiem jednego, który obciąża się momentem obrotowym i mierzy odpowiednie przemieszczenie kątowe w celu wyznaczenia współczynnika sztywności skrętnej. Procedurę powtarza się dla kolejnych przegubów. Współczynniki sztywności przegubów wykorzystuje się do obliczeń macierzy sztywności w całej przestrzeni roboczej.
2. Pomiary przemieszczeń członu roboczego pod działaniem zadanych obciążeń w warunkach quasi statycznych i wyznaczeniu macierzy sztywności w określonym punkcie przestrzeni roboczej za pomocą interpolacji, przy wykonaniu wielu prób w różnych konfiguracjach.

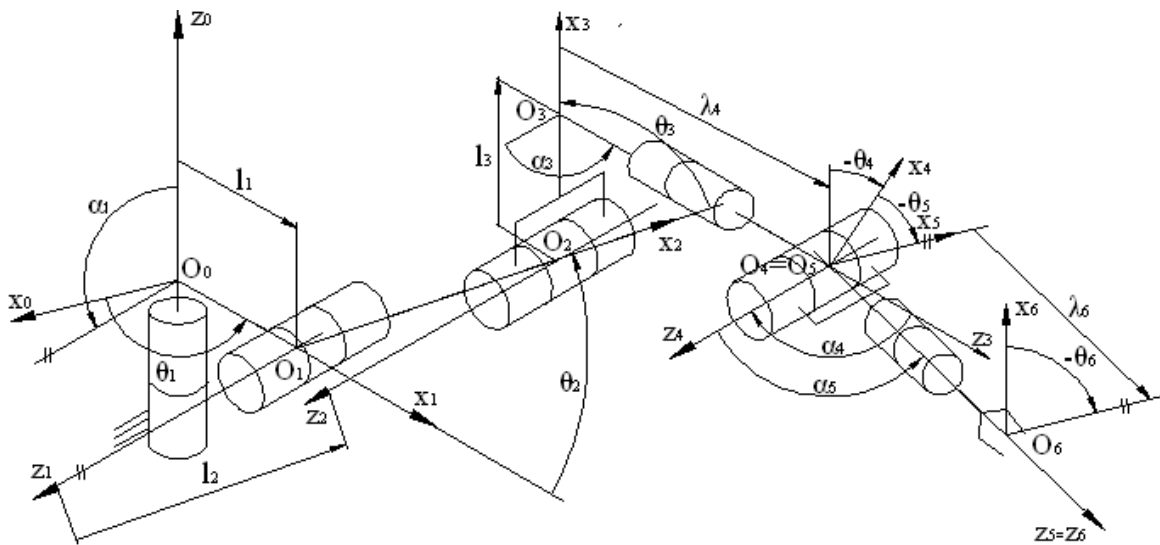
Poniżej przedstawiono procedurę wyznaczania macierzy sztywności robota FANUC S-420F, którego model kinematyczny manipulatora rozpatrywano jako szeregowy łańcuch kinematyczny, o sześciu przegubach obrotowych (rys.6.3). Parametry Denavita-Hartenberga podano w tablicy 6.1. Macierz jacobianową manipulatora zapisano w postaci (6×6)

$$J = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial p_x}{\partial \theta_i} & \frac{\partial p_y}{\partial \theta_i} & \frac{\partial p_z}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta_i} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial \theta_i} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial \theta_i} \end{array} \right]^T \quad (6.24)$$

gdzie:  $p_x, p_y, p_z$  – współrzędne punktu członu roboczego;  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  - współrzędne kątowe członu roboczego względem układu podstawy,  $\theta_i$  - współrzędna konfiguracyjna przegubu obrotowego  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ).



Rys. 6.3. Robot przemysłowy FANUC S-420F.



Rys. 6.4. Model kinematyczny manipulatora 6R robota FANUC.

U większości robotów przemysłowych człony są bardzo sztywne, natomiast układy napędowe przegubów obrotowych są znacznie bardziej podatne, wykazując sprężyste odkształcenia skrętne. Układ napędowy członu połączonego obrotowo z poprzednim zawiera przekładnię o wielostopniowej redukcji obrotów i wały, które wykazują sprężyste odkształcenia skrętne proporcjonalne do momentów napędowych. Sztywności skrętne przekładni, wałów i układów wspomagania można zredukować do środka przegubu, gdzie wprowadza się zastępczą sprężynę skrętną. W przypadku małych odkształceń przyjmuje się zależność

$$m_i = k_i \Delta\theta_i \tag{6.25}$$

gdzie:  $m_i$  - moment skręcający w przegubie  $i$ ,  $\Delta\theta_i$  - odkształcenie skrętne,

$k_i$  – współczynnik sztywności zastępczej układu napędowego.

Zależność wektora momentów napędowych od wektora obciążeń zewnętrznych, zgodnie z zasadą prac przygotowanych określa się w postaci

$$\mathbf{m} = \mathbf{J}^T \mathbf{f} \tag{6.26}$$

gdzie:  $\mathbf{m} = [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_6 ]$ ;  $\mathbf{f} = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z]^T$

$f$  – wektor obciążenia zewnętrznego, działającego na człon roboczy, przy czym składowe obciążenia są określone względem układu podstawy.

$\Delta p$  - przemieszczenie członu roboczego (we współrzędnych kartezjańskich) jest proporcjonalne do quasi-statycznego obciążenia zewnętrznego

$$\Delta p = C f = K^{-1} f \quad (6.27)$$

gdzie  $\Delta p = [\Delta p_x \ \Delta p_y \ \Delta p_z \ \Delta \varphi_x \ \Delta \varphi_y \ \Delta \varphi_z]^T$  (6.28)

$$K = J^{-T} (K_\theta - K_C) J^{-1} \quad (6.29)$$

$$K_\theta = \text{diag} [k_1 \ k_2 \dots k_6] \quad (6.30)$$

$$K_C = \left[ \frac{\partial J^T}{\partial \theta_i} \right] m \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

$C(6 \times 6)$  oznacza macierz podatności manipulatora,

$K(6 \times 6)$  - macierz sztywności manipulatora,

$K_\theta$  - diagonalna macierz sztywności skrętnej napędów przegubów,

$J$  - macierz jacobianowa,

$K_C$  - macierz uzupełniająca macierzy sztywności.

Macierz sztywności manipulatora (6.29) zależy od stałej macierzy  $K_\theta$  oraz od zmiennej macierzy  $K_C$ , zależnej od położenia. Wyznaczenie macierzy sztywności przegubów jest łatwiejsze w takim położeniu manipulatora, gdzie macierz  $K_C$  ma elementy pomijalnie małe w porównaniu do elementów macierzy  $K_\theta$ . Wtedy można przyjąć

$$\Delta p = J K_\theta^{-1} J^T f \quad (6.31)$$

Zadanie znacznie upraszcza się przy ograniczeniu do wyznaczenia wartości sztywności w pierwszych trzech przegubach. Wtedy mierzy się tylko przemieszczenia liniowe członu roboczego.

### Przykład liczbowy

Podjęto zadanie wyznaczenia macierzy sztywności manipulatora Fanuc S-420F, przy uwzględnieniu podatności tylko pierwszych trzech przegubów, na podstawie wyników pomiarów tylko przemieszczenia liniowego członu roboczego obciążonego pionowym obciążeniem w położeniu oddalonym od osobliwego. Na rys. 6.5 przedstawiono sposób obciążenia, a na rys. 6.6 wyniki pomiarów w postaci charakterystyki podatności.

Dla porównania poniżej podano wartości współczynników sztywności skrętniej przegubów manipulatora robota PUMA 560:

$$k_1=66,230; \ k_2=66,50; \ k_3=11,610; \ k_4=0,202; \ k_5=0,101; \ k_6=0,144 \text{ [kNm/rad]}$$

robota Kuka KR240-2:

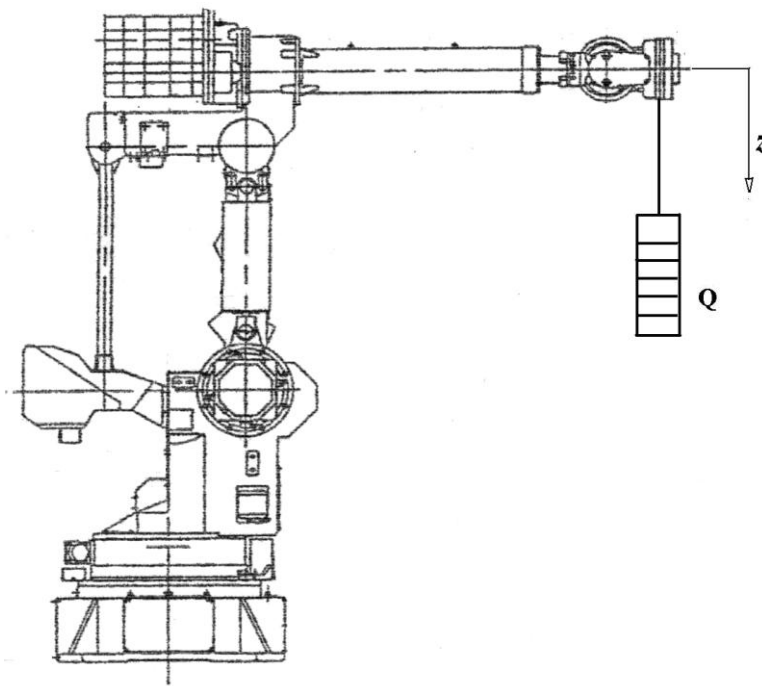
$$k_1=1,410; \ k_2=0,401; \ k_3=0,935; \ k_4=0,360; \ k_5=0,370; \ k_6=0,380 \text{ [kNm/rad]}$$

W tabeli 5.3 zestawiono wartości parametrów D-H, które uwzględniono przy wyprowadzaniu elementów macierzy podatności.

Tab. 6.1

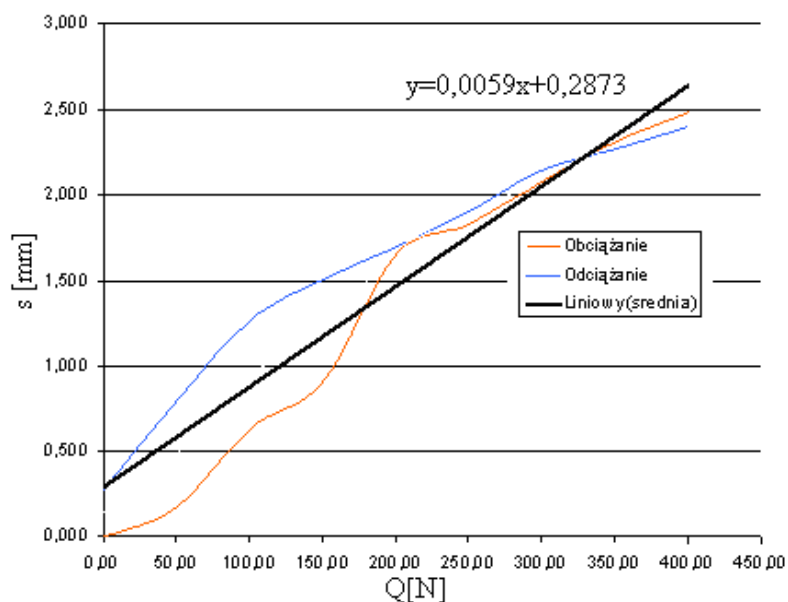
Parametry D-H manipulatora Fanuc S-420.

$I$	$\alpha_i$ [°]	$l_i$ [mm]	$\lambda_i$ [mm]	$\theta_i$ [°]
1	90	270	0	$\pm 150$
2	0	900	0	$\pm 57,5$
3	90	270	0	$\pm 72,5$
4	-90	0	1300	$\pm 360$
5	90	0	0	$\pm 125$
6	0	0	260	$\pm 360$



Rys. 6.5. Sposób obciążenia ramienia robota.





Rys. 6.6. Charakterystyka podatności ( $s$  - przemieszczenie pionowe członu roboczego robota Fanuc S-420F pod działaniem  $Q$  - siły pionowej), wyznaczona wg wyników pomiarów stanowiskowych.

Poniżej podano pierwsze trzy elementy przekątnej macierzy podatności, wpływające na przemieszczenie liniowe członu roboczego.

$$\begin{aligned}
 c_{11} = & \frac{1}{k_1} \left[ (-s_1(l_1 + l_2c_2 + l_3c_{23} + s_{23}\lambda_4) - \lambda_6((s_1c_{23}c_4 - c_1s_4)s_5 + s_1s_{23}c_5))^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{k_2} \left[ c_1^2(l_2s_2 + l_3c_{23} - c_{23}\lambda_4 + (s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5)\lambda_6)^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{k_3} \left[ c_1^2(l_3s_{23} - c_{23}\lambda_4 + (s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5)\lambda_6)^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{k_4} \left[ \lambda_6^2 \left( s_1s_{23}(-c_{23}\lambda_4 + s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + c_{23}(s_1s_{23}\lambda_4 + (s_1c_{23}c_4 - c_1s_4)s_5 + s_1s_{23}c_5) \right)^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{k_5} \left[ \lambda_6^2 \left( (-s_1c_{23}s_4 - c_1c_4)(s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5) + s_{23}s_4((s_1c_{23}c_4 - c_1s_4)s_5 + s_1s_{23}c_5) \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{22} = & \frac{1}{k_1} \left[ c_1 (l_1 + l_2 c_2 + l_3 c_{23} + s_{23} \lambda_4) + \lambda_6 ((c_1 c_{23} c_4 + c_1 s_4) s_5 + s_1 s_{23} c_5)^2 \right] + \\
& + \frac{1}{k_2} \left[ s_1^2 (l_2 s_2 + l_3 s_{23} - c_{23} \lambda_4 + (s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5) \lambda_6)^2 \right] + \\
& + \frac{1}{k_3} \left[ s_1^2 (l_3 s_{23} - c_{23} \lambda_4 + (s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5) \lambda_6)^2 \right] + \\
& + \frac{1}{k_4} \left[ \lambda_6^2 \left( \begin{array}{l} -c_{23} (c_1 s_{23} \lambda_4 + (c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4) s_5 + c_1 s_{23} c_5) - \\ -c_1 s_{23} (-c_{23} \lambda_4 + s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5) \end{array} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{1}{k_5} \left[ \lambda_6^2 (-s_{23} s_4 ((c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4) s_5 + c_1 s_{23} c_5) + (c_1 c_{23} s_4 - s_1 c_4) (s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5))^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{33} = & \frac{1}{k_2} \left[ (s_1 (s_1 (l_1 + l_2 c_2 + l_3 c_{23} + s_{23} \lambda_4) + \lambda_6 ((s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4) s_5 + s_1 s_{23} c_5)) + \right. \\
& + c_1 (c_1 (l_2 s_2 + l_3 c_{23} + s_{23} \lambda_4) + ((c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4) s_5 + c_1 s_{23} c_5) \lambda_6))^2 \\
& \left. + (s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5) \lambda_6 \right] + \\
& + \frac{1}{k_3} \left[ (s_1 (s_1 (l_3 c_{23} + s_{23} \lambda_4) + \lambda_6 ((s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4) s_5 + s_1 s_{23} c_5)) + \right. \\
& + c_1 (c_1 (l_3 c_{23} + s_{23} \lambda_4) + ((c_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4) s_5 + c_1 s_{23} c_5) \lambda_6))^2 \left. \right] \\
& + \frac{1}{k_4} \left[ (c_1 s_{23} (s_1 s_{23} \lambda_4 + \lambda_6 ((s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4) s_5 + s_1 s_{23} c_5) - \right. \\
& - s_1 s_{23} (c_1 s_{23} \lambda_4 + ((c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4) s_5 + s_1 s_{23} c_5) \lambda_6))^2 \left. \right] + \\
& + \frac{1}{k_5} \left[ \lambda_6^2 ((-c_1 c_{23} s_4 + s_1 c_4) ((s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4) s_5 + s_1 s_{23} c_5) + \right. \\
& \left. + (s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4) ((c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4) s_5 + c_1 s_{23} c_5))^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\text{gdzie } c_i = \cos \theta_i, s_i = \sin \theta_i, c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j), s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j) \quad (6.32)$$

Poniżej przedstawiono wyniki analizy macierzy sztywności manipulatora robota przemysłowego FANUC S-420F. Pomiary współrzędnych punktu charakterystycznego (punktu przyłożenia obciążenia siłą pionową) dały wyniki:

$$P_x = 279,85; \quad P_y = -2751,95; \quad P_z = 145,14 \text{ [mm]};$$

$$\varphi_x = 89,34^\circ; \quad \varphi_y = 46,57^\circ; \quad \varphi_z = 0,73^\circ$$

Rozwiązując zadanie odwrotne wyznaczono odpowiadające wartości kątów (tzw. współrzędnych konfiguracyjnych):

$$\theta_i = -84,91^\circ; \quad 65,00^\circ; \quad -12,31^\circ; \quad 0,00^\circ; \quad 9,64^\circ; \quad 0,00^\circ$$

Przyjęto wartości współczynników sztywności przegubów jak podane dla manipulatora PUMA 560 i wg podanego wzoru obliczono

$$c_{33} = 0,00183 [mm/N]; \quad k_{33} = 546,6[N/mm].$$

Natomiast wartość tego współczynnika wyznaczona na podstawie wyników pomiarów manipulatora Fanuc S-420F wynosi

$$c_{33} = 0,0059 [mm/N]; \quad k_{33} = 169,5[N/mm].$$

Można zatem stwierdzić, że współczynniki sztywności pierwszych trzech przegubów manipulatora Fanuc S-420F są ok. 3 razy mniejsze od podanych dla manipulatora PUMA 560.

Przedstawiony model elastokinematyczny manipulatora szeregowego i procedura wyznaczania macierzy sztywności manipulatora umożliwiają wyznaczenie przemieszczeń liniowych i kątowych członu roboczego pod działaniem obciążenia (siły i momentu sił) zewnętrznego. Wyznaczona macierz sztywności kartezjańskiej może być wykorzystana przy planowaniu ruchu rozpatrywanego robota.

Sztywność manipulatora określa częstotliwość drgań własnych

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.33)$$

gdzie  $k$  – sztywność zastępcza,  $m$  – masa zredukowana do punktu charakterystycznego członu roboczego, np. środka chwytaka.

Niska częstotliwość to długi czas stabilizacji i niekorzystne właściwości dynamiczne, w tym niską dokładność i powtarzalność. Wykonanie operacji szlifowania powierzchni wymaga dużej sztywności. W operacjach montażu lub inspekcji jest pożądana duża podatność.

Rozkład podatności manipulatora wyznacza się wg pomiarów odkształceń pod obciążeniem statycznym, a także dynamicznym przy wymuszaniu zmian obciążenia (skokowych lub harmonicznym).

Robot Unimate 2000B o napędach hydraulicznych, operujący masą 90 kg ma podatność zredukowaną do końca ramienia  $\kappa = 26 \cdot 10^6 \text{ rad/Nm}$ , co odpowiada częstotliwości drgań własnych  $f = 2,0 \text{ Hz}$ . Natomiast robot PUMA o napędach elektrycznych, przy obciążeniu masą 5,5 kg wykazuje częstotliwość drgań własnych  $f = 22,5 \text{ Hz}$ .

## 6.3 Dynamika manipulatorów

Rozróżnia się dwa rodzaje zadań dynamiki manipulatorów:

1. Dana jest trajektoria ruchu manipulatora, np. w postaci współrzędnych konfiguracyjnych i ich pochodnych jako funkcje czasu, a trzeba wyznaczyć  $f$  - wektor sił i momentów napędowych;
2. Dane są siły i momenty napędowe, a trzeba wyznaczyć ruch manipulatora.

Dynamiczne właściwości manipulatora można określić w postaci przemieszczeń w czasie w zależności od sił i momentów napędowych. Zależności te opisuje się za pomocą układu równań różniczkowych ruchu. W tym celu są stosowane najczęściej dwie metody: Newtona-Eulera i Lagrange'a. *Równania Newtona-Eulera* opisują dynamikę poszczególnych członów. *Równania Lagrange'a* wyprowadza się z zależności energii kinetycznej i potencjalnej manipulatora od jego współrzędnych konfiguracyjnych i ich pochodnych względem czasu.

### 6.3.1 Rozkład masy członu

Dla bryły sztywnej, wykonującej ruch obrotowy wokół stałej osi, stosuje się pojęcie momentu bezwładności. Natomiast dla ciała sztywnego, wykonującego ruch kulisty, wprowadza się **tensor bezwładności**, rozumiany jako uogólnienie skalarne momentu bezwładności. Tensor bezwładności określa się zazwyczaj względem układu związanego z ciałem i wyraża w postaci macierzy o wymiarach  $3 \times 3$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

gdzie:

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho dv, \quad I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho dv, \quad I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dv,$$

$$I_{xy} = \iiint_V xy \rho dv, \quad I_{xz} = \iiint_V xz \rho dv, \quad I_{yz} = \iiint_V yz \rho dv$$

przy czym przyjmuje się, że ciało jest złożone z różniczkowych elementów o objętości  $dv$  i gęstości  $\rho$ . Pozycję każdego elementu określa wektor  $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T$ .

Elementy  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  i  $I_{zz}$  nazywa się masowymi momentami bezwładności. Każdy z sześciu elementów macierzy tensora bezwładności zależy od pozycji i orientacji układu, w którym jest określony. Jeśli układ odniesienia jest tak usytuowany, że momenty dewiacji ( $I_{xy}$ ,  $I_{yz}$  i  $I_{xz}$ ) są równe zeru, to osie układu odniesienia nazywa się osiami głównymi, a odpowiednie momenty bezwładności – głównymi momentami bezwładności.

**Przykład 6.4.** Znaleźć tensor bezwładności dla członu o kształcie prostopadłościanu i jednorodnej gęstości  $\rho$  względem układu odniesienia, którego osie  $x$ ,  $y$  i  $z$  pokrywają się odpowiednio z krawędziami o długości  $w$ ,  $l$  i  $h$ . Wpierw wyznaczamy  $I_{xx}$

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_0^h \int_0^l \int_0^w (y^2 + z^2) \rho \, dx \, dy \, dz = \int_0^h \int_0^l (y^2 + z^2) w \rho \, dy \, dz = \\ &= \int_0^h \left( \frac{l^2}{3} + z^2 l \right) w \rho \, dz = \left( \frac{hl^3 w}{3} + \frac{h^3 l w}{3} \right) \rho = \frac{m}{3} (l^2 + h^2) \end{aligned}$$

gdzie  $m$  – całkowita masa ciała. Stosując permutację wyrazów, możemy otrzymać

$$I_{yy} = \frac{m}{3} (w^2 + h^2), \quad I_{zz} = \frac{m}{3} (w^2 + l^2)$$

Następnie wyznaczamy momenty dewiacji

$$I_{xy} = \int_0^h \int_0^l \int_0^w xy \rho \, dx \, dy \, dz = \int_0^h \int_0^l \frac{w^2}{2} y \rho \, dy \, dz = \int_0^h \frac{w^2 l^2}{4} \rho \, dz = \frac{m}{4} wl$$

Stosując permutację wyrazów otrzymujemy

$$I_{xz} = \frac{m}{4} hw, \quad I_{yz} = \frac{m}{4} hl$$

Zatem macierz tensora bezwładności dla rozważanego członu jest następująca

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{m}{3} (l^2 + h^2) & -\frac{m}{4} wl & -\frac{m}{4} hw \\ -\frac{m}{4} wl & \frac{m}{3} (w^2 + h^2) & -\frac{m}{4} hl \\ -\frac{m}{4} hw & -\frac{m}{4} hl & \frac{m}{3} (l^2 + w^2) \end{bmatrix}$$

Tensor bezwładności jest funkcją pozycji i orientacji układu odniesienia. W celu wyznaczenia zmian tensora bezwładności, odpowiadających przesunięciu układu odniesienia, można korzystać z twierdzenia o osi równoległej, które odnosi tensor bezwładności określony względem układu o początku w środku masy do tensora względem innego układu odniesienia.

Jeśli układ  $\{S\}$  jest usytuowany w środku masy, a układ  $\{O\}$  jest przesunięty o wektor  $r_S = \overline{OS} = [x_S \ y_S \ z_S]^T$ , to twierdzenie może być wyrażone wzorami

$$I_{Ozz} = I_{Szz} + m(x_S^2 + y_S^2), \quad I_{Oxy} = I_{Sxy} - m x_S y_S \quad (6.35)$$

Pozostałe momenty bezwładności osiowe i dewiacyjne wyznacza się przez permutację indeksów  $x$ ,  $y$  i  $z$  w zależnościach (6.35). Twierdzenie to może być zapisane w postaci

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_S + m [\mathbf{p}_S^T \mathbf{p}_S \mathbf{I}_3 - \mathbf{p}_S \mathbf{p}_S^T] \quad (6.36)$$

gdzie  $\mathbf{I}_3$  oznacza macierz jednostkową  $3 \times 3$ .

**Przykład 6.5.** Znaleźć tensor bezwładności dla członu z przykładu 6.4, gdy jest on określony względem układu odniesienia o początku w środku masy, tzn.

$$[x_S \ y_S \ z_S]^T = \frac{1}{2}[w \ l \ h]^T$$

Stosując twierdzenie (6.35), otrzymuje się

$$I_{O_{zz}} = \frac{m}{12}(w^2 + l^2), \quad I_{O_{xy}} = 0$$

Inne elementy można wyznaczyć z warunku symetrii. Wynikowy tensor bezwładności, zapisany w układzie odniesienia o początku w środku masy, jest następujący

$$\mathbf{I}_S = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(h^2 + l^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(w^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(l^2 + w^2) \end{bmatrix}$$

Ponieważ wynikowa macierz jest diagonalna, więc osie układu  $\{O\}$  są głównymi osiami bezwładności.

Pewne dodatkowe wnioski dotyczące tensorów bezwładności są następujące:

1. Jeśli dwie osie układu odniesienia leżą w płaszczyźnie symetrii ciała, to momenty dewiacyjne, z indeksami osi prostopadłej do płaszczyzny symetrii, są równe zero.
2. Momenty bezwładności są zawsze dodatnie, a momenty dewiacyjne mogą mieć jeden z dwóch znaków.
3. Suma trzech momentów bezwładności względem trzech osi wzajemnie prostopadłych jest niezmiennikiem przy zmianie orientacji układu odniesienia.
4. Wartości własne tensora bezwładności określają główne momenty bezwładności, a związane wektory własne określają osie główne.

Większość manipulatorów ma człony o tak skomplikowanym kształcie, że zastosowanie wzorów (6.34)÷(6.36) jest trudne w praktyce. Stąd wynika, że w tych przypadkach uzasadnione jest doświadczalne wyznaczanie momentów bezwładności, np. metodą drgań skrętnych.

### 6.3.2 Równania Newtona-Eulera

Jeśli znane są położenie środka masy i tensor bezwładności członu, to rozkład jego masy jest w pełni określony. Siła  $F$ , działająca w środku masy członu i wywołująca ruch z przyspieszeniem  $\mathbf{a}_S = \dot{\mathbf{v}}_S$ , jest określona przez równanie Newtona

$$\mathbf{F} = m \dot{\mathbf{v}}_S \quad (6.37)$$

Moment sił  $\mathbf{M}$ , który musi być wywierany na człon, aby wywołać jego ruch obrotowy z przyspieszeniem kątowym  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ , jest określony przez równanie Eulera

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_S \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega} \quad (6.38)$$

gdzie  $\mathbf{I}_S$  oznacza tensor bezwładności członu, określony w układzie  $\{S\}$  o początku w środku masy członu.

Mając wyznaczone przyspieszenie środka masy oraz prędkość i przyspieszenie katowe członu, określone w układzie tego członu, można wg równań (6.37) i (6.38) obliczyć siłę i moment sił bezwładności.

Pozostaje obliczenie sił i momentów napędowych w połączeniach ruchowych. Można to uczynić, pisząc równania równowagi sił i momentów sił działających na każdy wydzielony człon, uzupełnione o siły i momenty sił bezwładności. Ponieważ siły i momenty sił bezwładności są określone w układzie związanym z członem, zatem również siły i momenty sił oddziaływań członów sąsiednich powinny być określone w tym samym układzie.

Siłę ciężkości można uwzględnić wprowadzając do równań kinematyki zależność  $\dot{\mathbf{v}}_o = \mathbf{g}$ , gdzie  $\mathbf{g}$  oznacza wektor przyspieszenia grawitacji,  $\dot{\mathbf{v}}_o$  – fikcyjne przyspieszenie podstawy w kierunku pionowym do góry, które powoduje taki sam skutek jak efekt sił ciężkości. W ten sposób bez dodatkowych operacji obliczeniowych uwzględnia się efekt ciężenia w siłach bezwładności członów.

Równania równowagi sił i momentów sił działających na człon  $i$  zapisane w układzie odniesienia tego członu będą miały postać

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{R}_{i-1,i} - \mathbf{B}_{i+1,i} \mathbf{R}_{i+1,i} \quad (6.39)$$

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{i-1,i} - \mathbf{B}_{i+1,i} \mathbf{M}_{i+1,i} - \mathbf{r}_{Si} \times \mathbf{F}_i - \mathbf{p}_{i+1,i} \times \mathbf{B}_{i+1,i} \mathbf{R}_{i+1,i} \quad (6.40)$$

gdzie:  $\mathbf{B}_{i+1,i}$  – macierz obrotu układu  $i+1$  względem układu  $i$ ,  $\mathbf{r}_{Si}$  – wektor pozycji  $S_i$  (środka masy członu  $i$ ) względem  $O_i$  (początku układu  $i$ ), tzn.  $\mathbf{r}_{Si} = \overline{O_i S_i}$ ,  $\mathbf{p}_{i+1,i}$  – wektor pozycji punktu  $O_{i+1}$  (początku układu  $i+1$ ) względem punktu  $O_i$  (początku układu  $i$ ),  $\mathbf{R}_{i+1,i}$ ,  $\mathbf{M}_{i+1,i}$  – siła i moment sił oddziaływania członu  $i+1$  na człon  $i$ .

Równania (6.39) i (6.40) można przekształcić do postaci umożliwiającej sekwencyjne wyznaczenie sił i momentów sił oddziaływania, zaczynając od członu  $n$

$$\mathbf{R}_{i-1,i} = \mathbf{B}_{i+1,i} \mathbf{R}_{i+1,i} + \mathbf{F}_i \quad (6.41)$$

$$\mathbf{M}_{i-1,i} = \mathbf{B}_{i+1,i} \mathbf{M}_{i+1,i} + \mathbf{r}_{Si} \times \mathbf{F}_i + \mathbf{p}_{i+1,i} \times \mathbf{B}_{i+1,i} \mathbf{R}_{i+1,i} + \mathbf{M}_i \quad (6.42)$$

Jeśli na człon roboczy  $n$  nie działają żadne niepotencjalne siły zewnętrzne, to  $R_{n+1,n}=0$  i  $M_{n+1,n}=0$ . Jeśli natomiast na człon roboczy manipulatora działają niezerowe siły  $R_{n+1,n}$  i moment  $M_{n+1,n}$ , to do wyznaczenia sił i momentów napędowych można korzystać z zależności (6.8) i (6.9).

Pełny algorytm obliczania sił i momentów napędowych manipulatora składa się z dwóch części. Wpierw obliczane są prędkości i przyspieszenia członów począwszy od członu  $1$  aż do członu  $n$  oraz są obliczane siły i momenty sił bezwładności wg równań Newtona-Eulera (6.37) i (6.38). W drugiej części są obliczane siły i momenty sił oddziaływań członów wg wzorów (6.41) i (6.42), począwszy od członu  $n$ . W końcu są obliczane siły i momenty napędowe. Dla manipulatora z połączeniami obrotowymi algorytm ten przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{i+1} &= \mathbf{B}_{i,i+1} \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \mathbf{e}_i \\
\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} &= \mathbf{B}_{i,i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \mathbf{B}_{i,i+1} \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{\theta}_{i+1} \mathbf{e}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} \mathbf{e}_{i+1} \\
\dot{\mathbf{v}}_{i+1} &= \mathbf{B}_{i,i+1} [\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{p}_{i+1,i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_{i+1,i}) + \dot{\mathbf{v}}_i] \\
\dot{\mathbf{v}}_{Si} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} \times \mathbf{r}_{Si+1} + \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \mathbf{r}_{Si+1}) + \dot{\mathbf{v}}_{i+1} \\
\mathbf{F}_{i+1} &= m_{i+1} \dot{\mathbf{v}}_{Si+1} \\
\mathbf{M}_{i+1} &= \mathbf{I}_{Si+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} + \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \mathbf{I}_{Si+1} \boldsymbol{\omega}_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, 5 \\
\mathbf{f}_i &= \mathbf{M}_{i-1,i} \cdot \mathbf{e}_i
\end{aligned} \tag{6.43}$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{M}_{i-1,i} \cdot \mathbf{e}_i \tag{6.44}$$

gdzie  $\mathbf{e}_i = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

W pierwszej części algorytmu oblicza się wielkości kinematyczne, określone w układach odniesienia członów ruchomych. Jeśli wielkości kinematyczne zostały wyznaczone dla członu  $i$  a chcemy je wprowadzić do zależności kinematycznych członu  $i+1$ , to trzeba je pomnożyć przez odpowiednią macierz obrotu  $\mathbf{B}_{i,i+1}$ . W przypadku, gdy człony  $i$  i  $i+1$  są połączone przesuwnie, wówczas ich prędkości i przyspieszenia kątowe są takie same.

**Przykład 6.4.** Dla manipulatora dwuczłonowego z połączeniami obrotowymi przyjęto, że masy członów są skupione w ich końcach, tzn.  $S_1 = O_1$ ,  $S_2 = O_2$ . Tensory bezwładności, określone względem środków mas członów, mają macierze zerowe. Na człon roboczy nie działają żadne siły zewnętrzne, tzn.  $R_{3,2} = 0$ ,  $M_{3,2} = 0$ . Według wzorów (6.43) wyznaczono:  $\boldsymbol{\omega}_0 = 0$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = 0$ ,  $\dot{\mathbf{v}}_0 = 0$

$$\mathbf{B}_{i+1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_{i+1} & -s\theta_{i+1} & 0 \\ s\theta_{i+1} & c\theta_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{i,i+1} = \begin{bmatrix} c\theta_{i+1} & s\theta_{i+1} & 0 \\ -s\theta_{i+1} & c\theta_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \ddot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gs\theta_1 \\ gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{s1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gs\theta_1 \\ gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1^2 + gs\theta_1 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 gs\theta_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1^2 + gs\theta_1 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \ddot{\theta}_1 s\theta_2 - l_1 \dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + gs(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + gc(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{s2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \ddot{\theta}_1 s\theta_2 - l_1 \dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + gs(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + gc(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2 \begin{bmatrix} l_1 \ddot{\theta}_1 s\theta_2 - l_1 \dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + gs(\theta_1 + \theta_2) - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + gc(\theta_1 + \theta_2) + l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Następnie wg wzorów (6.44) wyznaczono:

$$\mathbf{R}_{1,2} = \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{M}_{1,2} = m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + l_2 gc(\theta_1 + \theta_2) + l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{0,1} = m_2 \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \ddot{\theta}_1 s\theta_2 - l_1 \dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + gs(\theta_1 + \theta_2) - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + gc(\theta_1 + \theta_2) + l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1^2 + gs\theta_1 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{1,0} = m_2 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 c \theta_2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s \theta_2 + l_2 g c (\theta_1 + \theta_2) + l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} + \\
& + m_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1^2 \ddot{\theta}_1 + l_1 g c \theta_1 \end{bmatrix} + \\
& + m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1^2 \ddot{\theta}_1 - l_1 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s \theta_2 + l_1 g s \theta_2 s (\theta_1 + \theta_2) + l_1 l_2 c \theta_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + l_1 g c \theta_2 c (\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Wydzielając z wektorów  $\mathbf{M}_{i,i-1}$  składowe z, otrzymuje się momenty napędowe:

$$\begin{aligned}
f_1 = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c \theta_2 + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 s \theta_2 - \\
- 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s \theta_2 + m_2 l_2 g c (\theta_1 + \theta_2) + (m_1 + m_2) l_1 g c \theta_1
\end{aligned} \quad (6.45)$$

$$f_2 = m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 c \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s \theta_2 + m_2 l_2 g c (\theta_1 + \theta_2) + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \quad (6.45)$$

Zależności (6.45) przedstawiają momenty napędowe w połączeniach obrotowych w postaci funkcji przemieszczeń kątowych (zmiennych konfiguracyjnych) oraz prędkości i przyspieszeń. Często wygodnie jest przedstawiać równania dynamiki manipulatora w postaci jednego równania macierzowego o określonej strukturze, np.

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}(\Theta) \ddot{\Theta} + \mathbf{V}(\Theta, \dot{\Theta}) + \mathbf{G}(\Theta) \quad (6.46)$$

gdzie:  $\mathbf{M}(\Theta)$  – macierz  $(n \times n)$  bezwładności manipulatora,  $\mathbf{V}(\Theta, \dot{\Theta})$  – wektor  $(n \times 1)$  sił odśrodkowych i Coriolisa,  $\mathbf{G}(\Theta)$  – wektor  $(n \times 1)$  sił ciężkości. Każdy element  $\mathbf{M}(\Theta)$  i  $\mathbf{G}(\Theta)$  jest złożoną funkcją zmiennych konfiguracyjnych, określających położenie manipulatora. Każdy element  $\mathbf{V}(\Theta, \dot{\Theta})$  jest funkcją zarówno  $\Theta$ , jak i  $\dot{\Theta}$ .

Zależności (6.45), będące rozwiązaniem zadania z przykładu 6.6, można zapisać w postaci (6.46), przy czym macierz bezwładności manipulatora jest złożona z wyrazów, które są mnożone przez czynnik  $\ddot{\Theta}$ , i które są funkcjami  $\Theta$

$$\mathbf{M}(\Theta) = \begin{bmatrix} l_2^2 m_2 + 2l_1 l_2 m_2 c \theta_2 + l_1^2 (m_1 + m_2) & l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c \theta_2 \\ l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c \theta_2 & l_2^2 m_2 \end{bmatrix}$$

Macierz bezwładności manipulatora jest symetryczna i dodatnio określona, zatem jest zawsze odwracalna.

Wektor  $\mathbf{V}(\Theta, \dot{\Theta})$  zawiera wszystkie te wyrazy, które zależą od prędkości

$$\mathbf{V}(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 s \theta_2 - 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s \theta_2 \\ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s \theta_2 \end{bmatrix}$$

Składowa zależna od  $\dot{\theta}_i^2$  reprezentuje siłę odśrodkową, natomiast składowa zawierająca iloczyn  $\dot{\theta}_i \dot{\theta}_j$  – siłę Coriolisa.

Wektor sił ciężkości, zawierający przyspieszenie grawitacji, w rozważanym przypadku ma postać

$$\mathbf{G}(\Theta) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g c(\theta_1 + \theta_2) + (m_1 + m_2) l_1 g c \theta_1 \\ m_2 l_2 g c(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Zauważa się, że wektor sił ciężkości zależy tylko od położenia manipulatora, określonego przez  $\theta_i$ , a nie zależy od prędkości.

Równanie (6.46) można zapisać w nieco innej postaci

$$f = \mathbf{M}(\Theta)\ddot{\theta} + \mathbf{B}(\Theta)[\dot{\theta}\dot{\theta}] + \mathbf{C}(\Theta)[\dot{\theta}^2] + \mathbf{G}(\Theta) \quad (6.47)$$

gdzie:  $\mathbf{B}(\Theta)$  – macierz  $[n \times (n-1)/2]$  współczynników sił Coriolisa,  $[\dot{\theta}\dot{\theta}]$  – wektor  $[n(n-1)/2 \times 1]$  iloczynów prędkości:

$$[\dot{\theta}\dot{\theta}] = [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \quad \dots \quad \dot{\theta}_{n-1} \dot{\theta}_n]^T \quad (6.47a)$$

$\mathbf{C}(\Theta)$  – macierz  $(n \times n)$  współczynników sił odśrodkowych,  $[\dot{\theta}^2]$  – wektor  $(n \times 1)$  kwadratów prędkości

$$[\dot{\theta}^2] = [\dot{\theta}_1^2 \quad \dot{\theta}_2^2 \quad \dots \quad \dot{\theta}_n^2]^T \quad (6.47b)$$

Równanie (6.47) nazywa się *równaniem dynamiki manipulatora* we współrzędnych konfiguracyjnych.

Dla rozważanego manipulatora dwuczłonowego będzie

$$[\dot{\theta}\dot{\theta}] = [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2], \quad [\dot{\theta}^2] = [\dot{\theta}_1^2 \quad \dot{\theta}_2^2]^T$$

$$\mathbf{B}(\Theta) = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_2 s \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & m_2 l_1 l_2 s \theta_2 \\ m_2 l_1 l_2 s \theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Przykład 6.5.** Ramię manipulatora stanfordzkiego, przedstawionego na rys. 3.5, ma trzy człony, dwa połączenia obrotowe i jedno – przesuwne. Wymiary członów podano w przykładzie 3.4. Ponieważ osie układów odniesienia pokrywają się z osiami symetrii członów, zatem

$$\mathbf{r}_{S1} = [0 \quad -y_{S1} \quad 0]^T, \quad \mathbf{r}_{S2} = [0 \quad -y_{S2} \quad 0]^T, \quad \mathbf{r}_{S3} = [0 \quad 0 \quad z_{S3}]^T$$

$$\mathbf{I}_{0i} = m_i \begin{bmatrix} k_{ix}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{iy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{iz}^2 \end{bmatrix}$$

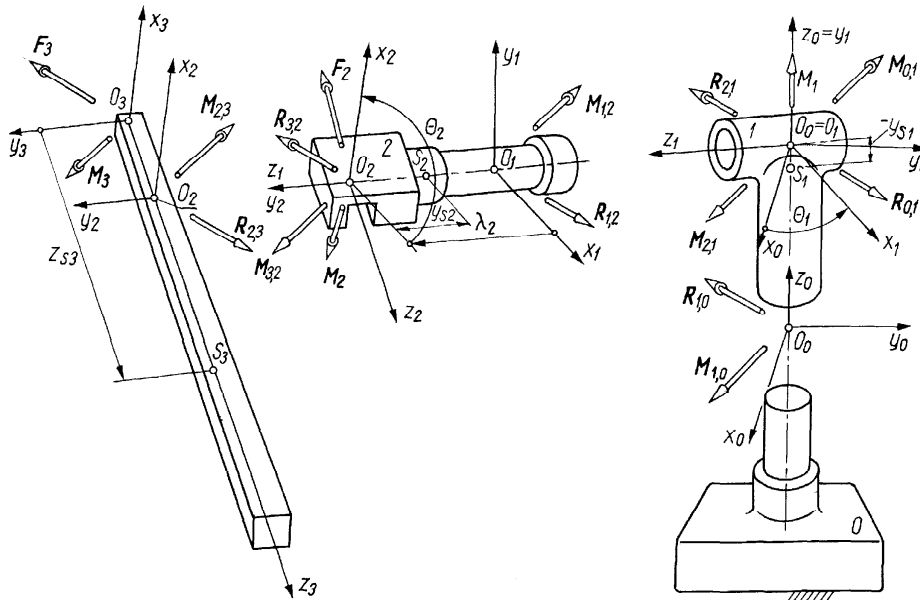
gdzie:  $k_{ij} = I_{ij}/m_i$  ( $j = x, y, z$ ),  $k_{ij}$  – promień bezwładności członu  $i$ .

Siłę i moment sił bezwładności członu 3 otrzymuje się wg wzoru (6.44) w postaci

$$\mathbf{F}_3 = m_3 \begin{bmatrix} (\lambda_3 + z_{s3})(\ddot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 c\theta_2) + \lambda_2 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + 2\dot{\lambda}_3 \dot{\theta}_2 \\ -(\lambda_3 + z_{s3})(\ddot{\theta}_1 s\theta_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c\theta_2) - \lambda_2 \dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\lambda}_3 \dot{\theta}_1 s\theta_2 \\ -(\lambda_3 + z_{s3})(\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 s\theta_2) + \lambda_2 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 - 2\ddot{\lambda}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3 = m_3 \begin{bmatrix} (k_{3x}^2 + \lambda_3 z_{s3})(\ddot{\theta}_1 s\theta_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c\theta_2) - k_{3z}^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c\theta_2 \\ + (\lambda_3 + z_{s3}) \lambda_2 \dot{\theta}_1^2 + 2z_{s3} \dot{\lambda}_3 \dot{\theta}_1 s\theta_2 \\ (k_{3x}^2 + \lambda_3 z_{s3})(\ddot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 c\theta_2) + k_{3z}^2 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 c\theta_2 + 2(\lambda_3 + z_{s3}) \dot{\lambda}_3 \dot{\theta}_2 + \\ + 2\lambda_2 z_{s3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s\theta_2 + \lambda_2 z_{s3} \ddot{\theta}_1 c\theta_2 \\ -k_{3z}^2 (\ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s\theta_2) \end{bmatrix}$$

przy czym składowa  $F_{3z}$  jest równa sile napędowej w połączeniu przesuwnym, tzn.  $R_{2,3z} = F_{3z}$ .



Rys. 6.7. Schemat rozkładu sił i momentów działających na rozdzielone człony ramienia manipulatora stanfordzkiego. Oznaczenia jak na rys. 6.1.

Moment napędowy w drugim połączeniu obrotowym jest równy składowej z momentu oddziaływania członu 1 na człon 2

$$f_2 = M_{1,2z} = m_2 k_{2z}^2 \ddot{\theta}_2 + m_3 \left\{ (k_{3x}^2 + 2\lambda_3 z_{s3})(\ddot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 c\theta_2) + k_{3z}^2 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 c\theta_2 + \right. \\ \left. + 2(\lambda_3 + z_{s3}) \dot{\lambda}_3 \dot{\theta}_2 + (\lambda_3 z_{s3}) \lambda_2 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + 2\lambda_2 \lambda_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s\theta_2 + \lambda_3^2 (\ddot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 c\theta_2) \right\}$$

Moment napędowy w pierwszym połączeniu obrotowym wynosi

$$\begin{aligned}
f_1 = M_{0,1z} = & m_1 k_{1z}^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 (k_{2x}^2 + 2\lambda_2 y_{s2} + \lambda_2^2) \ddot{\theta}_1 + \\
& + m_3 \left\{ (k_{3x}^2 + \lambda_3 z_{s3}) (\ddot{\theta}_1 s\theta_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c\theta_2) s\theta_2 + k_{3z}^2 (\ddot{\theta}_1 - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s\theta_2) c\theta_2 + \right. \\
& + (\lambda_3 + z_{s3}) \lambda_2 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + \lambda_3 (\lambda_3 + z_{s3}) (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 s^2\theta_2) + 2\lambda_3 z_{s3} \ddot{\theta}_1 s^2\theta_2 - \\
& \left. - \lambda_2 \lambda_3 \ddot{\theta}_1 s^2\theta_2 - \lambda_3 \ddot{\lambda}_3 s\theta_2 \right\}
\end{aligned}$$

**Przykład 6.6.** Dla ramienia manipulatora PUMA, którego schemat i wymiary przedstawiono w przykładzie 4.2, przyjęto lokalne układy odniesienia pokrywające się z osiami symetrii członów. Rozkład mas opisano za pomocą współrzędnych środków mas poszczególnych członów

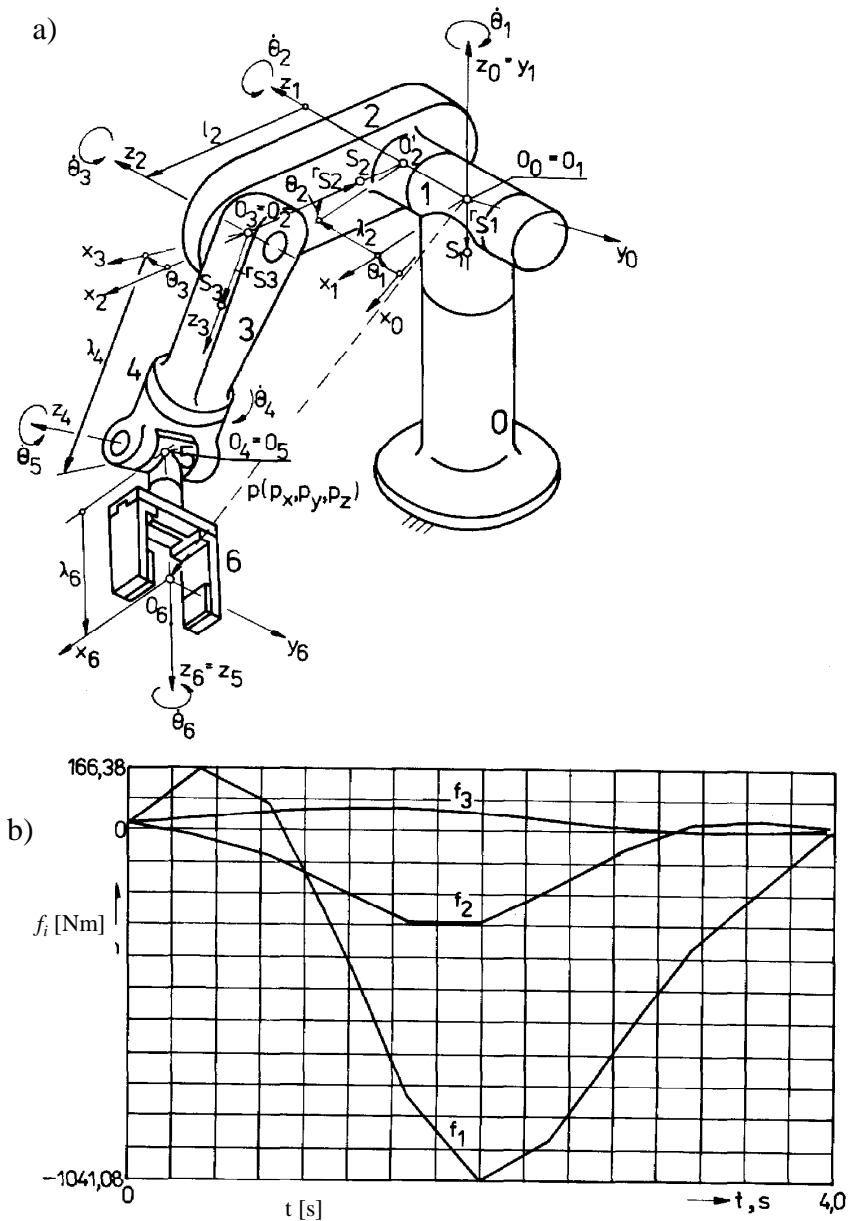
$$\begin{aligned}
r_{S1} = [0 \quad -y_{S1} \quad 0]^T, \quad r_{S2} = [x_{S2} \quad 0 \quad 0]^T, \quad r_{S3} = [0 \quad 0 \quad z_{S3}]^T \\
\mathbf{I}_{0i} = m_i \begin{bmatrix} k_{ix}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{iy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{iz}^2 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

Momenty napędowe w poszczególnych połączeniach napędowych są następujące:

$$\begin{aligned}
f_3 = M_{2,3z} = m_3 \left\{ k_{3z}^2 \left( \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 + z_{s3} l_2 \left[ \ddot{\theta}_2 c\theta_3 + \dot{\theta}_2 c s\theta_{21} + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 (s\theta_2 - s\theta_3) + \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + \dot{\theta}_1^2 c\theta_2 s(\theta_2 + \theta_3) \right] \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 = M_{1,2z} = m_2 k_{2z}^2 \ddot{\theta}_2 + M_{2,3z} + m_3 \left\{ l_2^2 \left( \ddot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 c\theta_2 \right) + \right. \\
\left. + z_{s3} l_2 \left[ \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 c(\theta_2 + \theta_3) - (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 s\theta_3 + (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) c\theta_3 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1 = M_{0,1z} = m_1 k_{1y}^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 k_{2x}^2 \ddot{\theta}_1 + m_3 \left\{ k_{3x}^2 \left[ \ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) s(\theta_2 + \theta_3) c(\theta_2 + \theta_3) \right] + \right. \\
+ k_{3z}^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 c(\theta_2 + \theta_3) + z_{s3} l_2 \left[ 2\ddot{\theta}_1 c\theta_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s\theta_2 + \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) c\theta_3 \right] c(\theta_2 + \theta_3) - \\
\left. - l_2^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s\theta_2 c\theta_2 \right\}
\end{aligned}$$



Rys. 6.8. a) Schemat manipulatora PUMA 560 z oznaczeniami wymiarów i rozkładów mas, b) przebiegi czasowe momentów napędowych w połączeniach obrotowych.

**Przykład liczbowy.** Dla ramienia manipulatora PUMA 560, w skład którego wchodzi pierwsze trzy człony połączone obrotowo, przyjęto następujący rozkład mas:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 50 \text{ kg}, & r_{S1} &= [0 \ 0 \ 0]^T \text{ m} \\
 m_2 &= 109 \text{ kg}, & r_{S2} &= [-0,200 \ 0 \ 0]^T \text{ m} \\
 m_3 &= 57 \text{ kg}, & r_{S3} &= [0 \ 0 \ 0,060]^T \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{O1} = 50 \begin{bmatrix} 3,37 & 0 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0 & 3,37 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{O2} = 109 \begin{bmatrix} 15,1 & 0 & 0 \\ 0 & 15,1 & 0 \\ 0 & 0 & 10,8 \end{bmatrix}$$

$$I_{03} = 57 \begin{bmatrix} 4,20 & 0 & 0 \\ 0 & 4,20 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 \end{bmatrix} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

przy czym w rozkładzie masy członu 3 uwzględniono rozkłady mas pozostałych członów, tj. 4, 5, 6 oraz obiektu manipulacji. Mając dane współrzędne końca ramienia  $\mathbf{p}_r = [-0,13390 \ 0,14360 \ 0,31192]^T$ , za pomocą odpowiedniej procedury rozwiązania zadania odwrotnego wyznaczono wartości

$$\theta_1 = 83,41^\circ, \quad \theta_2 = -0,75^\circ, \quad \theta_3 = -44,10^\circ$$

Zmiany wartości  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) w czasie  $t = 4$  s opisano wielomianem trzeciego stopnia. Wartości przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń kątowych w środku przedziału ruchu, tzn. dla  $t = 2$  s, są następujące:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 68,61^\circ, & \theta_2 &= -6,59^\circ, & \theta_3 &= -22,90^\circ \\ \dot{\theta}_1 &= -13,87 \text{ s}^{-1}, & \dot{\theta}_2 &= -5,48 \text{ s}^{-1}, & \dot{\theta}_3 &= 19,87 \text{ s}^{-1} \\ \ddot{\theta}_1 &= 0 \text{ s}^{-2}, & \ddot{\theta}_2 &= 0 \text{ s}^{-2}, & \ddot{\theta}_3 &= 0 \text{ s}^{-2} \end{aligned}$$

Według podanych wyżej wzorów obliczono momenty napędowe

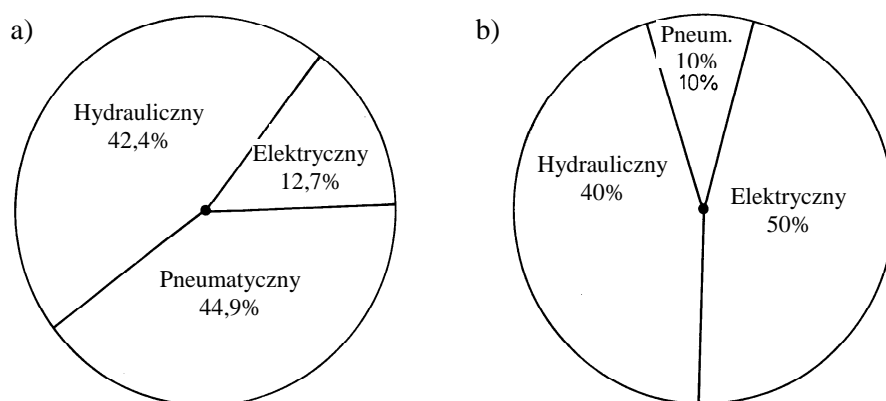
$$f_3 = M_{2,3z} = -284,5 \text{ Nm}, \quad f_2 = M_{1,2z} = 39,1 \text{ Nm}, \quad f_1 = M_{0,1z} = -1041 \text{ Nm},$$

# 7. Napędy i mechanizmy stosowane w robotach

## 7.1 Wprowadzenie

We współczesnych robotach stosowane są najczęściej trzy rodzaje napędów siłowników: *pneumatyczne*, *hydrauliczne* i *elektryczne* oraz ich kombinacje. Każdy robot jest wyposażony w układ siłowników rozmieszczonych odpowiednio na ramionach robota lub w jego połączeniach ruchowych, tworząc napęd robota.

Na rysunku 7.1 pokazano udział procentowy różnego rodzaju siłowników stosowanych w robotach przemysłowych. Ze względu na rozwój nowych odmian silników elektrycznych, takich jak: krokowe, liniowe, tarczowe oraz tzw. bezpośredniego napędu, udział napędu elektrycznego wzrósł od 12,7% w roku 1980 do ok. 50% w roku 1990. Zmniejszył się udział napędu pneumatycznego z ok. 45% do 10%. Napęd hydrauliczny jest nadal stosowany dla robotów o dużych udźwigach.



Rys. 7.1. Udział procentowy różnego rodzaju siłowników stosowanych w robotach: a) w roku 1980, b) w roku 1990. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

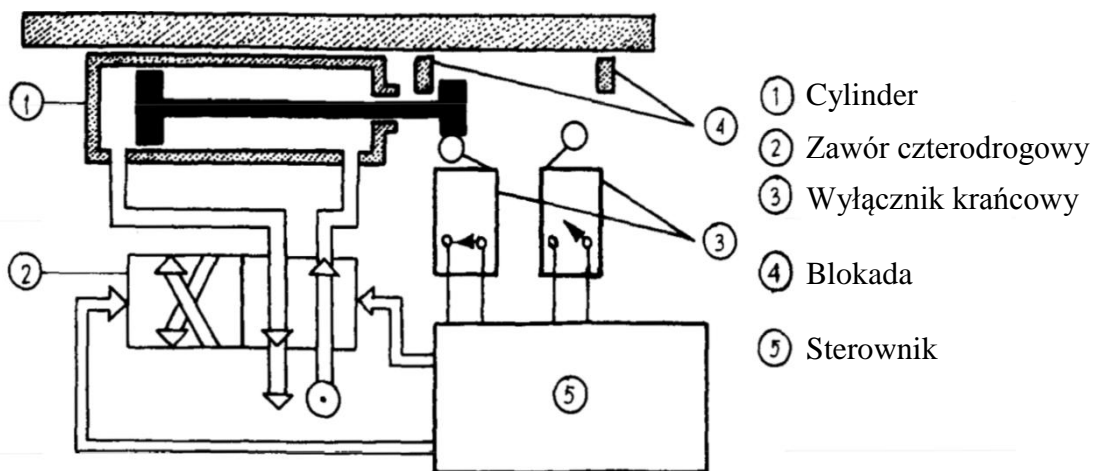
## 7.2 Napęd pneumatyczny

Napęd pneumatyczny wykorzystuje na ogół sprężone powietrze. Zaletą tego typu napędu jest łatwość pozyskania powietrza do zasilania układu oraz możliwość łączenia układu z atmosferą po zakończeniu cyklu pracy. Niskie ciśnienie w porównaniu z napędem hydraulicznym czyni ten rodzaj napędu bezpiecznym w eksploatacji. Napęd pneumatyczny znajduje zastosowanie w małych prostych robotach typu „pick-and-place”. Na przykład firma Leiko wytwarza różne odmiany takich robotów. Firma IRI (ang. *Int. Robomotion Intelligence*) wytwarza robota



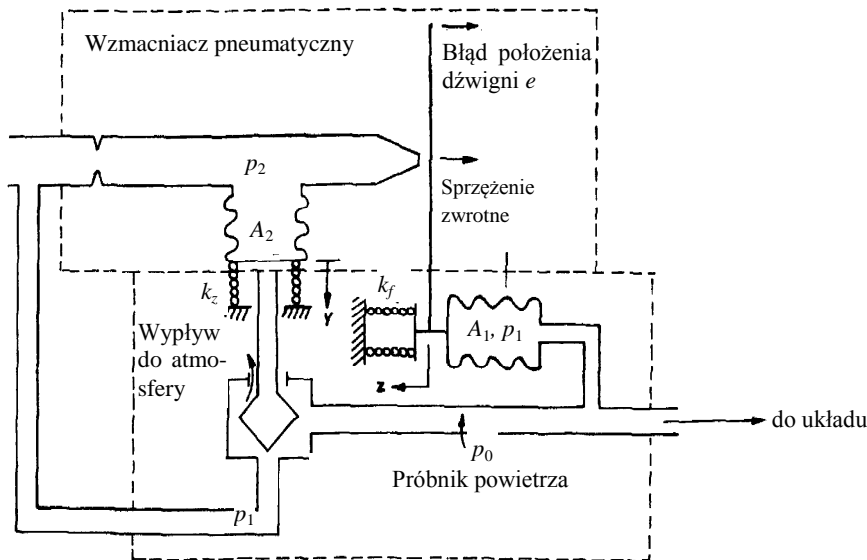
o napędzie pneumatycznym typu serwo ze sterowaniem komputerowym. Robot ten ma udźwig 10 kg oraz prędkość do 0,5 m/s.

Układ pokazany na rys. 7.2 wykorzystuje głównie energię potencjalną sprężystości powietrza (pneumatyczną) o ciśnieniu  $0,4 \div 0,8$  MPa. Siłownik liniowy 1 (czasami obrotowy) otrzymuje powietrze z rozdzielacza 2, który jest sterowany z logicznego układu pneumatycznego lub elektrycznego 5. Wyłączniki krańcowe 3 przesyłają sygnał logiczny i następuje zatrzymanie na zderzakach 4. W takim układzie wyposażonym na ogół w amortyzator występują tylko dwa wyłączniki końcowe 3. Na wieloosiowym manipulatorze typu pneumatycznego (0–1) można zmienić cykl i okres trwania cyklu za pomocą programu, ale zakres ruchu musi być zmieniany ręcznie. Omówiony układ jest znacznie mniej elastyczny (od proporcjonalnego), ale stosunkowo tani.



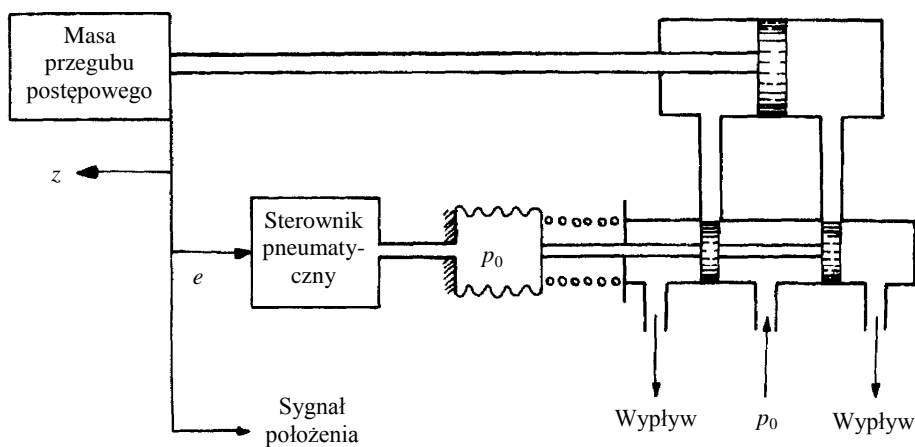
Rys. 7.2. Zasada działania układu pneumatycznego typu U-1; 1 – cylinder, 2 – rozdzielacz, 3 – wyłącznik krańcowy, 4 – zderzaki krańcowe, 5 – logiczny układ sterujący. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Działanie prostego proporcjonalnego układu pokazano na rys. 7.3. Sercem tego układu jest dwustopniowy wzmacniacz. Pierwszy stopień zwany jest uderzeniowym wzmacniaczem tłokowym. Błąd położenia dźwigni  $e$  kontroluje ciśnienie  $p_2$ , które z kolei określa położenie  $y$  tłoka drugiego stopnia wzmacniacza. Drugi stopień wzmacniacza, nazwany przekaźnikiem powietrza, zapewnia duży przepływ. Sygnał błęd  $e$  zmniejsza błąd dźwigni wraz ze zmniejszaniem ciśnienia  $p_2$ . W rezultacie tłok przesuwa się, zmniejszając wypływ powietrza do atmosfery i powodując wzrost ciśnienia  $p_1$  (ciśnienie doprowadzane do układu napędowego). Ta akcja zwiększa działanie sprzężenia mieszkowego, czyli przesuwa błąd dźwigni na lewo ( $z$  wzrasta). Zachodzi to wówczas, gdy dźwignia przemieszcza się w lewo, co powoduje zmniejszenie ciśnienia ( $z$  maleje). Równowagę położenia tłoków i sprzężenia zapewniają sprężyny o stałych  $k_z$  i  $k_f$ , wielkości  $A_2$  i  $A_1$  są odpowiednio powierzchniami tłoka i mieszka.



Rys. 7.3. Proporcjonalny sterownik pneumatyczny. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Sterownik pokazany na rys. 7.4 różni się od układu proporcjonalnego z rys. 7.3 dzięki wyposażeniu w dodatkowe elementy. Może to być opcja różniczkująca przez wprowadzenie odpowiednich ograniczeń do układu sprzężenia mieszkowego. Sterowanie całkujące uzyskuje się przez dodanie innego mieszka z lewej strony punktu  $z$ . Można połączyć te działania w celu otrzymania sterownika pneumatycznego typu PID. Każdy ze sterowników może być wykorzystany do napędu połączenia przesuwne. Czterodrożny suwak i tłok/cylinder działają podobnie jak układ hydrauliczny. Jest również możliwe napędzanie przegubu obrotowego przez zastosowanie turbinowego silnika pneumatycznego. Urządzenie to wytwarza moment proporcjonalny do ciśnienia wyjściowego sterowników  $p_0$  i jest niezależne od prędkości dźwigni. Sprężone powietrze o wysokim ciśnieniu umożliwia szybkie i dokładne ruchy z udziałem mechanicznych ograniczników do zatrzymania poszczególnych przegubów.

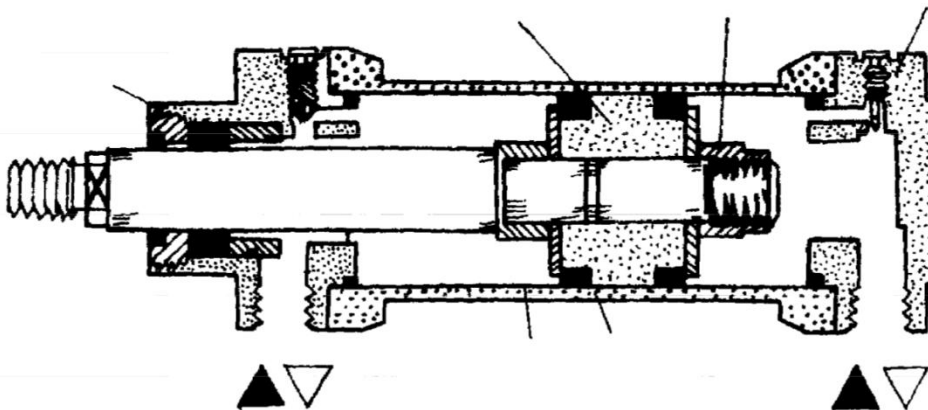


Rys. 7.4. Udoskonalony siłownik pneumatyczny z rys. 7.3. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

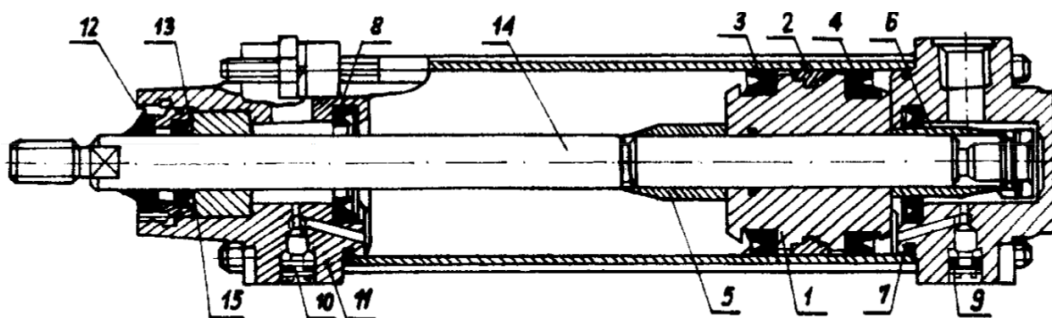
## 7.2.1 Siłowniki pneumatyczne liniowe

Na rysunkach 7.5 i 7.6 przedstawiono różne rozwiązania siłowników pneumatycznych o ruchu przesuwным. Siłowniki o średnicy cylindra ponad 25 mm odznaczają się bardziej skomplikowaną konstrukcją. Są to z reguły siłowniki działania dwustronnego o regulowanym tłumieniu dojścia tłoka do obu skrajnych położań.

Na rysunku 7.6 przedstawiono siłownik działania dwustronnego firmy Herion. Tłok 1 jest wyposażony w pierścień prowadzący 2 i w dwa pierścienie uszczelniające 3 i 4. Przy dobiegu tłoka do jednego z położań tulejki 5 i 6, współpracujące z pierścieniami uszczelniającymi 7 i 8 w cylinderkach tłumiących, sprężają powietrze w danym cylinderku, co wyhamowuje ruch tłoka. Zaworki 9 i 10 służą do regulacji siły tłumiącej. W korpusie przednim 11 znajdują się dodatkowo pierścień zgarniający 12 i pierścień uszczelniający 13, współpracujące z tłoczyskiem 14. Tłoczysko jest prowadzone w tulejce 15, z materiału o własnościach samo-smarnych. Ciśnienie sterujące może wynosić  $0,6 \div 1,6$  MPa. Powietrze zasilające siłownik jest filtrowane i nasycone mgłą olejową. Oddzielną grupę siłowników pneumatycznych stanowią wielopozycyone siłowniki pneumatyczne.



Rys. 7.5. Siłownik pneumatyczny o ruchu postępowym firmy Rexroth Sigma.



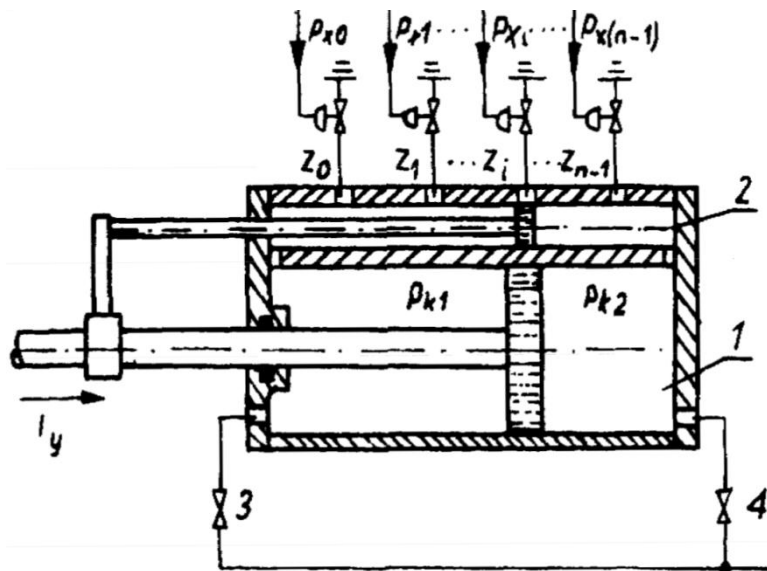
Rys. 7.6. Siłownik tłokowy dwustronnego działania o regulowanym tłumieniu dojścia tłoka do skrajnych położań. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Wielopozycyone siłowniki pneumatyczne przetwarzają cyfrowy sygnał pneumatyczny na quasi-analogowe przesunięcie trzpienia siłownika. Dziela się na:

- 2-położeniowe siłowniki pneumatyczne z cyfrowym ustawnikiem pozycyjnym,
- zespoły 2-położeniowych siłowników pneumatycznych z mechanicznym układem sumującym przesunięcia ich trzpieni,
- wielokomorowe siłowniki pneumatyczne z układem zderzaków.

Każdy z wymienionych rodzajów cyfrowych siłowników pneumatycznych może być typu: tłokowego, kulkowego, membranowego.

Dwu-położeniowy siłownik pneumatyczny z cyfrowym ustawnikiem pozycyjnym (rys. 7.7) składa się z typowego 2-położeniowego siłownika pneumatycznego tłokowego dwustronnego działania 1, sterowanego cyfrowym rozdzielnikiem pneumatycznym 2. Na  $n$ -wyjściach cyfrowego rozdzielnika pneumatycznego znajdują się odcinające zawory pneumatyczne  $Z_0, Z_1, \dots, Z_i, \dots, Z_{n-1}$  sterowane sygnałami  $p_{x0}, p_{x1}, \dots, p_{xi}, \dots, p_{x(n-1)}$ .



Rys. 7.7. Schemat blokowy 2-położeniowego siłownika tłokowego z cyfrowym pozycjonowaniem. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Jeżeli zero-jedynkowe sygnały pneumatyczne  $p_{x0}, p_{x1}, \dots, p_{xi}, \dots, p_{x(n-1)}$  spełniają warunek

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_{sk} = 0, \quad p_{xi} = 1, \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (7.1)$$

$k \neq i$

to przetwarzanie cyfrowego sygnału pneumatycznego

$$p_x = a_{n-1} p_{x(n-1)} + \dots + a_i p_{xi} + \dots + a_1 p_{x1} + a_0 p_{x0} \quad (7.2)$$

na przesunięcie  $l_y$  trzpienia siłownika odbywa się wg zależności

$$l_y = a_i \Delta l + l_0 \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (7.3)$$

gdzie:  $a_i$  – waga pozycji i kodu cyfrowego sygnału pneumatycznego  $p_x$ ,  $p_x$  – przesunięcie.

Zasilanie komór odbywa się przez rezystory pneumatyczne 3 i 4. Prosta konstrukcja, znaczna wartość siły czynnej i stosunkowo dobra dokładność ustawienia trzpienia w kilku określonych położeniach są głównymi zaletami omówionego cyfrowego siłownika pneumatycznego. Istnieje tutaj możliwość przejęcia funkcji rozdzielacza przez tłok siłownika.

## 7.2.2 Siłowniki pneumatyczne kątowe

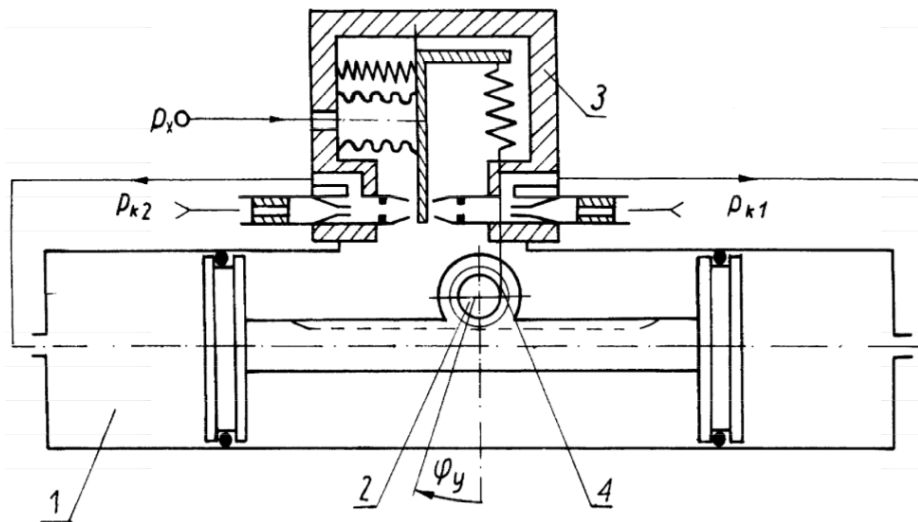
Siłowniki pneumatyczne kątowe są stosowane do spowodowania zmian położenia kątowych wałka wyjściowego siłownika. Można je podzielić na:

- analogowe siłowniki pneumatyczne,
- cyfrowe siłowniki pneumatyczne.

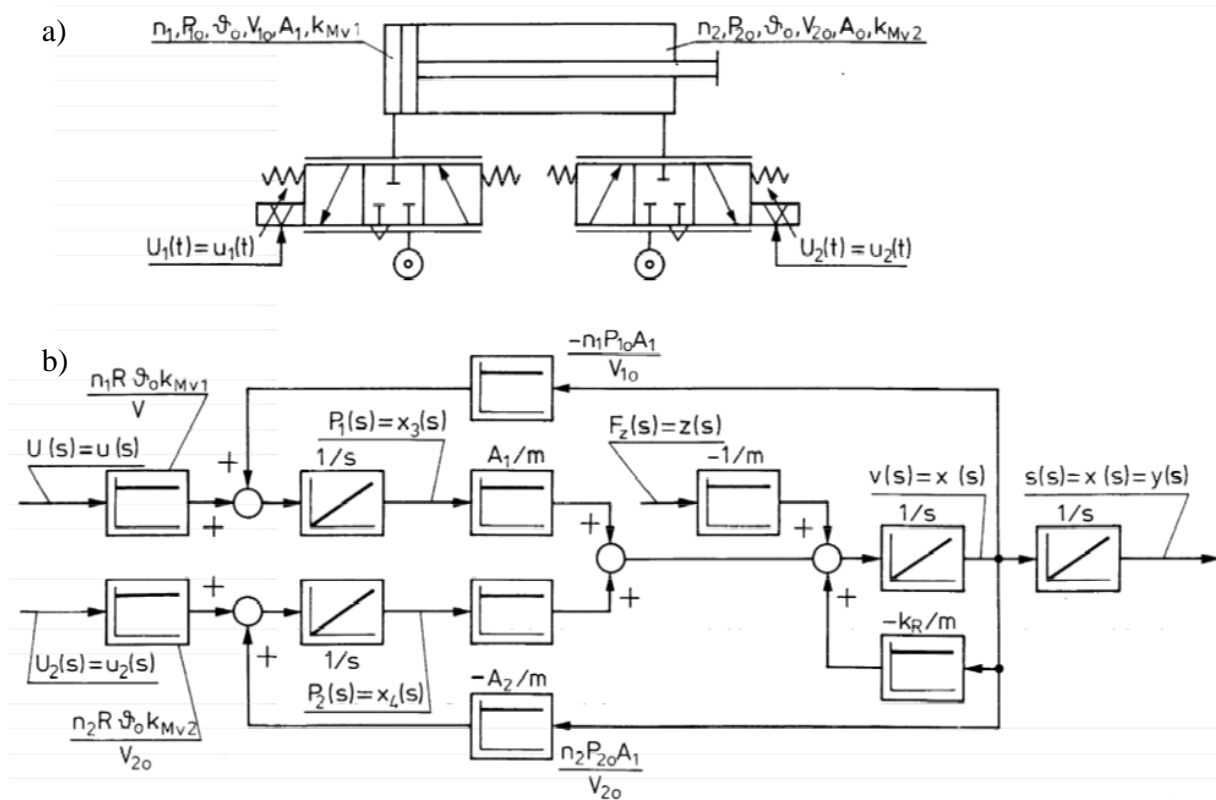
Jeśli potrzebny jest znaczny czynny moment obrotowy na wałku wyjściowym siłownika w całym zakresie przesunięć kątowych  $\varphi_y$ , to stosuje się rozwiązania konstrukcyjne, w których elementami zasadniczymi są siłowniki dwustronnego działania tłokowe lub membranowe. W rozwiązaniu przedstawionym na rys. 7.8 siłownik pneumatyczny dwustronnego działania 1 napędza wałek wyjściowy 2 przez przekładnię typu zębatka-koło zębate.

Sygnał  $p_x$  podaje się do mieszka wejściowego ustawnika precyzyjnego 3. Ruchoma dźwignia ustawnika steruje dwiema kaskadami pneumatycznymi wektorowymi pracującymi w układzie różnicowym. Ciśnienia kaskadowe  $p_{k1}$  i  $p_{k2}$  podaje się do komór wejściowych siłownika 1. Obrót wałka wyjściowego 2 powoduje przez cięgno 4 napinanie sprężyny pomiarowej w torze sprzężenia zwrotnego (1–3). W stanie ustalonym istnieje, mimo oporów, określona zależność liniowa  $\varphi_y = k_{px}$ . Zastosowanie kaskad pneumatycznych umożliwia uzyskanie dużej dokładności przetwarzania  $p_x/\varphi_y$  oraz zwiększenie siły czynnej na tłoku 5 i momentu obrotowego czynnego na wałku wyjściowym 2. Wymagana jest pełna szczelność komór wejściowych siłownika 1. Ten siłownik stosuje się w przypadku, gdy amplituda przemieszczeń kątowych w przegubie jest ograniczona (np. w przegubie promieniowo-nadgarstkowy manipulatora).

Stosuje się również inne rozwiązania przekształcające przesuw tłoka w cylindrze na ruch obrotowy, np. za pomocą zębatego (Rys. 7.8), śruby lub krzywki oraz siłowniki pneumatyczne membranowe, tzw. *sztuczne mięśnie pneumatyczne*.



Rys. 7.8. Schemat siłownika pneumatycznego napędzającego przemieszczenie kątowe.



Rys. 7.9. Zlinearyzowany model dynamiczny elektropneumatycznego napędu z oddzielnym sterowaniem cylindrów: a) schematyczne przedstawienie napędów, b) schemat budowy zlinearyzowanego układu napędu. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

## 7.3 Napęd hydrauliczny

Napęd hydrauliczny, pomimo przeważającego zastosowania napędu elektrycznego, pozostaje nadal tam, gdzie występuje potrzeba szybkiego przemieszczania przy znacznych obciążeniach robota. Krótki czas rozruchu (od 0,1 do 1 s) uwiadamia korzyść ze stosowania napędu hydraulicznego.

Na przykład siłownik hydrauliczny o powierzchni użytkowej tłoka 50 cm<sup>2</sup>, zasilany ze źródła energii hydraulicznej o ciśnieniu 21,0 MPa, przy ciśnieniu 14,0 MPa wywołuje na wyjściu siłownika siłę 70 kN.

### 7.3.1 Siłowniki hydrauliczne liniowe

Rozróżnia się trzy rodzaje siłowników, a mianowicie: dwustronnego działania, różnicowe i jednostronnego działania.

Na rysunku 7.10a pokazano siłownik hydrauliczny liniowy dwustronnego działania. Ciśnienia po obu stronach tłoka wynoszą odpowiednio  $p_1$  i  $p_2$ . Ponieważ po stronie o ciśnieniu  $p_2$  znajduje się trzpień, to powierzchnie tłoka po obu stronach są różne. Stąd rozwijana siła nie jest funkcją symetryczną ciśnienia i wynosi

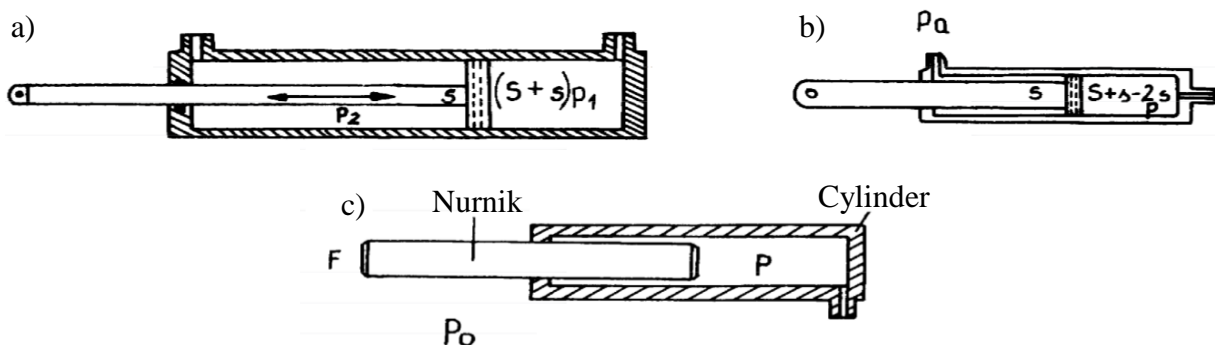
$$F = (S + s)p_1 - Sp_2$$

W przypadku tłoka z dwustronnym trzpieniem rozwijana siła

$$F = S(p_1 - p_2)$$

W przypadku różnicowego siłownika hydraulicznego (rys.7.10b) powierzchnia przekroju trzpienia jest równa powierzchni tłoka  $s=S$ . Po stronie tłoka występuje wysokie ciśnienie  $p_o$  a po drugiej stronie zmienne ciśnienie  $p$ . Stąd siła

$$F = s(2p - p_o)$$



Rys. 7.10. Siłownik hydrauliczny liniowy: a) dwustronnego działania, b) różnicowy, c) jednostronnego działania. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Na rysunku 7.10c pokazano siłownik liniowy jednostronnego działania. Siła rozwijana jest w jednym kierunku. Powrót trzpienia następuje pod działaniem sił zewnętrznej.

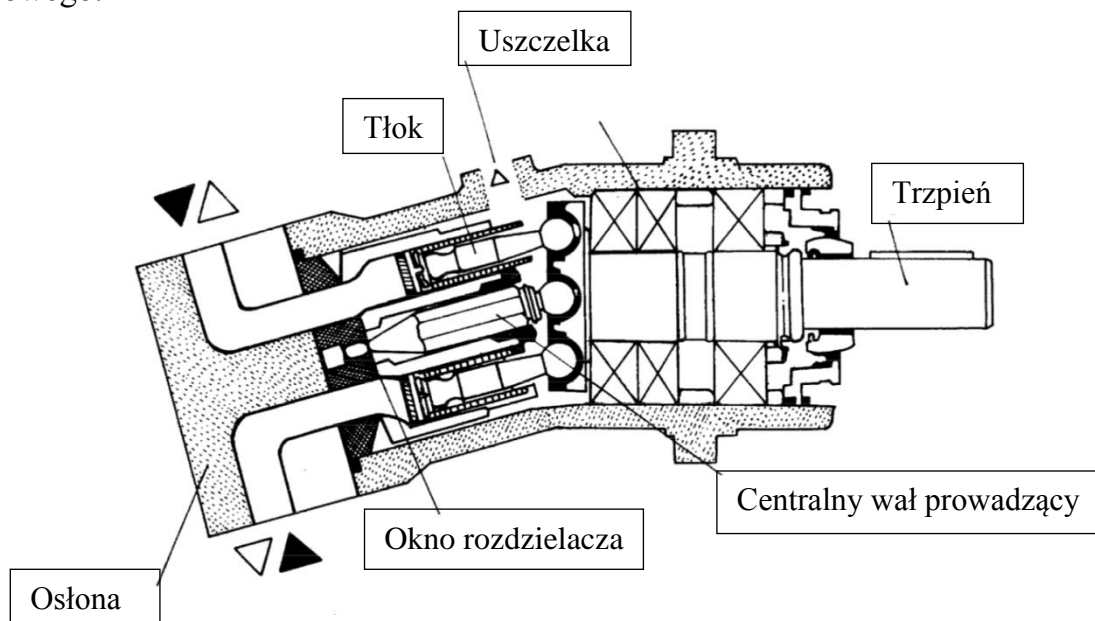
$$0 \leq F = S(p - p_o) \leq S(p_a - p_o)$$

### 7.3.2 Silniki hydrauliczne obrotowe

W celu napędzania ruchu obrotowego stosuje się różne rodzaje silników hydraulicznych. W większości są to rewersyjne energetyczne urządzenia tłokowe działające również jako pompy. Do podstawowych odmian konstrukcyjnych należą:

- osiowy silnik hydrauliczny z pochyloną tarczą,
- osiowy silnik hydrauliczny z pochylonym cylindrem,
- silnik hydrauliczny z tłokami promieniowymi,
- silnik hydrauliczny zębaty.

Przykładowo rys. 7.11 pokazuje silnik hydrauliczny z pochylonym cylindrem. Położenie bębna i tarczy silnika jest podobne jak w silniku z pochyloną tarczą. Kulowe przeguby są ulokowane we wgłębieniach tarczy związanej z wałem wyjściowym. Bęben opiera się na sferycznej powierzchni tarczy rozdzielacza hydraulicznego. Objętość cylindra można zmieniać przez pochylenie osi bębna względem osi wału wyjściowego.



Rys. 7.11. Silnik hydrauliczny wielotłokowy z pochylonymi cylindrami. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

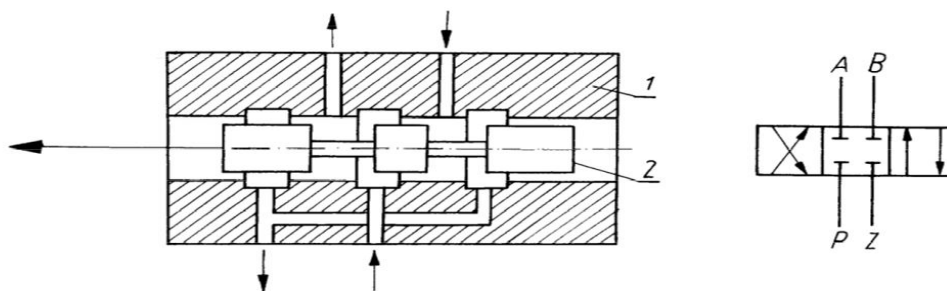
Podstawowe charakterystyki siłowników hydraulicznych określają: wartość ciśnienia roboczego oraz maksymalną dopuszczalną wartość ciśnienia poza przedziałem czasu. Inne charakterystyki zależą od rodzaju siłowników hydraulicznych. Dla siłowników hydraulicznych tłokowych ważne są wartości znamionowe: przemieszczenia, objętości, prędkości i masy części ruchomych, a dla silników hydraulicznych obrotowych: wartości stosunku objętości do przemieszczenia kąowego w  $\text{m}^3/\text{rad}$ , maksymalnej prędkości kąowej i nominalnego momentu obrotowego.



### 7.3.3 Rozdzielacze, wzmacniacze i serwowzawory hydrauliczne

Zadaniem rozdzielnika hydraulicznego jest skierowanie strumienia cieczy do określonego miejsca obwodu hydraulicznego (najczęściej do jednej z komór siłownika lub silnika hydraulicznego). Rozdzielacze hydrauliczne z konstrukcyjnego punktu widzenia można podzielić na dwie grupy: **suwakowe i gniazdowe**.

Na rysunku 7.12a przedstawiono schemat ideowy jednego z rozdzielaczy hydraulicznych suwakowych (4-drogowego, 3-położeniowego), który pozwala wyjaśnić zasadę działania rozdzielnika hydraulicznego, a na rys. 7.12b pokazano jego symbol graficzny. Przemieszczający się w korpusie 1 suwak 2 może zajmować trzy położenia. W położeniu środkowym obydwie komory silnika są odcięte od pompy lub akumulatora oraz od zbiornika Z. Ciecz nie przepływa przez rozdzielacz hydrauliczny. W prawym skrajnym położeniu suwaka 2 pompa P zostaje połączona z komorą A silnika i jednocześnie komora B silnika ze zbiornikiem. Strumień cieczy jest kierowany do komory A silnika hydraulicznego. W lewym skrajnym położeniu suwaka pompa P zostaje połączona z komorą B i jednocześnie komora A silnika ze zbiornikiem. Przepływ cieczy jest skierowany do komory B.

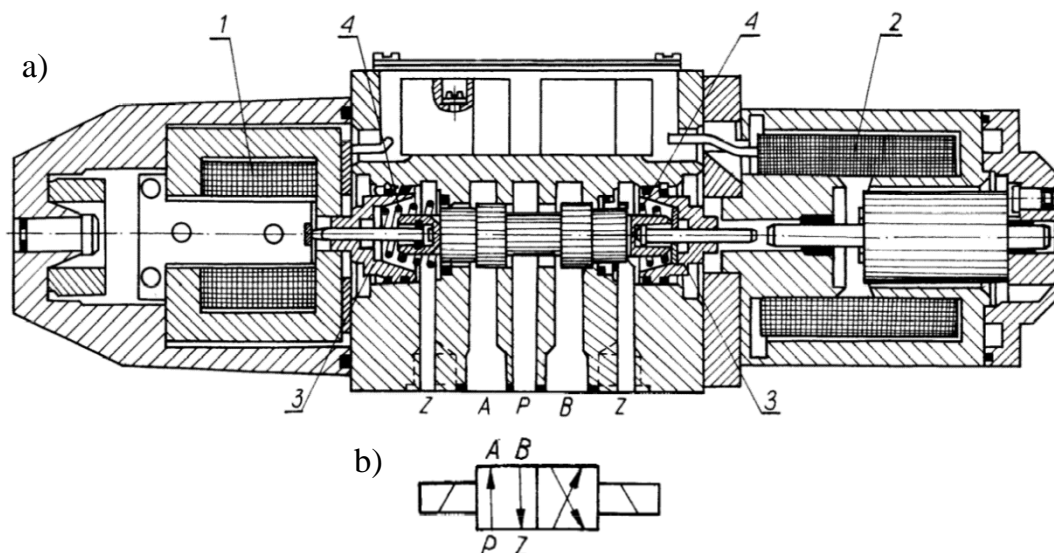


Rys. 7.12. Rozdzielnik suwakowy 4-drogowy 3-położeniowy: a) schemat ideowy, b) symbol graficzny. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Ze względu na sposób sterowania rozróżniamy:

- rozdzielacze hydrauliczne jednostopniowe (sygnał działa bezpośrednio na suwak),
- rozdzielacze hydrauliczne dwustopniowe (sygnał sterujący działa bezpośrednio na suwak).

W rozdzielaczach hydraulicznych jednostopniowych stosuje się sterowanie mechaniczne, hydrauliczne, pneumatyczne lub elektryczne, a w dwustopniowych – elektryczne.



Rys. 7.13. Rozdzielnik suwakowy 4-drogowy 3-położeniowy, sterowany elektrycznie, firmy Rexroth: a) przekrój podłużny, b) schemat graficzny. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Na rysunku 7.13a przedstawiono uproszczony przekrój wzdłużny rozdzielacza hydraulicznego jednostopniowego czterodrogowego dwupołożeniowego sterowanego elektrycznie w wykonaniu firmy Rexroth, a na rys. 7.13b – jego symbol graficzny, przy czym, aby porównać wykonanie elektromagnesów, umieszczono po lewej stronie elektromagnes 1 prądu przemiennego pracujący w powietrzu, a po prawej stronie elektromagnes 2 prądu stałego również pracujący w powietrzu (produkowane seryjnie rozdzielniki hydrauliczne mają jednakowe elektromagnesy). Przez przyłożenie napięcia do cewki elektromagnesu powstaje siła osiowa przemieszczająca zworę elektromagnesu. Zwora przez popychacz przemieszcza w skrajne położenie suwak rozdzielnika. Na rysunku przedstawiono rozdzielacz hydrauliczny w położeniu odpowiadającym przyłożeniu napięcia do cewki elektromagnesu 1. Pierścienie uszczelniające zewnętrzne i wewnętrzne, umieszczone w tulejach 3 ustalonych sprężynami 4, uniemożliwiają przedostanie się cieczy do elektromagnesów. Rozdzielacze hydrauliczne sterowane elektrycznie są przystosowane do natężenia przepływu do  $1,66 \text{ dm}^3/\text{s}$  ( $100 \text{ dm}^3/\text{min}$ ) i ciśnienia do 32 MPa.

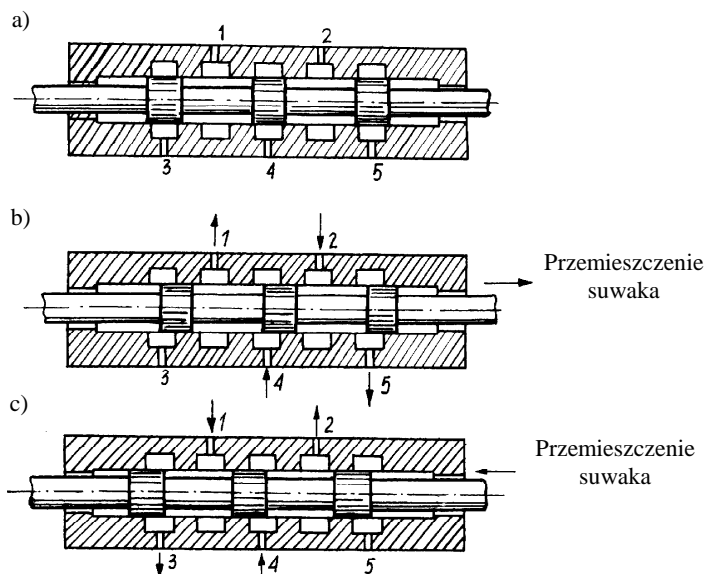
Serwowawory hydrauliczne dzielimy na przepływowe i ciśnieniowe. Serwowawory hydrauliczne przepływowe, zwane także wzmacniaczami hydraulicznymi, służą do wzmocnienia i przetwarzania w sposób ciągły małego sygnału wejściowego na odpowiednio większy sygnał wyjściowy w postaci natężenia przepływu cieczy.

**Serwowawory hydrauliczne ciśnieniowe** zmieniają mały sygnał wejściowy na duży sygnał wyjściowy w postaci ciśnienia przy małym natężeniu przepływu.

Serwowawory hydrauliczne ze sterowaniem elektrycznym są nazywane **wzmacniaczami elektrohydraulicznymi**. Na rysunku 7.14 zilustrowano zasadę działania tłoczkowego wzmacniacza hydraulicznego. Tłoczkowy wzmacniacz

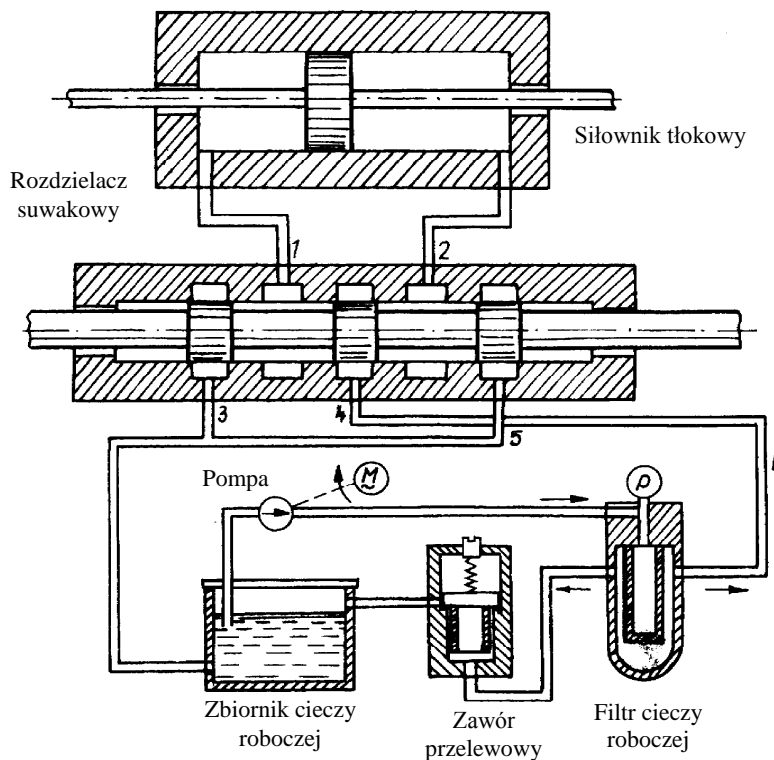
hydrauliczny składa się z cylindrycznego tłoczka oraz tulei obejmującej tłoczek i mającej pięć otworów, zwanych oknami. Okno wlotowe 4 służy do doprowadzenia cieczy roboczej przez pompę, okna robocze 1 i 2 służą na przemian do wprowadzania i wyprowadzania cieczy roboczej do lub z komór siłownika; okna wylotowe 3 i 5 służą do odprowadzania cieczy roboczej do zbiornika tej cieczy. Wielkością wejściową sterującą wzmacniacza suwakowego jest pozycja jego tłoczka:

- w pozycji środkowej tłoczka (rys. 7.14a) okno wlotowe 4 oraz okna wylotowe 3 i 5 są zamknięte i ciecz robocza nie może przepływać przez wzmacniacz,
- w pozycji prawej tłoczka (rys. 7.14b) otwiera się droga między oknem wlotowym 4 a oknem 1 oraz droga między oknem wylotowym 5 i oknem 2, a więc ciecz robocza może wpływać do siłownika przez okno 1 i wypływać z niego przez okno 2;
- w pozycji lewej tłoczka (rys. 9.14c) otwiera się droga między oknem wlotowym 4 i oknem 2 oraz droga między oknem wylotowym 3 a oknem 1, a więc ciecz może wpływać do siłownika przez okno 2 i wypływać z niego przez okno 3.



Rys. 7.14. Tłoczkowy wzmacniacz hydrauliczny.

Istotną cechą konstrukcji wzmacniacza hydraulicznego tłoczkowego jest to, że oddziałujące na tłoczek siły wywołane ciśnieniem cieczy roboczej częściowo kompensują się nawzajem, wskutek czego przesunięcie tłoczka wymaga niewielkich sił.



Rys. 7.15. Obieg cieczy roboczej siłownika hydraulicznego tłokowego sterowanego przez wzmacniacz; 1÷5 – otwory okna wzmacniacza suwakowego. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Na rysunku 7.15 przedstawiono obieg cieczy roboczej siłownika hydraulicznego tłokowego, sterowanego przez wzmacniacz hydrauliczny tłoczkowy. W pozycji środkowej tłoczka okno wlotowe 4 oraz okna wylotowe 3 i 5 są zasłonięte tłokami suwaka. Stałość pozycji tłoka roboczego, pomimo oddziałujących nań sił, zależy w tym przypadku od szczelności tłoka oraz tłoczka. W zakresie poprawy szczelności udoskonalono technologię obróbki oraz poprawiono metody filtracji cieczy roboczej. Przesunięcie tłoczka w lewo lub w prawo od pozycji pokazanej na rys. 7.15 powoduje odpowiednio dopływ cieczy roboczej do prawej lub lewej komory siłownika, w wyniku czego tłok przesunie się w lewo lub w prawo, przy czym ciecz z tej komory, która w wyniku ruchu tłoka zmniejszy swoją objętość, zostaje przez wzmacniacz hydrauliczny tłoczkowy wprowadzona do zbiornika cieczy roboczej. Ciecz robocza jest tłoczona do wzmacniacza hydraulicznego pompą napędzaną indukcyjnym silnikiem elektrycznym.

Przed wprowadzeniem cieczy roboczej do wzmacniacza hydraulicznego przechodzi ona przez filtr zaopatrzony w manometr. Filtr jest przeznaczony do oczyszczania cieczy roboczej z zanieczyszczeń mechanicznych, groźnych dla szczelności tłoków suwaka i tłoka roboczego. Jeżeli ciśnienie cieczy roboczej w filtrze przekracza wartość odpowiadającą nastawie sprężyny zaworu przelewowego, to zawór ten wpuszcza część cieczy z filtru z powrotem do zbiornika, ograniczając w ten sposób górną wartość ciśnienia cieczy roboczej i maksymalną siłę siłownika, zabezpieczając

tym samym siłownik przed przeciążeniami. Po zaniku przeciążenia zawór przelewowy przestaje przepuszczać ciecz roboczą do zbiornika i układ pracuje normalnie.

Stosowane w robotyce serwomechanizmy są na ogół urządzeniami wielostopniowymi. Ich zadanie polega na przemieszczaniu suwaka rozdzielacza hydraulicznego w taki sposób, aby odsłanianie okienka następowało proporcjonalnie do wartości elektrycznego sygnału sterowania napięciowego lub prądowego.

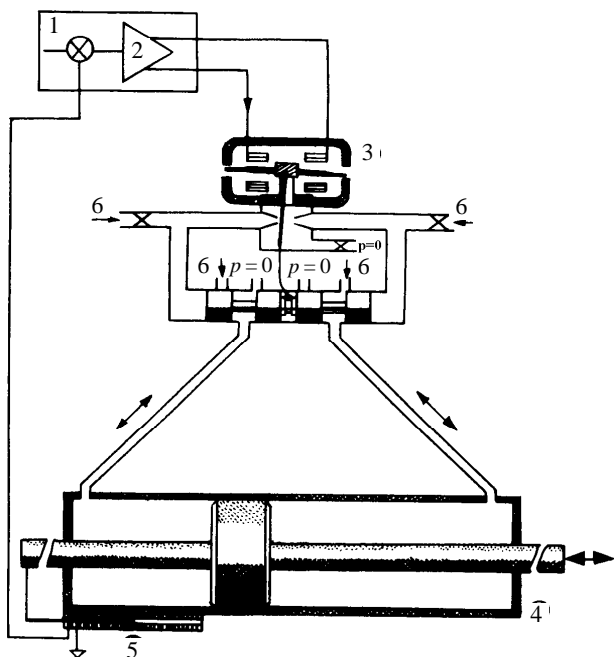
Rozróżnia się dwa rodzaje śledzących zaworów hydraulicznych różniących się sposobem sterowania tłoczkiem:

- zawory elektro-hydro-mechaniczne,
- serwozawory hydrauliczne z bezpośrednim sterowaniem elektrycznym.

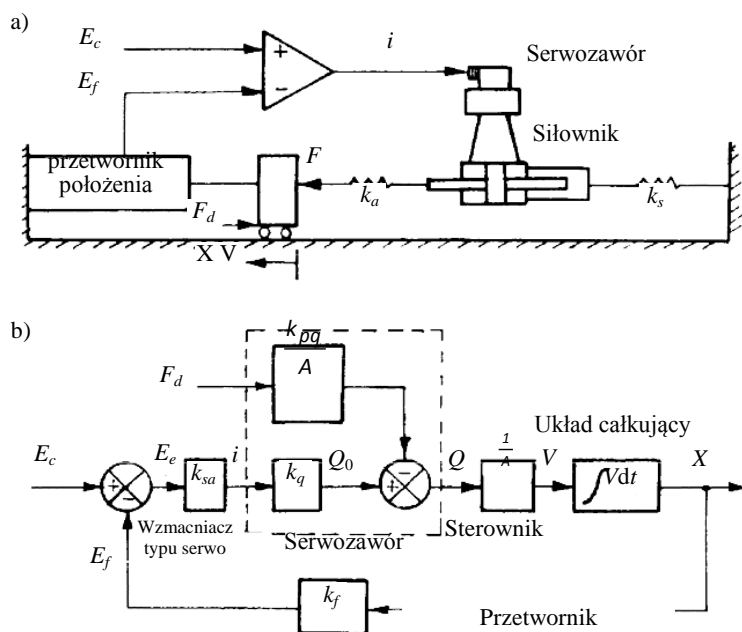
Znanym rozwiązaniem śledzącego zaworu hydraulicznego jest zawór hydrauliczny Mooga. Często stosowane są wzmacniacze elektrohydrauliczne proporcjonalne, które przekształcają ciągły elektryczny sygnał wejściowy w ciągły sygnał wyjściowy w postaci natężenia przepływu cieczy (służą do zdalnego sterowania kierunkiem i wartością natężenia przepływu cieczy).

#### **7.3.4 Serwomechanizmy elektrohydrauliczne**

Na rysunku 7.16 pokazano schemat serwomechanizmu elektrohydraulicznego, a na rys. 7.17 schemat i jego ideowy schemat blokowy. W tym układzie serwozawór siłownika jest wykorzystywany do sterowania ruchu postępowego. Można również sterować ruchem obrotowym, jeżeli zastąpi się cylinder siłownikiem hydraulicznym przekształcającym przepływ płynu na ruch obrotowy (tzn. silnikiem hydraulicznym). Dostępne są różne rodzaje zaworów hydraulicznych, na przykład o wartościach znamionowych natężenia przepływu od  $0,15 \cdot 10^{-3}$  do  $37,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ , co odpowiada mocy od 2,2 do 52 kW.



Rys. 7.16. Serwomechanizm elektrohydrauliczny; 1 – szafa sterownicza, 2 – wzmacniacz elektrohydrauliczny, 3 – silnik momentowy, 4 – siłownik, 5 – rejestracja położenia, 6 – zasilenie oleju o wysokim ciśnieniu. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



Rys.7.17. Typowy serwomechanizm do celów pozycjonowania: a) schemat, b) ideowy schemat blokowy (repr. Moog Inc. East Aurora, NY). (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

## 7.4 Napędy elektryczne

### 7.4.1 Znaczenie napędów elektrycznych

Napędy elektryczne wykazują liczne zalety, jak: łatwość rozdziału i dostarczania energii, dostępność silników elektrycznych (niektóre modele nie wymagają przekładni i mogą być montowane bezpośrednio w połączeniach ruchowych), dokładność i łatwe sterowanie, niewielkie straty i zanieczyszczenia. Ich wadą jest kwestia mocy. Stosunek mocy do masy lub momentu do masy w silnikach elektrycznych jest gorszy niż w silnikach hydraulicznych. Wynika to z masy obwodów magnetycznych. Poprawę uzyskuje się przez stosowanie stałych magnesów.

Silniki elektryczne stosowane w układach napędowych robotów można podzielić na trzy kategorie: silniki prądu stałego, silniki prądu przemiennego i silniki krokowe, zwłaszcza z tzw. bezpośrednim napędem elektrycznym. Te ostatnie dobrze nadają się dla celów pozycjonowania. W układzie sterowania napędu elektrycznego stosowany jest magneto-indukcyjny bądź optoelektroniczny impulsator montowany na wale napędowym.

### 7.4.2 Wymagania stawiane napędom elektrycznym

Podstawowe wymagania, które stawia się napędowi elektrycznemu:

- Zapewnienie aperiodyczności procesów przejściowych w całym zakresie zmian parametrów. Występowanie drgań prędkości i przeregulowania przy pozycjonowaniu wywołują trudności podczas pracy robota i pogarsza jakość pracy.
- Zapewnienie niezawodnej pracy w warunkach nieustalonych, ponieważ parametry masowe silników elektrycznych, często umieszczanych na ramionach manipulatora, powodują dodatkowe obciążenia dynamiczne.
- Napędy elektryczne powinny pracować stabilnie w warunkach zmiennych wartości momentów bezwładności i momentów obciążeń, czyli powinny być niewrażliwe na zmiany tych parametrów. Napęd elektryczny powinien również zabezpieczać robota przed wpływem drgań związanych z podatnościami układów (zapewnić odpowiednie tłumienie).
- Powinny być spełnione wymagania ekonomiczne, które zawierają warunek pewności i ekonomiczności pracy napędu, bezwybuchowości napędu, nie występowanie iskrzenia oraz wpływu smarowania. Wskaźnikiem ekonomiczności jest zapotrzebowanie energii na cykl pracy.
- Powinny być spełnione wymagania technologiczne, które obejmują utrzymanie zadanych parametrów ruchu, a mianowicie: dokładności pozycjonowania, płynnej regulacji prądu w szerokim zakresie, długotrwałego przebywania chwytaka w danym punkcie przestrzeni roboczej, nawet przy zaniku zasilania.

- Spełnienie wymagań bezpieczeństwa pracy, tzn. zapewnienie odpowiedniej blokady podczas awarii.
- Układ sterowania położeniem kątowym wału silnika elektrycznego powinien umożliwiać nauczanie robota podczas zapisu programu zarówno ręcznie, jak i automatycznie.

Należy podkreślić również dodatkowe zalety napędu elektrycznego, takie jak: niski poziom hałasu, brak smarowania (oleju), natychmiastowe rozpoczęcie pracy, niezależność charakterystyk podstawowych od temperatury.

Współczesny poziom rozwoju mikroelektroniki umożliwia mikrominiaturyzację układów sterowania napędem elektrycznym. Weszły do praktyki moduły zawierające silnik elektryczny, przekładnię falową i czujniki sprzężenia zwrotnego. Już obecnie są budowane silniki elektryczne o wysokich wskaźnikach dynamicznych zapewniające zakres sterowania prędkością  $10^5:1$ , pasmo częstotliwości do 100 Hz i przyspieszenie do 10g.

### 7.4.3 Silniki elektryczne prądu stałego

Komutatorowe silniki elektryczne prądu stałego (typu DC serwo) znalazły największe zastosowanie jako napęd elektryczny robotów. Wynika to przede wszystkim z możliwości prostej regulacji prędkości obrotowej i momentu obrotowego (momentu siły). Ponieważ były one stosowane od dawna w napędzie elektrycznym, np. obrabiarek, dlatego ich układy sterowania i regulacji są dobrze znane, a zatem dysponuje się sprawdzonymi w praktyce typowymi rozwiązaniami.

Ponieważ napędy elektryczne robota zazwyczaj pracują w ciężkich warunkach dynamicznych, więc dla zwiększenia szybkości działania jest pożądane osiągnięcie w procesach przejściowych maksymalnych przyspieszeń, wyrażonych wzorem

$$\varepsilon_{\max} = \frac{M_{dop}}{I_s + I_{red}}$$

gdzie:

$M_{dop}$  – dopuszczalna wartość maksymalna momentu obrotowego silnika,

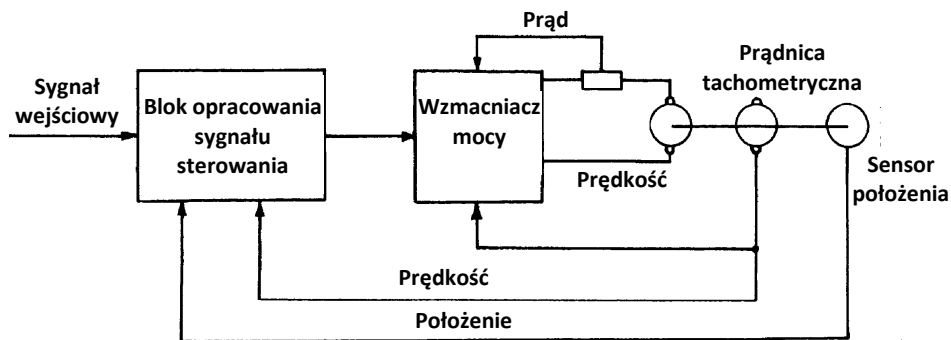
$I_s$  – wartość momentu bezwładności wirnika silnika elektrycznego,

$I_{red}$  – zredukowana wartość momentu bezwładności mechanizmu wykonawczego.

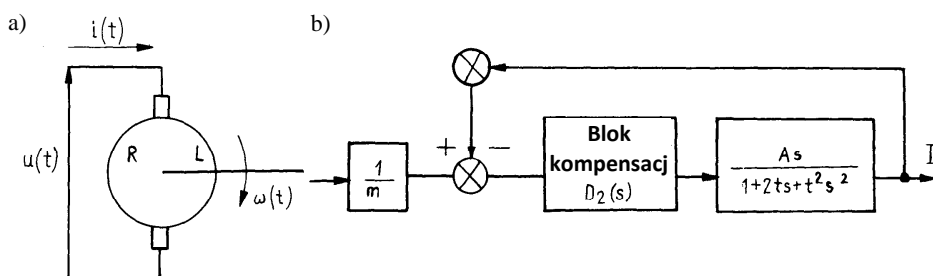
Zwiększenie wartości przyspieszenia przy określonych gabarytach silnika elektrycznego można uzyskać przez zwiększenie momentu obrotowego lub zmniejszenie momentu bezwładności.

Na rysunku 7.18 przedstawiono schemat układu sterowania położeniem. Układ ten ma dwa sprzężenia zwrotne: położeniowe oraz prędkościowe, co umożliwia sterowanie ruchem silnika elektrycznego o zadanym kierunku wirowania.





Rys. 7.18. Zasada działania układu sterowania położeniem.



Rys. 7.19. Schemat silnika: a) chwilowe położenie silnika, b) obwód prądowy dla zerowej lub małej wartości momentu. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Równanie ruchu dla układu elektrycznego (rys. 7.19a) przy stałej wartości prądu wzbudnika ma postać

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + K\omega(t)$$

gdzie:  $R$  – rezystancja uzwojenia twornika,

$L$  – indukcyjność własna uzwojenia twornika.

Równanie ruchu dla układu mechanicznego (rys. 7.19a) przy stałej wartości prądu twornika ma postać

$$M_m = J \frac{d\omega}{dt} + f\omega + M_f + M_r$$

gdzie:  $J$  – moment bezwładności części wirujących,

$f$  – współczynnik tarcia lepkiego,

$M_f$  – moment tarcia suchego,

$M_r$  – moment obciążenia,

$\omega$  – prędkość kątowna.

Moment obrotowy elektromagnetyczny  $M_m$  jest proporcjonalny do prądu twornika  $i(t)$ , a mianowicie:

$$M_m = K i(t)$$

gdzie  $K$  – stała.

Po dokonaniu transformacji Laplace'a obu stron równań przy zerowych warunkach początkowych równania te przybierają postać:

$$U(s) = (R + Ls) I(s) + k\omega(s)$$

$$K I(s) = (J_s + f) \Omega(s) + C_f(s) + C_r(s)$$

Funkcja przejścia łącząca prędkość i napięcie przyjmuje postać

$$G(s) = \frac{K}{I_s^2 + (RJ + Lf)s + Rf + k^2}$$

lub

$$G(s) = A_0 \frac{1}{1 + 2\xi r s + r^2 s^2}$$

gdzie  $\xi \gg 1$ .

Jeżeli  $f$  jest małe, to można wprowadzić dwie stałe czasowe

$$\tau_e = \frac{L}{R}, \quad \tau_m = \frac{RI}{k^2}$$

gdzie:

$\tau_e$  – stała elektryczna,

$\tau_m$  – stała elektromechaniczna w równaniu

$$1 + 2\xi r s + r^2 s^2 = (1 + \tau_e s)(1 + \tau_m s)$$

Układ elektryczny dla  $f = 0$  można przedstawić w postaci jak na rys. 7.19b. Jeżeli  $D_2(s)$  jest dobrane w taki sposób, aby zapewnić proporcjonalną i całkującą akcję, to funkcja przejścia dotyczy układu otwartego dla silnika i obwodu prądowego. Silnik wówczas ma tylko stałą  $\tau_m$ , gdyż stała  $\tau_e$  jest mała. Stosowane silniki elektryczne mają bardzo małą stałą  $\tau_m$ , co umożliwia redukcję momentów bezwładności lub zwiększenie współczynnika tarcia wewnętrznego

#### 7.4.4 Silniki elektryczne stosowane w robotach

Silniki elektryczne stosowane w robotach mają długie wirniki o małej średnicy. Ma to na celu zmniejszenie stałej czasowej  $\tau_m$ , która jest mniejsza niż 10 lub 20 ms. Silniki te są trwałe. Charakteryzują się dobrymi właściwościami mechanicznymi oraz małą indukcyjnością własną uzwojenia twornika (ok. 100  $\mu\text{H}$ ).

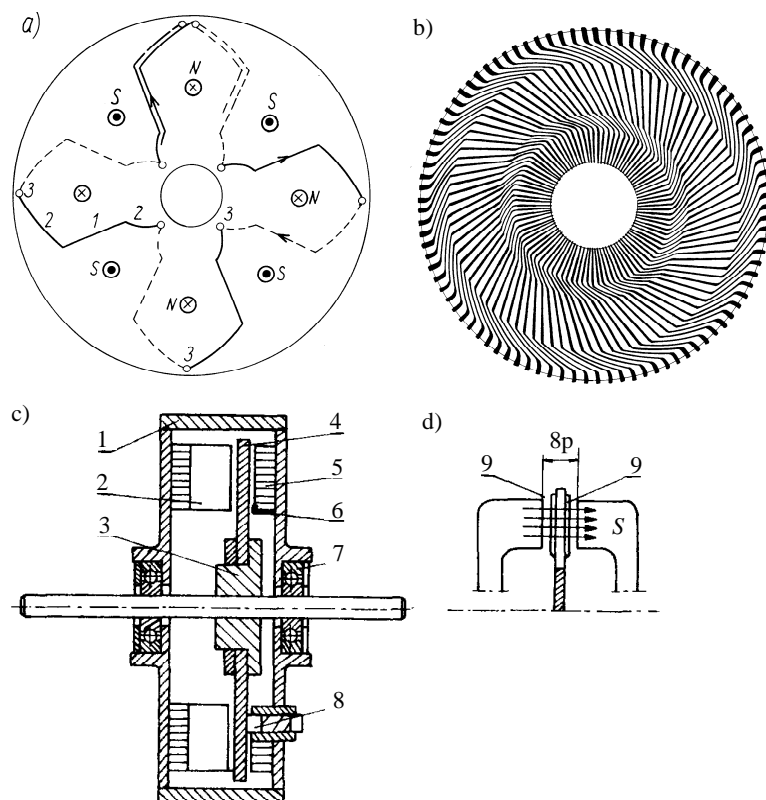
W tabeli 7.1 podano kilka przykładowych danych z katalogów silników AXEM. Silnik elektryczny 2 ma dobre przewietrzanie z zewnątrz (wydatek powietrza  $80 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ ), co wyjaśnia jego dużą wartość znamionową mocy. Klasyczny silnik elektryczny może wytrzymać konkurencję z tarczowym pod względem stosunku momentu obrotowego do masy. Natomiast tarczowy silnik elektryczny jest szybki w działaniu, ale ma mniejszy moment obrotowy rozruchowy. Został zaprojektowany dla

zmniejszenia stałej czasowej oraz bezwładności wirnika, co jest istotne przy projektowaniu układów sterowania.

Tab. 7.1

Przykładowe dane z katalogów silników AXEM. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Parametry	Silnik elektryczny		
	1	2	3
Wartość znamionowa momentu obrotowego, N·m	3,2	28,5	1,2
Wartość znamionowa prądu twornika, A	7,2	37,5	6,0
Wartość znamionowa mocy użytecznej, kW	1,0	9,0	0,37
Wartość znamionowa napięcia twornika, V	164	272	83
Nominalna prędkość, obr/min	3000	3000	3000
Wartość znamionowa momentu bezwładności wirnika, $10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	1	7,3	0,79
Stała czasowa, ms	6,5	5,5	30
Teoretyczna wartość maksymalnego przyspieszenia kątownego, $\text{rad/s}^2$	24400	22500	14500
Masa, kg	9,7	58	6,5



Rys. 7.20. Silnik tarczowy, wirnik tarczowy o uzwojeniu drukowanym: a) zasada druku: linie ciągłe – uzwojenie po jednej, przerywane – po drugiej stronie tarczy izolacyjnej: 1 – część czynna pręta, 2 – połączenia czołowe, 3 – miejsca połączeń elementów uzwojeń naniesionych po obydwu stronach tarczy; N, S – biegunowość strumienia wzbudzenia; b) widok ogólny wirnika; c) schemat silnika: 1 – obudowa, 2 – biegun, 3 – piasta, 4 – tarcza, 5 – cewka, 6 – osłona, 7 – łożyska, 8 – tulejka, d) szkic obwodu magnetycznego: 9 – tarcza.

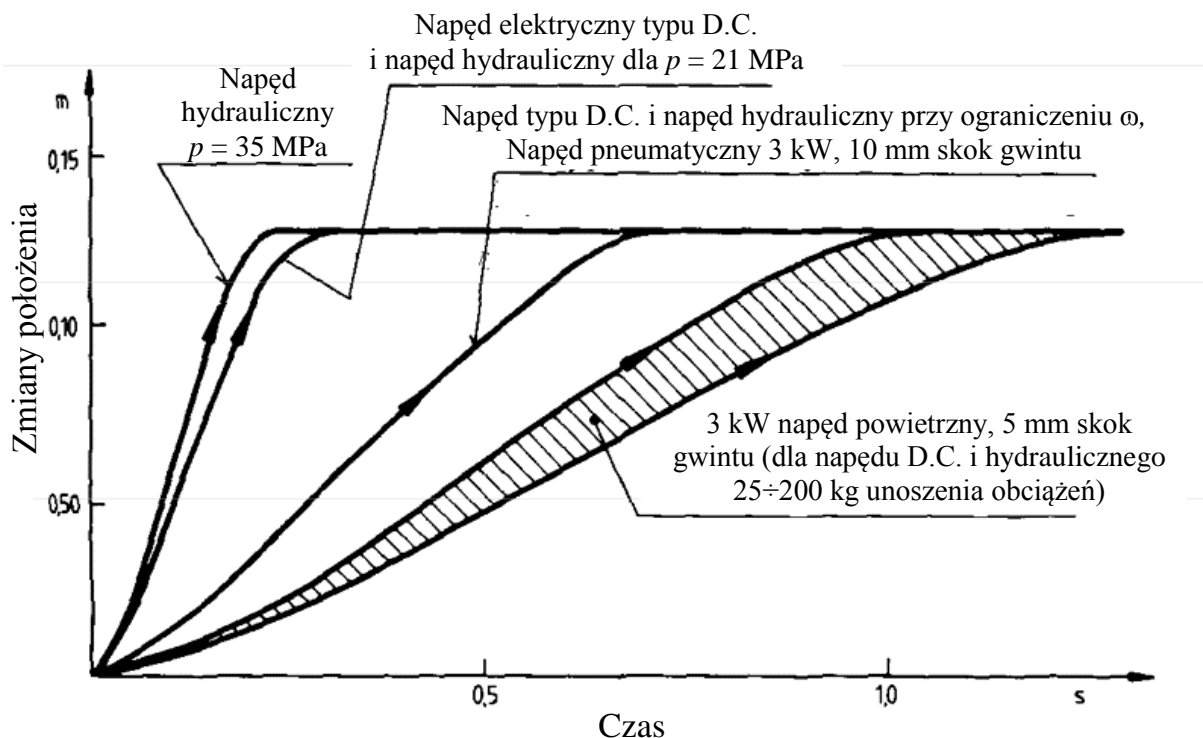
## 7.4.5 Krokowe silniki elektryczne

Zasada pracy wszystkich silników krokowych opiera się na dyskretnych zmianach pola elektromagnetycznego. Za zmianami położenia osi pola wzbudzającego podąża wirnik, który cyklicznie zajmuje określone położenia w przestrzeni. Liczba tych położen jest zawsze większa niż dwa na jeden obrót.

Krokowe silniki elektryczne wywołują zamianę dyskretnego sygnału elektrycznego na przyrost momentu i zmianę położenia kąтового. Są one typu synchronicznego, co umożliwia korelację między położeniami wejściowym a końcowym. Ich wadami są nieciągłe wartości przyspieszeń, ograniczone osiągi i zmienne momenty zależne od położenia.

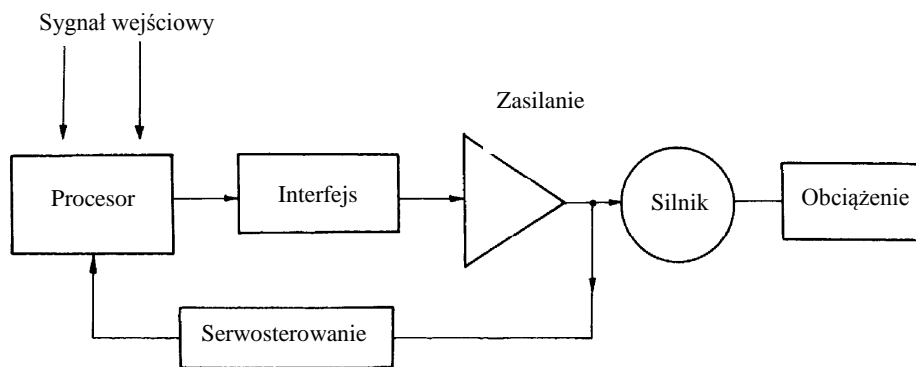
Rozróżnia się trzy rodzaje krokowych silników elektrycznych:

- magnetoelektryczne (ze stałymi magnesami),
- reluktancyjne (ze zmienną reluktancją),
- hybrydowe (łączą własności pozostałych odmian).



Rys. 7.21. Porównanie własności napędów pneumatycznych, hydraulicznych i elektrycznych. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Na rysunku 7.22 pokazano schemat układu sterowania położeniem kątowym wału krokowego silnika elektrycznego. Straty w krokowym silniku elektrycznym są zbliżone do strat w komutatorowych silnikach elektrycznych prądu stałego. Parametry czterofazowego krokowego silnika elektrycznego z krokiem  $\pi/12$  (24 kroki na obrót)



Rys. 7.22. Schemat układu sterowania silnikiem typu krokowym.

przy określonym zasilaniu, na przykład za pomocą komutatora elektronicznego zrealizowanego na półprzewodnikowych bipolarnych sterowanych zaworach elektrycznych typu MOSFET, podano w tabl. 7.2. Najczęściej spotykanymi silnikami krokowymi są silniki czterofazowe.

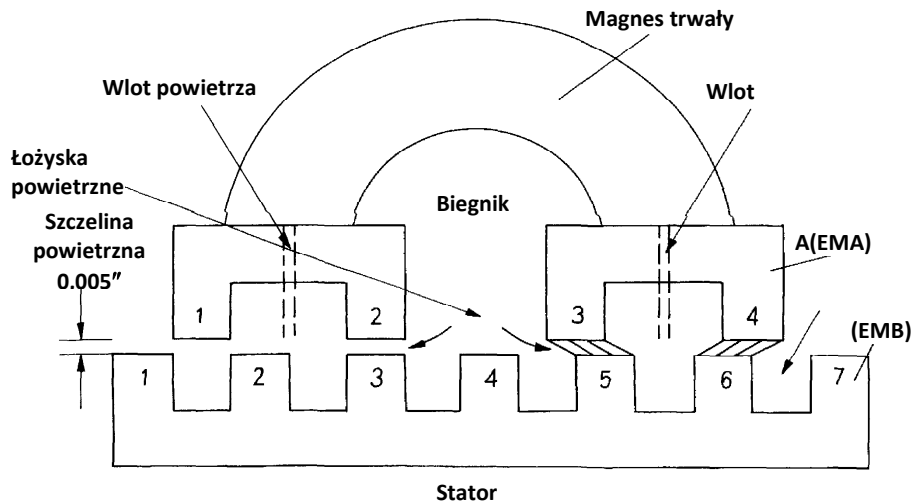
Tab. 7.2

*Parametry krokowego silnika elektrycznego. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)*

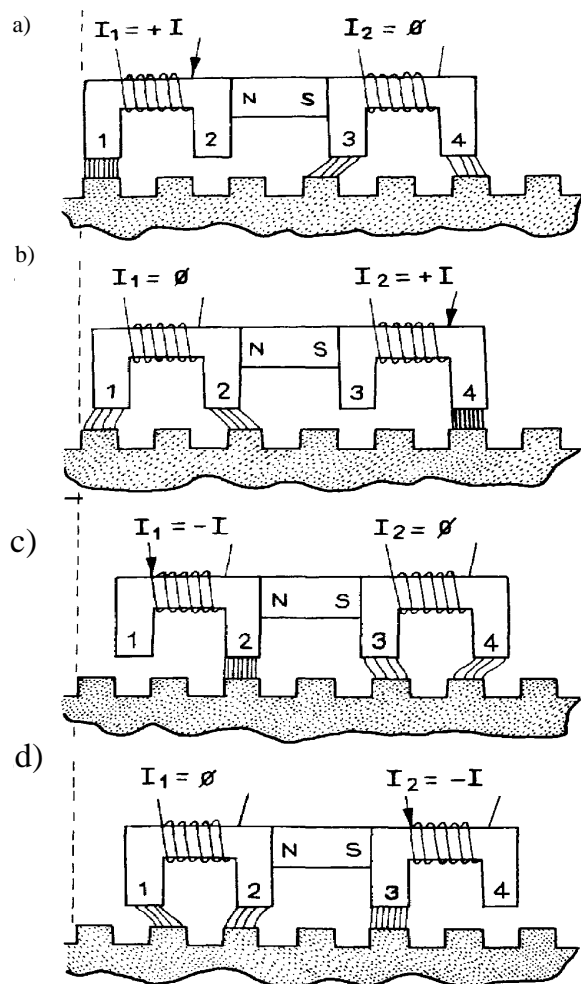
Maksymalny moment obrotowy statyczny	0,23 Nm
Maksymalna częstotliwość	400 Hz
Maksymalny moment obrotowy dynamiczny	0,14 Nm
Masa	600 g
Prąd	2.8 A
Napięcie	28 V
Mechaniczna stała czasowa $\tau$	0,67 ms
Moc w impulsie	116 W
Rzeczywista częstotliwość	474 Hz

#### 7.4.6 Liniowe silniki elektryczne

Liniowy silnik elektryczny, pokazany na rys. 7.23, składa się z okładek z wypełnieniem epoksydowym, w którym porusza się magnes stały stanowiący biegnik (element wykonawczy). Biegnik porusza się na łożysku pneumatycznym. Na rysunku 7.25a-d pokazano fazy ruchu liniowego silnika elektrycznego. Każda nowa faza pobudzenia wywołuje przemieszczenie o 1/4 podziałki ruchu biegnika w stosunku do okienek. W ten sposób realizuje się ruch o 3/4 podziałki. Zwrot kierunku przepływu prądu zaznaczono strzałkami.



Rys. 7.23. Główne zespoły dwufazowego liniowego silnika elektrycznego. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



Rys. 7.24. Fazy ruchu dwufazowego liniowego silnika elektrycznego.

Jeżeli elektromagnes A(EMA) jest pobudzony, maksymalna gęstość przepływu powstaje w biegunie 2 i ustawienie jest pokazane na rys. 7.24a. Jeżeli A jest niepobudzony, a EMB jest pobudzony, maksymalna gęstość przepływu powstaje

w biegunie 3, a minimum gęstości w 4. Siły przyciągania w biegunie 3 wywołują przesunięcie w prawo.

Czasami liniowy silnik elektryczny umożliwia realizację bezpośredniego napędu elektrycznego. Na ogół pozycja wirnika względem okładek jest dyskretna. Liniowy silnik elektryczny ma pełny krok rozdzielności zdefiniowanej przez powierzchnię zęba na biegunach. Typowa podziałka wynosi 1,016 mm. Dla sekwencji pokazanej na rys. 7.24 rozdzielność wynosi 1/4 podziałki, tzn. 2,6 mm. Te pozycje nazywa się czasami „podstawowym krokiem”.

#### **7.4.7 Silnik elektryczny stanowiący bezpośredni napęd elektryczny**

W latach osiemdziesiątych został zaprojektowany nowy rodzaj silnika elektrycznego, który umożliwia realizację bezpośredniego napędu elektrycznego robota (bez przekładni zębatej). Ten nowy przetwornik elektromechaniczny, wyprodukowany przez Motornetics Corporation, został nazwany „Megatorque motor system”. Wytwarza on duży moment obrotowy, tzn. 500÷15000 N·m przy małych wartościach prędkości obrotowych (0,5 obr/s) bez potrzeby stosowania reduktora prędkości obrotowej. Ponadto częścią integralną silnika elektrycznego jest czujnik położenia, który umożliwia rozdzielczość impulsów porównywalną z optoelektronicznymi impulsatorami położenia stosowanymi obecnie w manipulatorach.

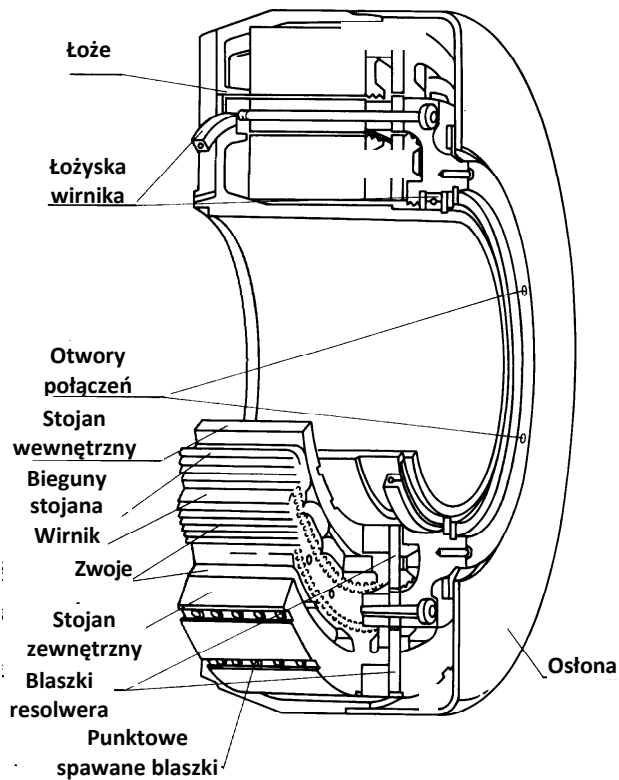
Silnik elektryczny typu Megatorque jest trójfazową maszyną elektryczną prądu przemiennego wyposażoną w komutator elektroniczny, podobnie jak komutatorowy silnik prądu stałego z komutatorem mechanicznym. Jest on maszyną elektryczną o zmiennej reluktancji i nie ma magnesów stałych (rys. 7.25).

Sercem silnika jest zespół blaszek, które łączą wirnik i stojan. Na rysunku 7.26 pokazano przykład takiej blaszki. Z rysunku wynika, że cienki obręczkowy wirnik jest zamontowany między dwoma koncentrycznymi stojanami. Oba stojany oddziałują na wirnik i wytwarzają wzmocniony moment obrotowy. Duża liczba zębów magnetycznych wirnika i dwa stojany powodują wytwarzanie momentu obrotowego o dużej wartości.

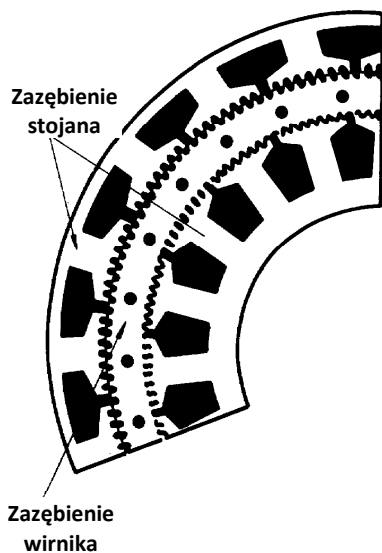
Trójfazowe pole magnetyczne jest wytwarzane przez 36 zewojów dwóch uzwojeń stojanów (18 zewojów na każdy z dwóch stojanów). Każdy ze stojanów ma 150 zębów, wirnik zaś działa jak biegun silnika elektrycznego. Moment obrotowy jest wytwarzany przez sekwencyjne wzbudzenie ze zwojów tych 12 biegunów. Dla jednego obrotu wirnika występuje 150 zmiennych cykli, które dają przełożenie 150:1, co koresponduje ze wzmocnieniem momentu obrotowego elektromechanicznego.

Należy zauważyć, że zastosowane w tym rozwiązaniu konstrukcyjnym umieszczenie wirnika między dwoma stojanami umożliwia uzyskanie takich samych parametrów znamionowych, jakie miałyby konwencjonalny silnik elektryczny z 300 biegunami lub 900 ze zwojami uzwojenia stojana. Inną zaletą umieszczenia wirnika między dwoma stojanami jest skrócenie drogi przepływu strumienia magnetycznego.

Tego rodzaju reluktancyjne silniki elektryczne ma np. robot typu „SCARA”.



Rys. 7.25. Przekrój silnika typu Megatorque – napęd bezpośredni (B. Powell i Motornetics Corp. finans. SK, Santa Rosa, CA). Model 1140.



Rys. 7.26. Ćwiartka sekcji blaszki silnika typu Megatorque z dwoma stojanami ulokowanymi wokół wirnika. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



## 7.5 Mechanizmy przekazywania ruchu stosowane w robotach

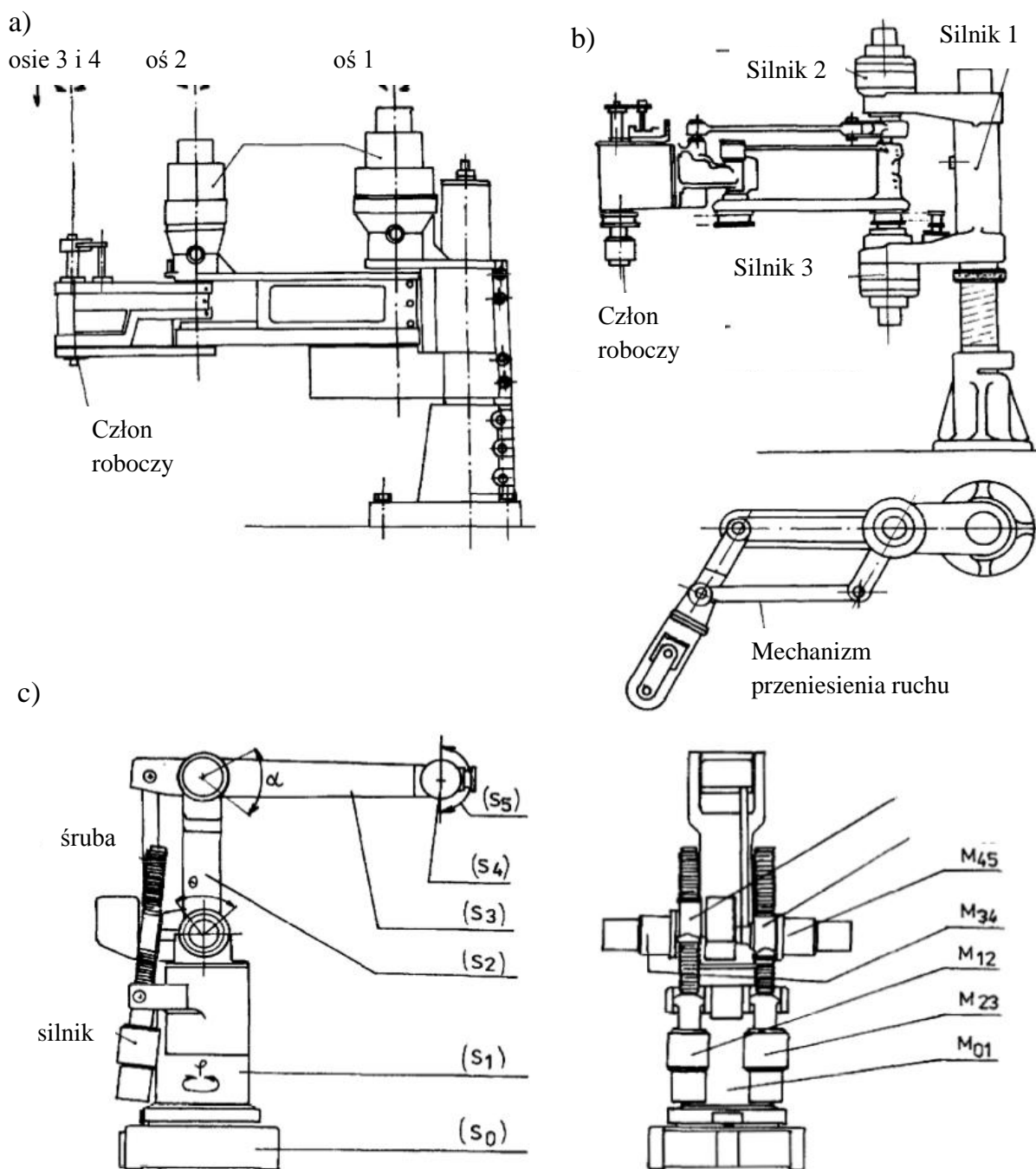
### 7.5.1 Rozmieszczenie siłowników w robotach

**Mechanizmy przekazywania** ruchu służą do przenoszenia ruchu od silnika (silników) do członów łańcucha kinematycznego manipulatora lub robota.

Należy zauważyć, że przy przekazywaniu ruchu, ze względu na tarcie, podatność i obciążenia zmienne występują zjawiska dynamiczne (drgania), które wpływają niekorzystnie na pozycjonowanie chwytaka. Stąd rozmieszczenie siłowników oraz różnych przekładni powinno być takie, aby zmniejszyć niekorzystny wpływ zjawisk dynamicznych.

Na rysunku 7.27a pokazano otwarty łańcuch kinematyczny robota montażowego typu Skilam o czterech osiach sterowanych. Silniki 1 i 2 są ulokowane blisko osi 1 i 2, którymi sterują, oś 3 jest sterowana silnikiem krokowym, a oś 4 siłownikiem pneumatycznym. Na rysunku 7.27b pokazano zamknięty łańcuch kinematyczny robota montażowego typu PUMA-2 z chwytakiem o czterech stopniach swobody. Mechanizm trójstopniowego reduktora jest ulokowany na podstawie robota, aby zmniejszyć wpływ niekorzystnych zjawisk. Na rysunku 7.27c pokazano robota o pięciu stopniach swobody o podstawie  $S$  i członach  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  i  $S_5$ ; stojan reduktora  $M_{45}$  napędzającego przegub  $S_4/S_5$  jest ulokowany blisko  $S_1$ . Takie rozmieszczenie zostało zastosowane również do  $M_{34}$ ,  $M_{23}$  i  $M_{12}$ , aby zminimalizować wpływ momentu bezwładności ruchu  $S_1$  względem  $S_0$  (robot MOTOMAN 104).

Poniżej omówiono pokrótce różne mechanizmy przekazywania ruchu stosowane w robotach. Na rys. 7.27 przedstawiono mechanizmy przenoszenia ruchu robotów montażowych: a) Skilam, b) PUMA-2, c) MOTOMAN lub ASEA. Na rys. 7.30 pokazano schemat konstrukcyjny robota Sirobot 1 (firmy Siemens). Na rys. 7.32 pokazano mechanizmy napędów śrubowych robota Irb-60.



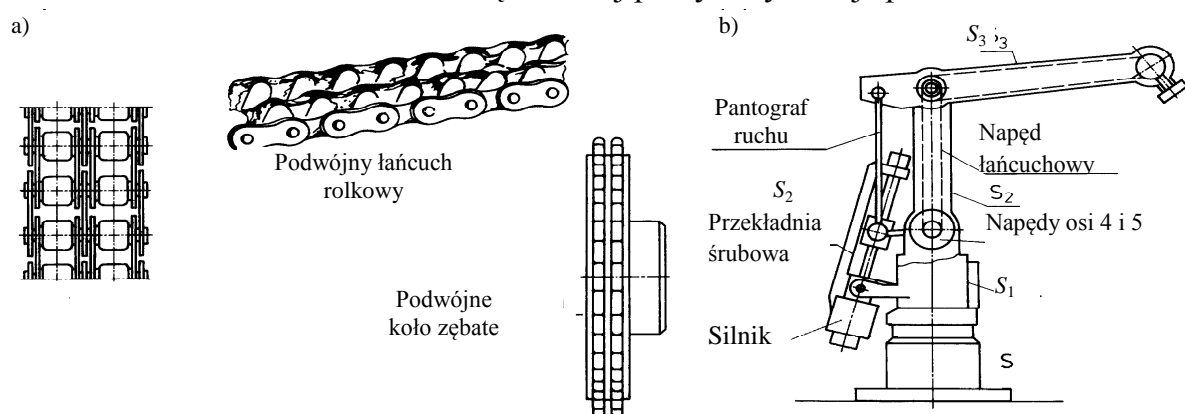
Rys. 7.27. Przykłady mechanizmów przeniesienia ruchu: a) robot montażowy typu Skilam, b) robot montażowy typu PUMA-2, c) robot typu MOTOMAN lub ASEA.

## 7.5.2 Przegląd mechanizmów przekazywania ruchu

### 7.5.2.1 Przekładnie pasowe, linowe i łańcuchowe

Ten rodzaj przekładni służy do przekazywania ruchu obrotowego między równoległymi wałami, jak również do zamiany ruchu obrotowego na ruch postępowy i odwrotnie.

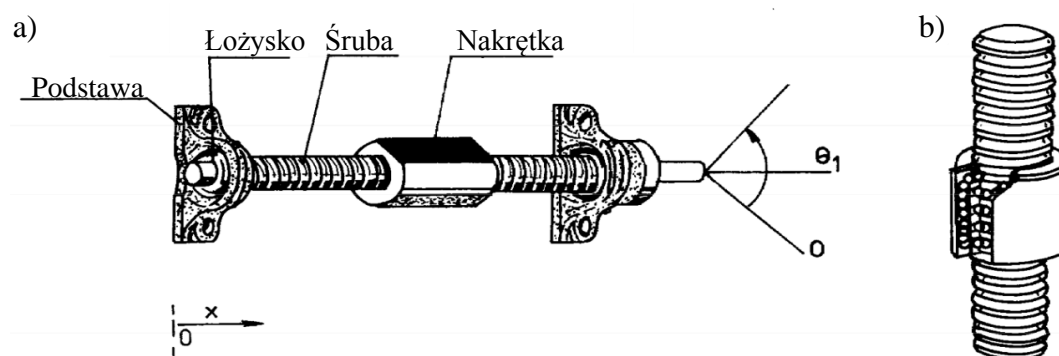
Na rysunku 7.28 pokazano przykład przekładni łańcuchowej. Przekładnia znalazła szerokie zastosowanie dzięki cichej pracy i wysokiej sprawności.



Rys. 7.28. Przekładnia łańcuchowa i jej zastosowania: a) odmiana rolkowa, b) napęd robota Motoman. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

### 7.5.2.2 Przekładnie śrubowe i zębatkowe

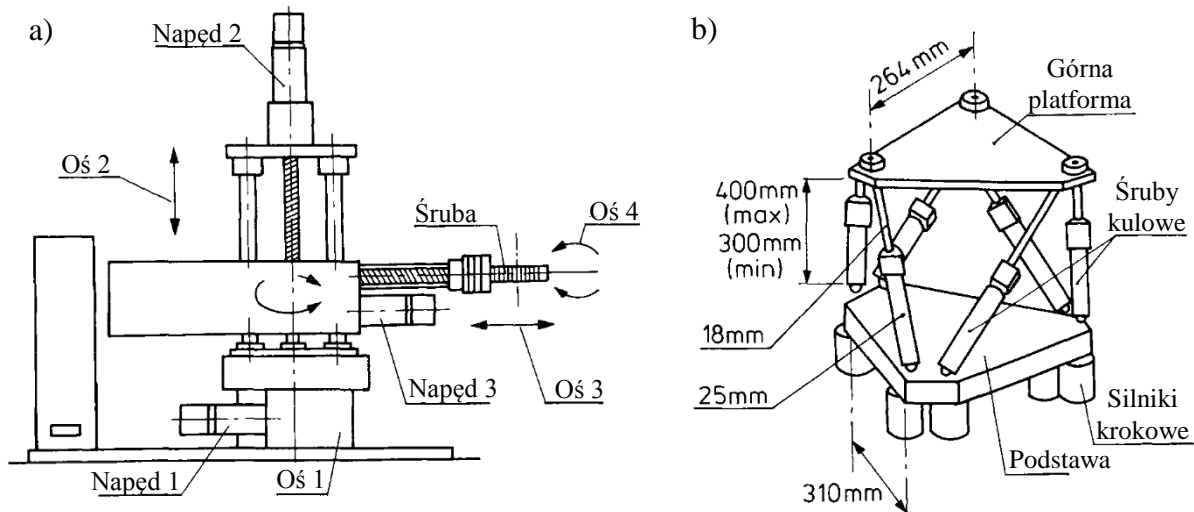
Innymi, często stosowanymi mechanizmami przenoszenia ruchu w robotach, są **przekładnie śrubowe i zębatkowe**. Na rysunku 7.29a i b pokazano przykład napędu śrubowego złożonego ze śruby z nakrętką, a na rysunku 7.29b odmianę typu śrubowo-kulkowego.



Rys. 7.29. Napęd śrubowo-toczący: a) widok ogólny, b) śruba z nakrętką (TRANSROLL).

Mechanizmy śrubowe i zębatkowe są równoważne ze względu na sposób zamiany ruchu obrotowego na przesuwny i odwrotnie. W obu tych mechanizmach poza przekazywaniem ruchu dokonuje się również zmniejszenie prędkości (obrotowej śruby na przesuwnej nakrętce). Należy jednak podkreślić, że przekładnia śrubowa z długą śrubą jest bardzo wrażliwa na drgania poprzeczne. Przez odpowiednie ulokowanie tej przekładni na robocie można uzyskać zwiększenie przełożenia oraz sztywności połączenia. Na rysunku 7.30a pokazano przykład zastosowania takiej przekładni do napędu osi 4 robota. Mechanizm śrubowy ulokowano na dwóch łożyskach wahliwych rozmieszczonych po obu jego stronach. Takie rozwiązanie wpływa korzystnie na sztywność, stateczność, podłużne zginanie i drgania.

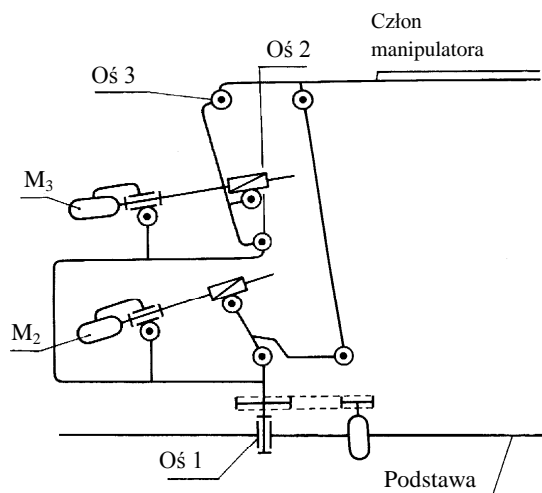
W rozwiązaniu pokazanym na rys. 7.30a pary śrubowe służą do przenoszenia ruchu osi 2 i 4. Napęd osi 2 (silnik, śruba i nakrętka) niewiele zmienia moment bezwładności przy ruchu osi 1. Na rysunku 7.30b pokazano przykład manipulatora równoległego z napędami śrubowymi. Dołączenie rolek lub igieł między śrubą a nakrętką polepsza własności tej przekładni. Przemieszczenie liniowe  $x$  na wyjściu jest wprost proporcjonalne do liczby obrotów śruby na wejściu, a współczynnik proporcjonalności zależy od skoku śruby.



Rys. 7.30. a) Schemat konstrukcyjny robota Sirobot 1 (firmy Siemens), b) manipulator równoległy – platforma Stewarta. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

### 7.5.2.3 Mechanizmy dźwigniowe w napędach robotów

Na rysunku 7.31 pokazano schemat kinematyczny układu zastosowanego w robocie firmy KUKA, w którym osie połączeń obrotowych są prostopadłe do płaszczyzny ruchu. Sterowanie ruchem jednego z członów jest możliwe tylko w tej płaszczyźnie i wywołuje identyczny ruch przeciwległego członu równoległoboku. Orientacja drugiego członu pozostaje niezmienna w stosunku do pierwszego członu równoległoboku. Taka konfiguracja wykazuje dużą sztywność.



Rys. 7.31. Układ dźwigniowy przenoszenia ruchu między osiami 2 i 3 za pomocą  $M_2$  i  $M_3$  (silniki z reduktorami)

Na rys. 7.32a przedstawiono układy napędowe członów 2 i 3 (robota IRb-60), które są połączone w układzie czworoboku przegubowego. Człon 2 jest łożyskowany na wsporniku członu 1 w punkcie  $O_1$  i napędzany przez silnik  $S_2$  poprzez śrubową przekładnię toczną  $D_2$ , która jest połączona przegubem  $O_{n2}$  z ramieniem  $O_1 O_{n2}$ . Człon 3 jest połączony przegubem  $O_2$  z członem 2, który jest napędzany przez silnik  $S_3$  poprzez przekładnię śrubowo-toczną  $D_3$ , przegub  $O_{n3}$  i ramię  $O_1 O_{n3}$ . Ruchy członów 2 i 3 są od siebie zależne.

Przełożenia w układach napędowych członów 2 i 3 określono w zależności od kątów konfiguracyjnych  $\theta_2$  i  $\theta_3$  na podstawie wzorów

$$u_2 = \frac{\omega_{o2}}{\dot{\theta}_2} = \frac{2\pi l_6 \sin \delta}{h_2}, \quad u_3 = \frac{\omega_{o3}}{\dot{\theta}_3} = \frac{2\pi l_6 \sin \varepsilon}{h_3}$$

$$\delta = \pi + \theta_2 - \arctg \frac{l_8 + l_6 s \theta_2}{l_7 + l_6 c \theta_2}, \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2} + \theta_6 - \arctg \frac{l_8 - l_6 c \theta_6}{l_7 + l_6 s \theta_6}$$

Przy czym przyjęto następujące oznaczenia:

$\delta$  – kąt zawarty pomiędzy osią śruby napędowej członu 2 i ramieniem  $O_1 O_{n2}$ ;

$\varepsilon$  – kąt zawarty pomiędzy osią śruby napędowej członu 3 i ramieniem  $O_1 O_{n3}$ ;

$h_i$  – skok śruby napędowej  $i = 2, 3$ .

Przemieszczenie (ugięcie) sprężyny układu odciążającego członu 2 (rys. 7.30c) określono w zależności od kąta  $\theta_2$  na podstawie wzoru

$$f = l_0 - l_s$$

$$l_s = \sqrt{l_0^2 + l_{10}^2 + l_{11}^2 + 2l_9(l_{11} \sin \theta_2 + l_{10} \cos \theta_2)}$$

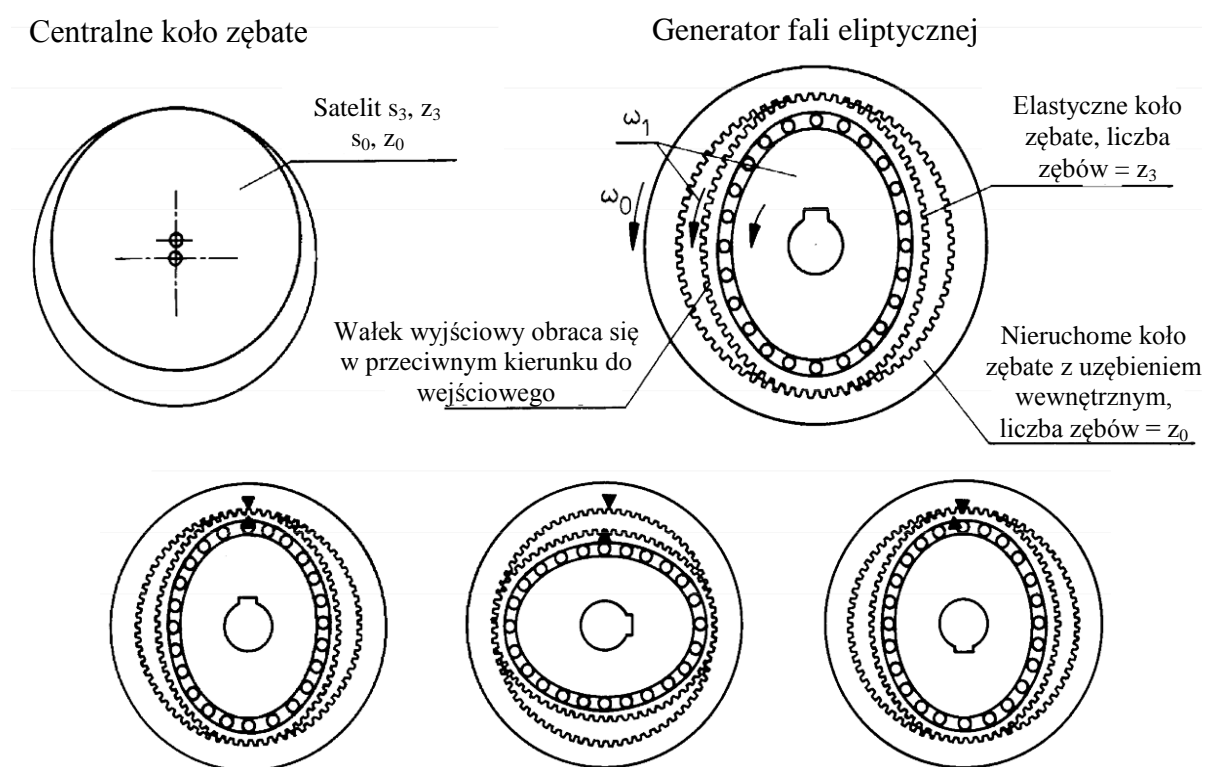


Przekładnię harmoniczną (falową), która znalazła szerokie zastosowanie w robotach z napędem elektrycznym pokazano na rys. 7.34. Dla tego typu przekładni obiegowej otrzymuje się zależność:

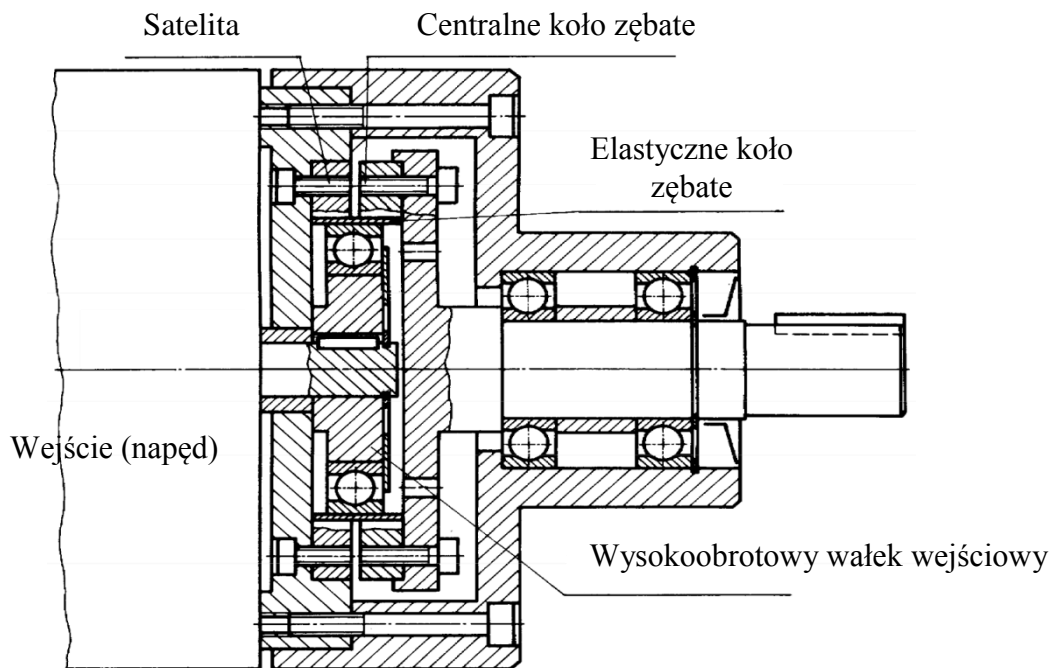
$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{30}} = \frac{z_3}{z_3 - z_0}$$

Jeżeli wartości  $z_3$  i  $z_0$  są zbliżone, to otrzymuje się duże przełożenia. Tradycyjne zazębienie wewnętrzne ma ograniczenie typu  $z_0 - z_3 > 8$ , w celu uniknięcia zjawiska interferencji. Przy odpowiednim doborze parametrów, liczby zębów, modułów można uzyskać poprawną współpracę, bez interferencji, podatnej tulei ze sztywnym kołem przy stosunkowo małej różnicy liczby zębów  $z_0 - z_3 \geq 2$ , wówczas przełożenie może osiągnąć wartość 320. Na rys. 7.34c pokazano kolejne fazy pracy tej przekładni, a na rys. 7.35 przykład reduktora harmonicznego. Funkcje tej przekładni mogą być różne, a mianowicie może być ona używana jako reduktor prędkości; wówczas generator fal jest wejściem, a podatna tuleja zębata wyjściem i wirują w przeciwnych kierunkach.

Wariator może zwiększać prędkość, wówczas podatna tuleja zębata jest wejściem, a generator fal wyjściem i obracają się one również w przeciwnych kierunkach.



Rys. 7.34. Przekładnia harmoniczna (falowa).



Rys. 7.35. Przykład reduktora harmonicznego. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Są również możliwe inne przypadki, jak np. generator fal jest członem wejściowym, a ruchome koła centralne wyjściem i obracają się w tym samym kierunku. Przekładnia może również pracować jako reduktor różnicowy. W tym przypadku generator taki jest nieruchomy, tuleja podatna jest wejściem, a ruchome koła centralne wyjściem i obracają się w tym samym kierunku. Przełożenie całkowite  $i$

$$i = \frac{i'+1}{i'}$$

gdzie:  $i'$  – przełożenie wewnętrzne.

Najczęściej jest stosowany generator dwufazowy, odkształcający tuleję (wieniec) podatną na owal bliski elipsy. Na dużej osi owalu następuje zazębienie się kół, a na małej osi zęby mijają się z określonym luzem wierzchołkowym.

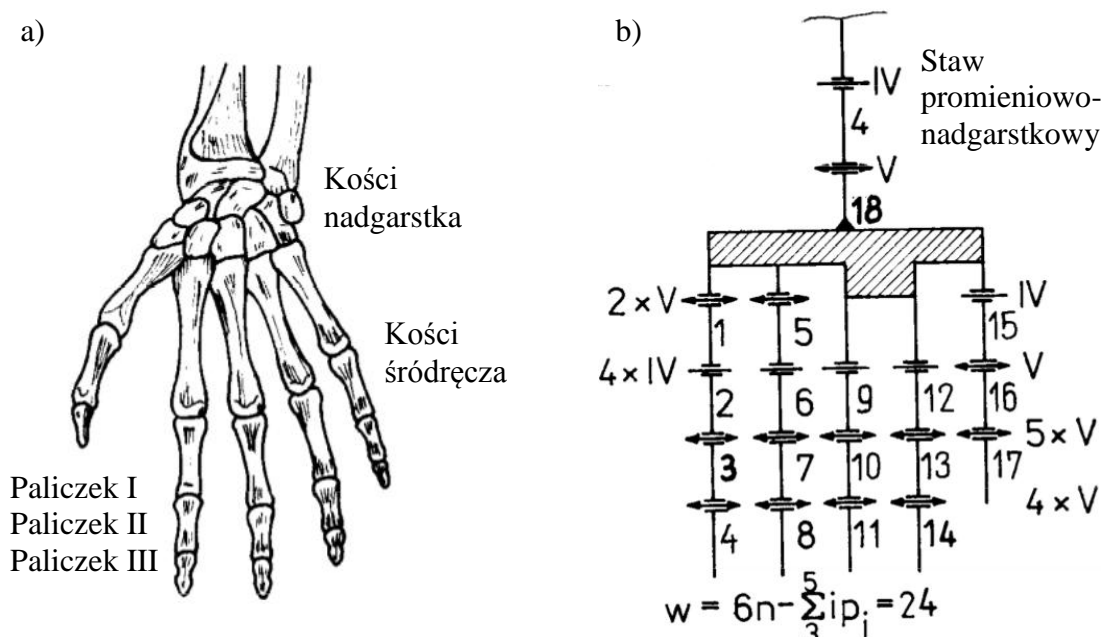


## 8. Chwytyki manipulatorów i robotów

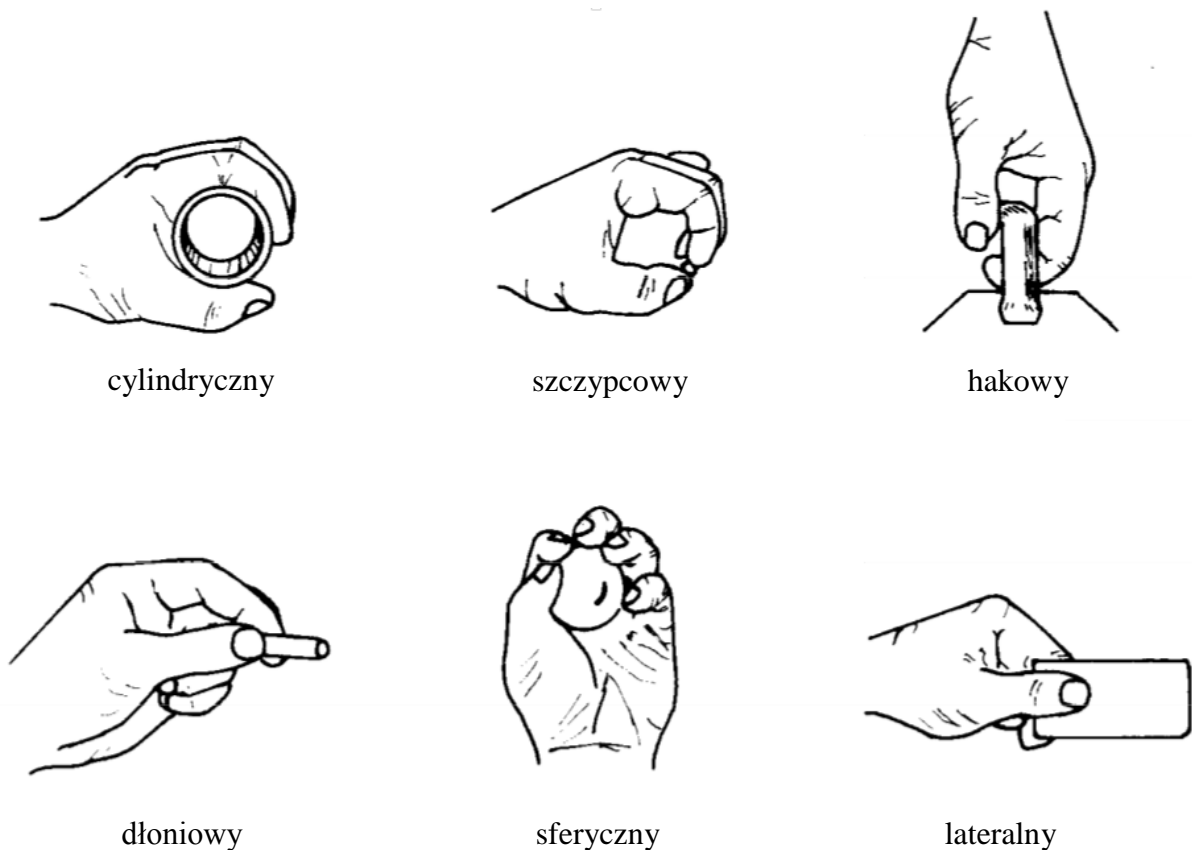
Podstawowym zadaniem chwytaka jest uchwycenie obiektu manipulacji, trzymanie go w trakcie czynności manipulacyjnych oraz uwolnienie go w miejscu docelowym. Na prawidłowe uchwycenie przedmiotu mają wpływ różne czynniki, jak: kształt przedmiotu, jego wymiary, masa, położenie środka masy, rodzaj materiału obiektu, stan powierzchni, temperatura. Wpływa to na konstrukcję chwytaka. Można spotkać wiele różnych odmian chwytaków, stąd potrzeba ich systematyzacji.

### 8.1 Funkcje chwytaka

Ruch chwytany stanowi jedną z podstawowych czynności człowieka i zwierząt. Najbardziej rozwiniętym chwytakiem w przyrodzie jest ręka człowieka. Złożona z dłoni z palcami (rys. 8.1a) składa się z 18 członów oraz 17 połączeń ruchowych, które są typu obrotowego o jednym i dwóch stopniach swobody. Z punktu widzenia teorii mechanizmów ręka jest mechanizmem, w którym:  $n = 18$ ,  $p_5 = 13$ ,  $p_4 = 5$ , gdzie:  $n$  – liczba członów ruchomych,  $p_5$  i  $p_4$  – liczby par kinematycznych odpowiednio klasy piątej i czwartej.



Rys. 8.1. Ręka człowieka i jej schemat strukturalny: a) widok dłoni z palcami, b) schemat strukturalny. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



Rys. 8.2. Rodzaje ruchów chwytnych. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

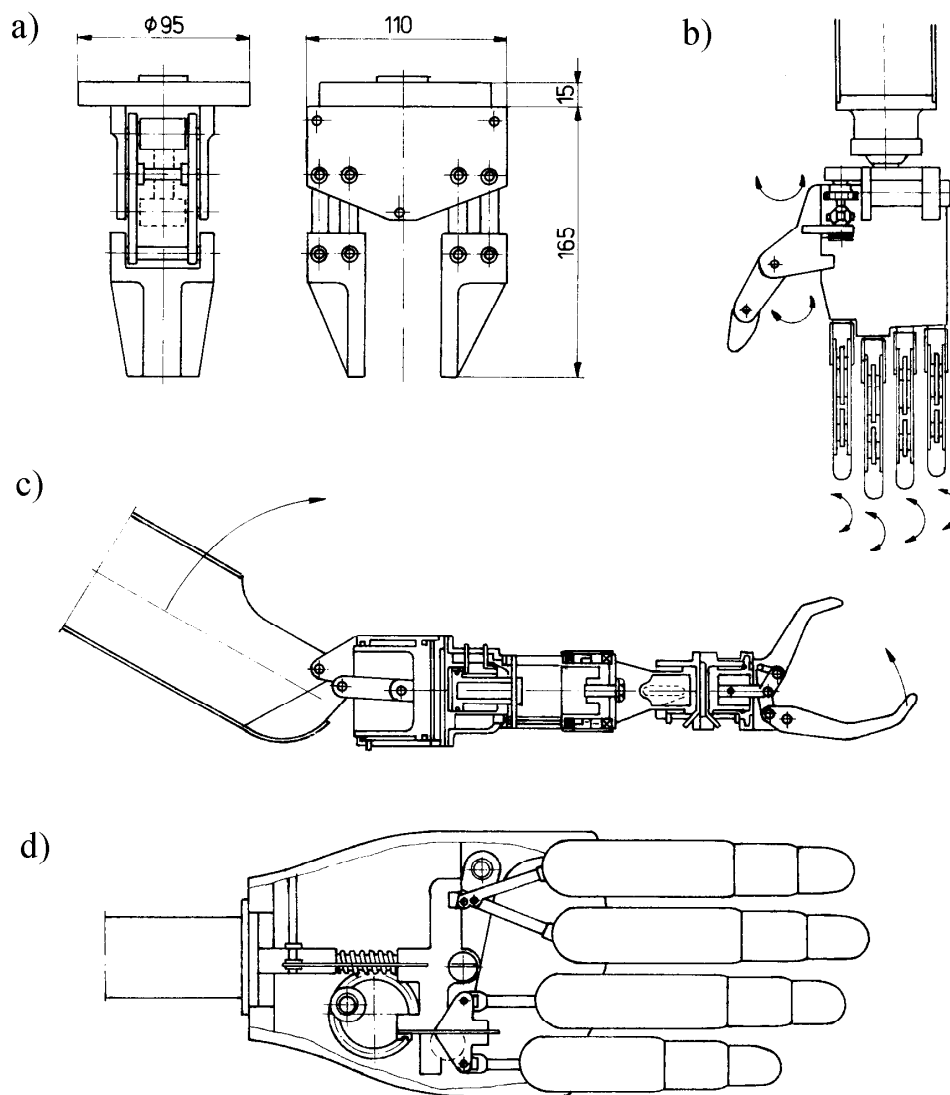
Stąd ruchliwość dłoni  $w$ , liczona względem stawu promieniowo-nadgarstkowego jako podstawy (rys. 8.1b), wynosi

$$r = 6n - 5p_5 - 4p_4 = 6 \cdot 18 - 5 \cdot 13 - 4 \cdot 5 = 23 \quad (8.1)$$

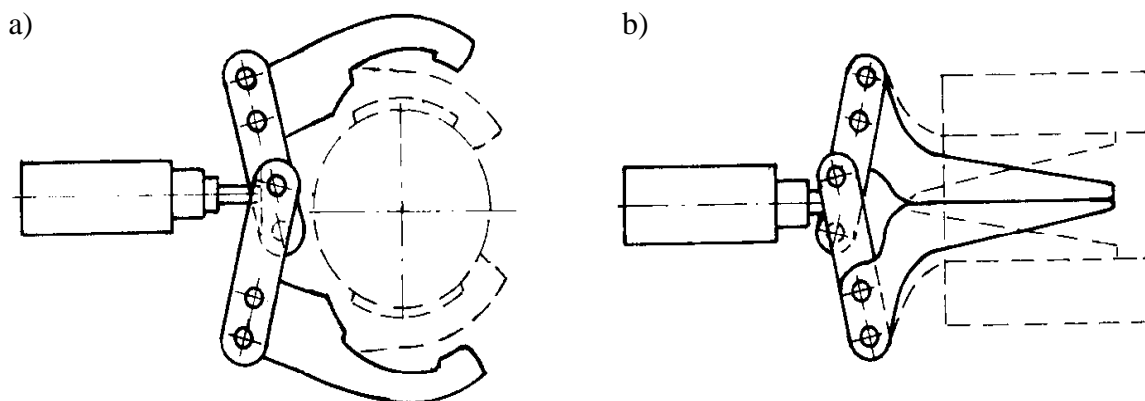
Rozróżnia się sześć podstawowych rodzajów chwytu: *cylicydryczny* (rys. 8.2a), *szczypcowy* (rys. 8.2b), *hakowy* (rys. 8.2c), *dłoniowy* (rys. 8.2d), *sferyczny* (rys. 8.2e) oraz *boczny* (rys. 8.2f).

## 8.2 Systematyzacja chwytaków

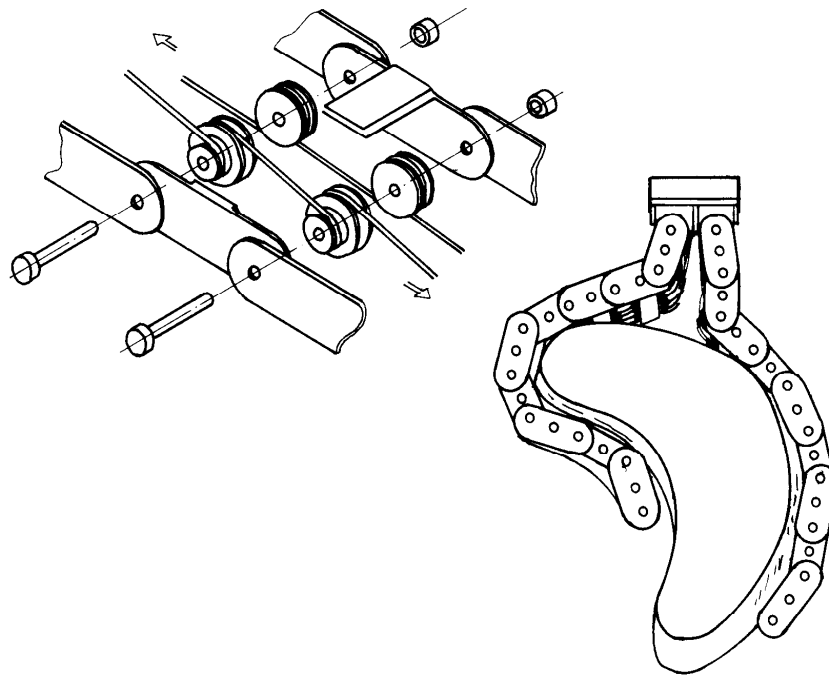
W zależności od przyjętych kryteriów spotyka się różne podziały chwytaków. Kryteriami mogą być: liczba palców i stawów oraz liczba stopni swobody. Można też podzielić chwytaki w zależności od rodzaju napędu. Przyjmując podział wg liczby palców, rozróżnia się typowe chwytaki 2-, 3- i 5-palcowe. W zastosowaniach przemysłowych najczęściej występują chwytaki 2-palcowe (rys. 8.3a). Chwytaki 3- i 5-palcowe są stosowane w manipulacjach protetycznych (rys. 8.3b, c, d). Można wyróżnić również chwytaki przeznaczone do uchwytu zewnętrznego (rys. 8.4a) lub wewnętrznego (rys. 8.4b). Na rys. 8.5 pokazano chwytak wielopalczkowy, przeznaczony do obejmowania przedmiotów o różnych kształtach, a na rys. 8.6 – chwytak z przyssawkami podciśnieniowymi.



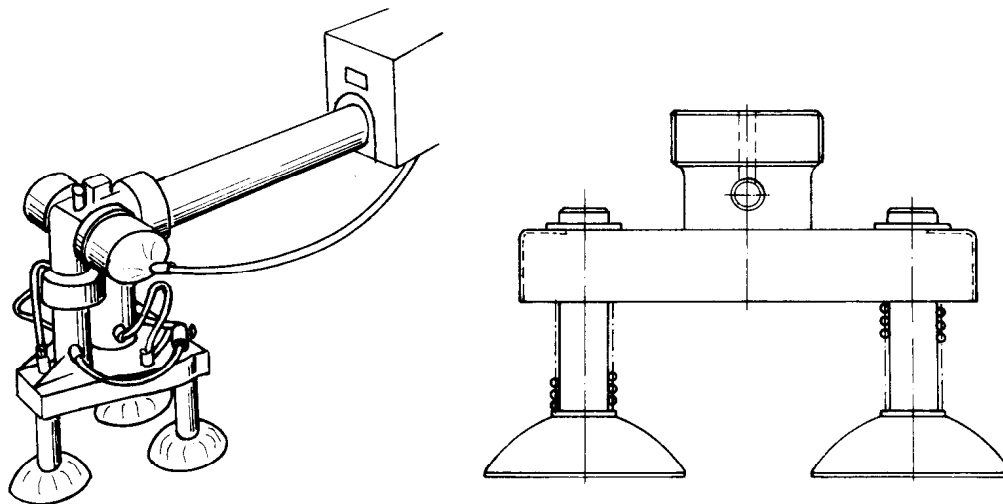
Rys. 8.3. Odmiany chwytaków: a) chwytak o ruchu postępowym szczęk, b) sztuczna dłoń z pięcioma palcami, c) ręka warszawska, d) ręka belgradzka. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



Rys. 8.4. Odmiany chwytaków: a) chwytak zewnętrzny, b) chwytak wewnętrzny.

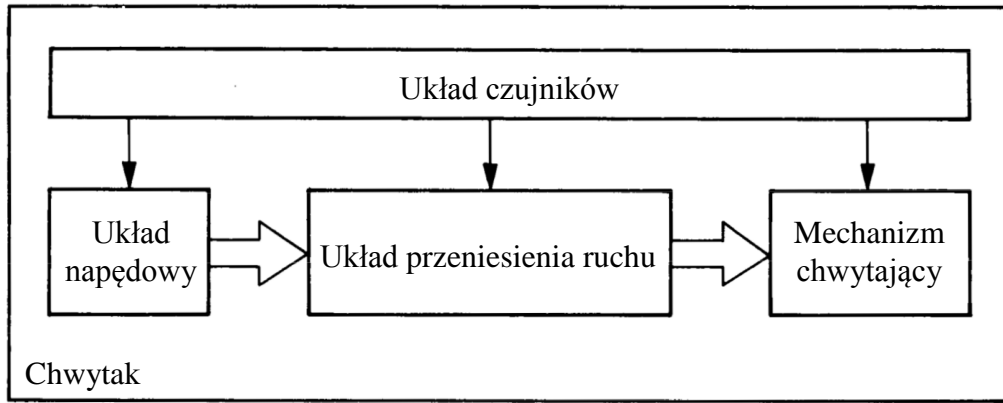


Rys. 8.5. Chwytnik wielopaliczkowy, dostosowujący się do kształtu przedmiotu.



Rys. 8.6. Chwytnik z przyssawkami podciśnieniowymi. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Najczęściej spotykanym rodzajem napędu chwytaków jest napęd elektryczny lub pneumatyczny, układem przeniesienia – układ dźwigniowy, a układem wykonawczym – układ ze sztywnymi palcami. Siła chwytu na ogół jest stała (nastawialna), a sposób chwytania – siłowy. W praktyce przemysłowej układy sensoryczne nie są jeszcze powszechnie w użyciu. Na rys. 8.7 pokazano blokową strukturę chwytaka. Ponieważ istnieje duża różnorodność rozwiązań konstrukcyjnych chwytaków, wygodnym kryterium systematyzacji jest podział ze względu na liczbę i klasę par kinematycznych oraz sposoby ich połączenia.



Rys. 8.7. Schemat blokowy chwytaka.

Najczęściej spotykane układy przenoszenia napędu pokazano na rys. 8.8. Są to mechanizmy: dźwigniowy (rys. 8.8a), klinowy (rys. 8.8b), jarmowy (rys. 8.8c), zębaty (rys. 8.8d) i ciągnowy (rys. 8.8e). Mają one ruchliwość  $r = 1$ , określoną z zależności:

$$r = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1 \quad (\text{rys. 8.8a})$$

$$r = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1 \quad (\text{rys. 8.8b})$$

$$r = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1 \quad (\text{rys. 8.8c})$$

$$r = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1 \quad (\text{rys. 8.8d})$$

$$w = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1 \quad (\text{rys. 8.8e})$$

W przypadku odmiany strukturalnej mechanizmów chwytaków o ruchliwości  $r = 1$ , zawierającej wyłącznie pary kinematyczne klasy piątej, z zależności

$$3n - 2p_5 = 1 \quad (8.2)$$

otrzymuje się

$$n = \frac{1 + 2p_5}{3} \quad (8.3)$$

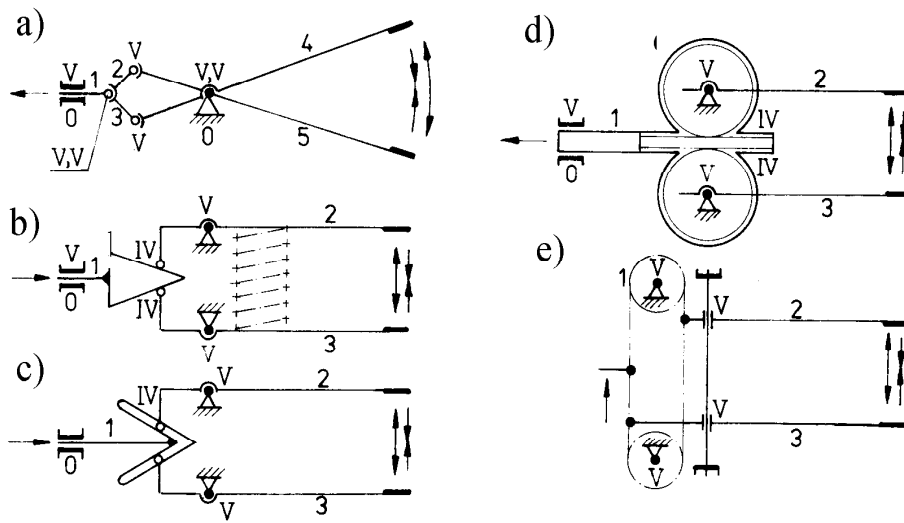
Pary liczb  $(n, p_5)$  spełniających równanie (8.3) podano w tab. 8.1.

Tab. 8.1

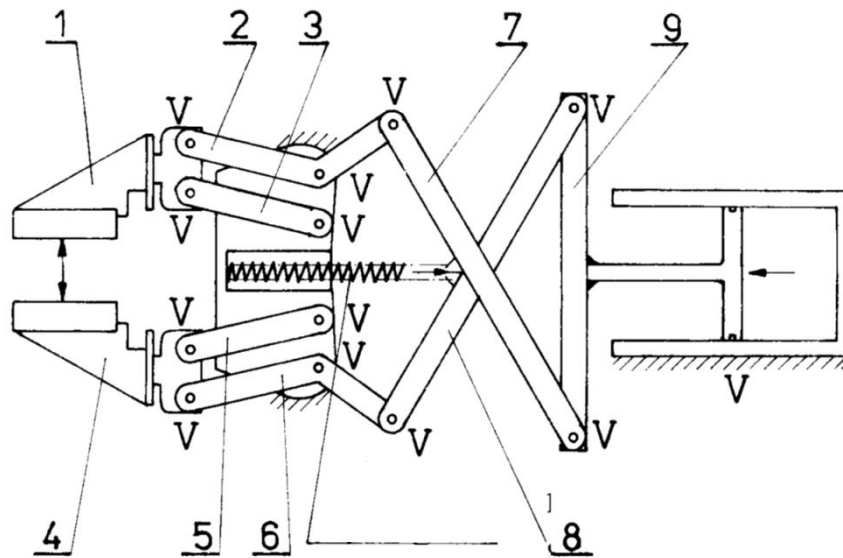
Zestawienie liczb:  $n$  – członów ruchomych i  $p_5$  – par kinematycznych piątej klasy dla mechanizmów chwytakowych typu  $r = 1$ .

$n$	1	3	5	7	9	11	13	.....
$p_5$	1	4	7	10	13	16	19	.....

Typowe mechanizmy chwytaków o różnych kombinacjach  $(n, p_5)$  pokazano w tab. 8.2. Do najprostszych mechanizmów należą chwytaki typu:  $n = 1$  i  $p_5 = 1$ . Jest to siłownik pneumatyczny lub hydrauliczny, przy czym jedna końcówka chwytaka jest połączona z nieruchomym cylindrem, a druga – z ruchomym tłokiem.



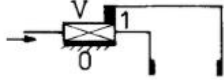
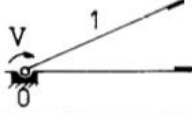
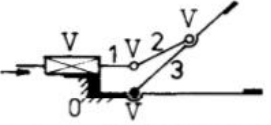
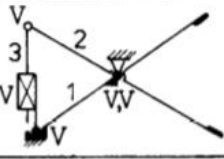
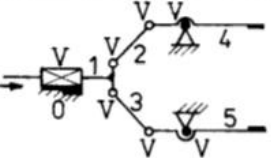
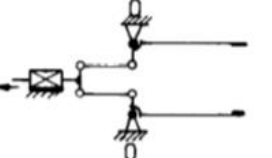
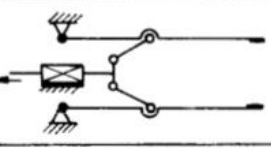
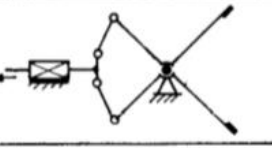
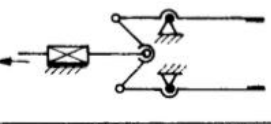
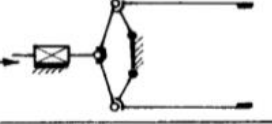
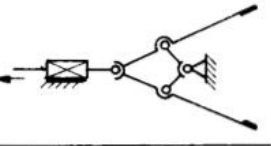
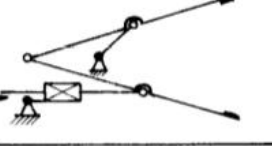
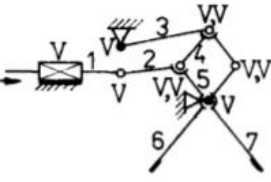
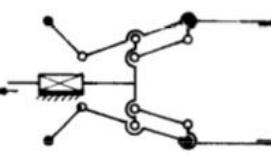
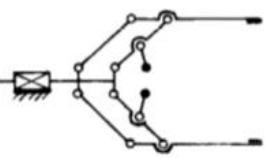
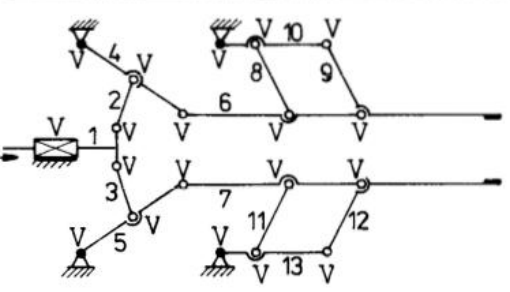
Rys. 8.8. Sposoby realizacji napędu: a) dźwigniowy, b) klinowy, c) jarzmowy, d) zębaty, e) ciągłowy (łańcuchowy). (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



Rys. 8.9. Chwytnak dźwigniowy. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Tab. 8.2

Schematy mechanizmów chwytaków o parach kinematycznych klasy piątej. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

$P_5/n$	Przykładowe struktury	
1/1		
4/3		
7/5		
		
		
		
10/7		
13/9		
19/13		

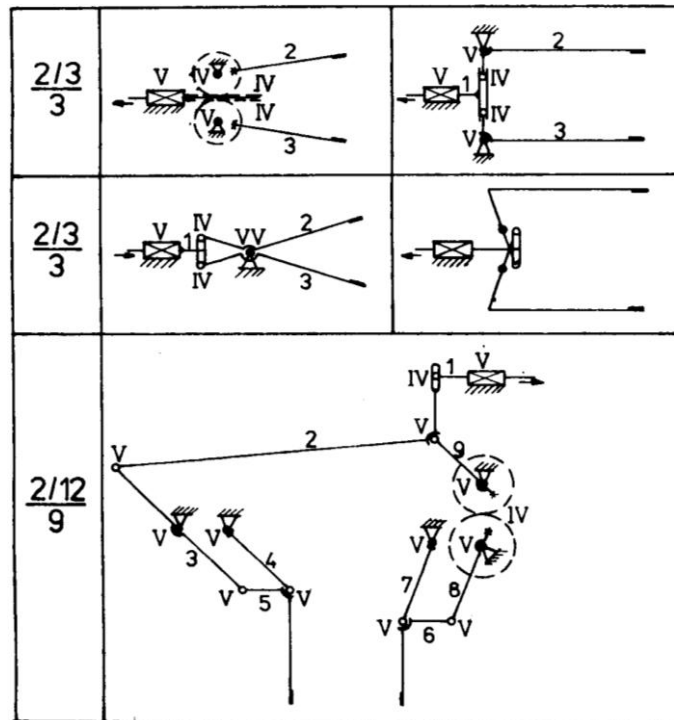
Tab. 8.3

Zestawienie liczb: ( $n$ ) – członów ruchomych, ( $p_5$ ) – par kinematycznych piątej klasy i ( $p_4$ ) – par kinematycznych czwartej klasy mechanizmów chwytakowych typu  $w = 1$ .

$n$	2	4	6	8	...	3	5	7	9	...	4	6	...	5	7	9	...	6	...	7	...
$p_5$	2	5	8	11	...	3	6	9	12	...	4	7	...	5	8	11	...	6	...	7	...
$p_4$	1	1	1	1	...	2	2	2	2	...	3	3	...	4	4	4	...	5	...	6	...

Tab. 8.4

Mechanizmy chwytaków zawierające pary kinematyczne klasy czwartej i piątej.



Często stosowane są mechanizmy chwytaków, zawierające 5 członów ruchomych i 7 par kinematycznych klasy piątej. Do ich zalet należą zwartość i symetryczność konstrukcji. Chwytaiki o większej liczbie członów i par kinematycznych: ( $n = 7, p_5 = 10$ ) oraz ( $n = 9, p_5 = 13$ ), są również spotykane. Na rysunku 8.10 pokazano przykład tego typu. W miarę zwiększania liczby par wzrastają trudności konstrukcyjne. W mechanizmach płaskich mogą występować również pary kinematyczne klasy czwartej. Wówczas z zależności

$$3n - 2p_5 - p_4 = 1 \quad (8.4)$$

otrzymuje się

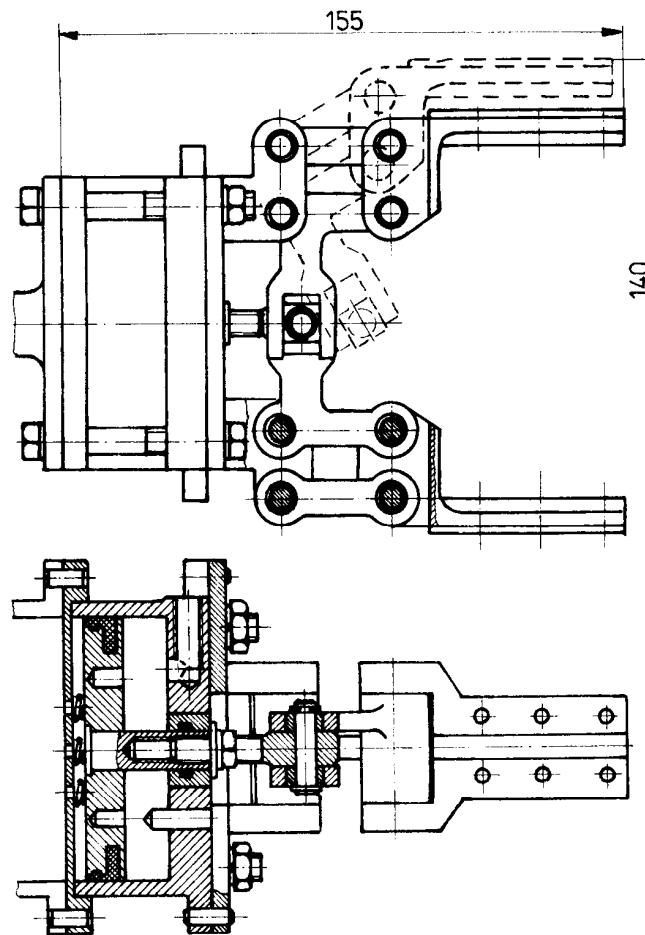
$$n = \frac{1 + p_4 + 2p_5}{3} \quad (8.5)$$

Zaletą mechanizmów chwytakowych, zawierających pary kinematyczne piątej i czwartej klasy, jest mniejsza liczba członów pośredniczących przy przenoszeniu napędu, wadą natomiast – występowanie znacznych sił tarcia w parze kinematycznej

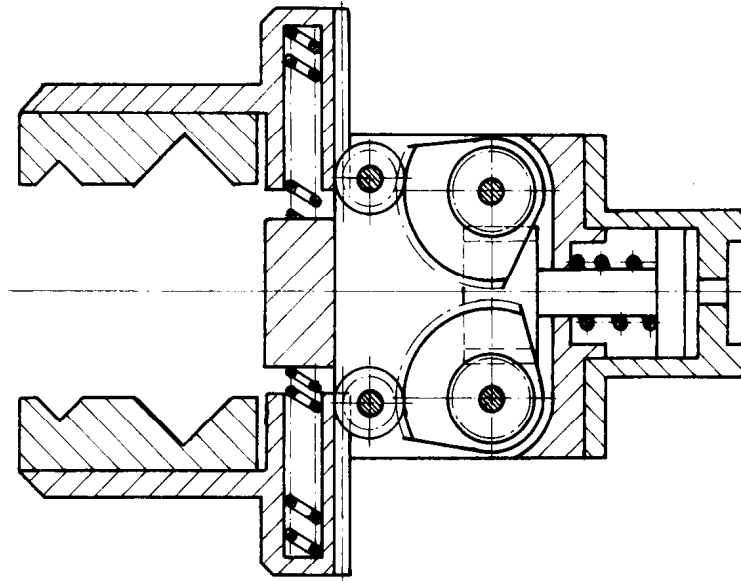


czwartej klasy. W tabelicy 8.3 podano wybrane kombinacje liczb typu ( $n$ ,  $p_4$ ,  $p_5$ ), a w tabl. 8.4 pokazano przykładowo bardziej rozbudowaną strukturę zawierającą:  $p_4 = 2$ ,  $p_5 = 12$  i  $n = 9$ .

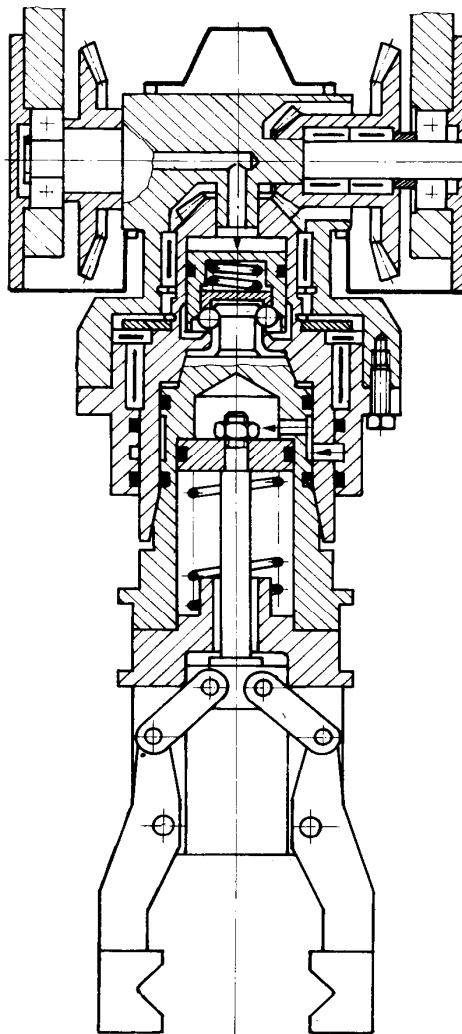
Na rysunku 8.11 pokazano chwytak o strukturze:  $n = 4$ ,  $p_5 = 4$ ,  $p_4 = 3$  i  $w = 1$ . Natomiast na rys. 8.12 przedstawiono typowy przykład rozwiązania konstrukcyjnego chwytaka robota przemysłowego („Universal 5”) o udźwigu 5 kg. Chwytak ma napęd pneumatyczny, a siła chwytu wynosi 800 N. Na rysunku 8.14 pokazano przykład chwytaka dwupalcowego.



Rys. 8.10. Chwytak o napędzie pneumatycznym robota „Universal 5”. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

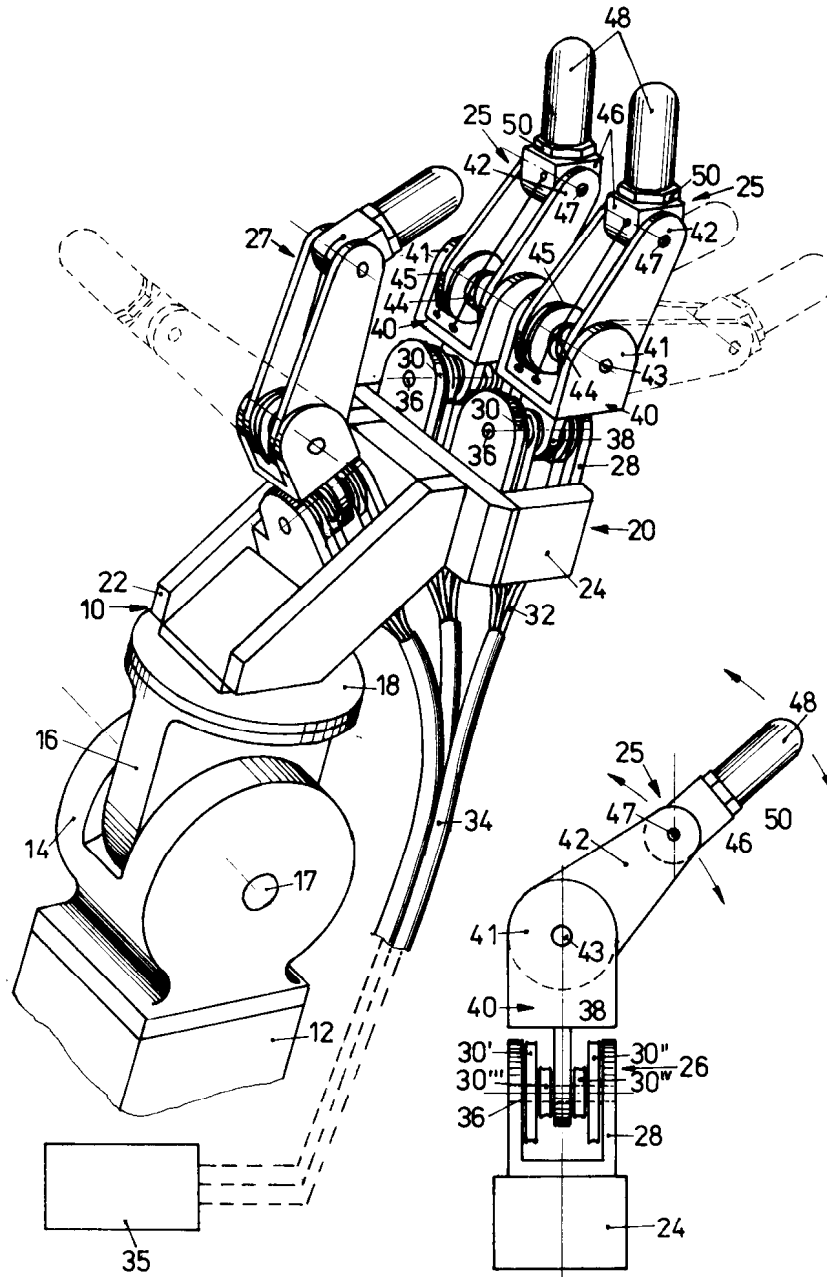


Rys. 8.11. Chwytnik z napędem zębatym. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)



Rys. 8.12. Chwytnik do przenoszenia obiektów o dużej masie. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

Na rysunku 8.13 pokazano rozwiązanie konstrukcyjne ręki stanfordzkiej IPL zainstalowanej na robocie przemysłowym Unimation 600, która ma napęd linkowy.



Rys. 8.13. Ręka stanfordzka IPL, (Unimation 600); oznaczenia: 10, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 22, 24 – elementy ramienia i przedramienia, 27÷48 – palce i napędy, 35 – sterowanie. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

### 8.3 Metodyka doboru chwytaków robotów przemysłowych

Właściwy dobór chwytaka ma decydujące znaczenie dla prawidłowego przebiegu manipulacji. Metodyka doboru chwytaka obejmuje następujące kroki:

1. wybór sposobu uchwycenia,
2. dobór typu chwytaka (zasady działania),
3. wyznaczenie parametrów konstrukcyjnych chwytaka,
4. przystosowanie końcówek chwytanych do kształtu powierzchni obiektu.

### 8.3.1 Wybór sposobu uchwycenia

Na wstępnym etapie doboru chwytaka należy określić sposób uchwycenia obiektu. Prawidłowe uchwycenie obiektu manipulacji jest zależne od:

- sposobu unieruchomienia obiektu w chwytaku,
- parametrów obiektu manipulacji,
- początkowego ustawienia chwytaka względem obiektu,
- warunków dynamicznych procesu manipulacji.

*Urządzenie chwytające* bezpośrednio oddziałuje na obiekt manipulacji i powoduje jego unieruchomienie względem elementów chwytanych tych urządzeń. Pozbawienie obiektu możliwości przemieszczania się względem chwytaka jest niezbędne do prawidłowego zrealizowania założonego procesu manipulacji. Chwytek powinien ograniczyć swobodę ruchu obiektu względem trzech osi układu odniesienia chwytaka. To unieruchomienie może być realizowane przez wywarcie odpowiednich sił działających na obiekt manipulacji (chwyt siłowy) lub odjęcie obiektowi sześciu stopni swobody (chwyt kształtowy). Oba sposoby oddziaływania na obiekt manipulacji powinny być na tyle skuteczne, aby w czasie wykonywania złożonych czynności nie zmienił on swego położenia względem chwytaka, tzn. nie wysunął się z końcówek chwytanych, nie zmienił swojej orientacji względem chwytaka.

W przypadku chwytania siłowego siła chwytu powinna mieć taką wartość, aby wytworzone siły tarcia statycznego uniemożliwiły przemieszczanie się obiektu względem chwytaka podczas manipulacji.

W przypadku chwytania kształtowego siła chwytu powoduje zacisk końcówek chwytanych, ale nie oddziałuje bezpośrednio na obiekt znajdujący się między nasadkami. Nasadki na końcówki chwytne są tak ukształtowane, że stanowią formę dla obiektu (lub jego wybranych fragmentów) – w ten sposób obiekt pozbawiony zostaje możliwości przemieszczania się wskutek odjęcia sześciu stopni swobody. Chwywanie kształtowe stosuje się dla obiektów kruchych, elastycznych itp., dla których nie jest dopuszczalne wywieranie sił na powierzchnię obiektu.

W praktyce przemysłowej stosuje się zwykle chwytanie siłowo-kształtowe, w którym końcówki chwytne swoim kształtem częściowo ograniczają swobodę przemieszczania się obiektu, a jednocześnie wywierają na ten obiekt odpowiednie siły, uniemożliwiające jego przemieszczanie się względem chwytaka.

Do kształtowego chwytania wykorzystuje się nasadki na końcówki chwytne, przymocowane do króćców standardowego chwytaka. Najbardziej niezawodny sposób

uchwycenia danego obiektu określa kształt chwytanego obiektu. Przykłady podstawowych kształtów obiektu i typów chwytaków przedstawiono w tab. 8.5.

Tab. 8.5

*Przykładowe kształty obiektu manipulacji i rodzaje nasadek chwytających.*

Typ chwytaka	Szttywne końcówki chwytnie	Podciśnieniowy	Elektromagnetyczny	Inny
Wąłki, tulejki	szeroki zakresu średnic i długości	nie zalecany	tylko płaskie	chwytaki pneumatyczne z elastycznymi przeponami
Płytki	nie zalecany	Zalecany	zalecany	drobne detale chwytaki ze sprężystymi końcówkami
Arkusze blach, płyty	nie zalecany	zalecany z kilkoma przyssawkami	zalecany z kilkoma elektromagnesami	
Pudełka	tylko specjalne konstrukcje	zalecany z wieloma przyssawkami rozmieszczonymi przestrzennie	zalecany z wieloma elektromagnesami rozmieszczonymi przestrzennie	
Obiekty o złożonych kształtach	nie zalecany	zalecany z wieloma przyssawkami rozmieszczonymi odpowiednio do kształtu obiektu	zalecany z wieloma elektromagnesami rozmieszczonymi odpowiednio do kształtu obiektu	specjalne rozwiązanie konstrukcyjne chwytaków

### 8.3.2 Wybór typu chwytaka

Różnorodność kształtów i wymiarów obiektów manipulacji, rodzaje materiału, struktury powierzchni obiektu, jego ciężaru i inne czynniki wyróżniające obiekty manipulacji wywołały pojawienie się licznych różnych rozwiązań konstrukcyjnych chwytaków. Obecnie dostępne są katalogi chwytaków robotów przemysłowych.

Chociaż producenci robotów dysponują różnorodnymi rozwiązaniami konstrukcyjnymi chwytaków, to zwykle dostarczają wraz z manipulatorem trzy typy chwytaków: ze sztywnymi końcówkami chwytynymi, podciśnieniowy i elektromagnetyczny. Zatem użytkownik może dobrać chwytak odpowiedni dla konkretnego obiektu.

Podstawowe **parametry techniczne** chwytaków robotów przemysłowych:

Chwytaaki ze sztywnymi końcówkami chwytynymi:

- nominalny udźwig, kg,
- siła chwytu, N,
- czas uchwycenia, s,
- czas uwolnienia obiektu, s,
- maksymalne i minimalne wymiary chwytanego obiektu, mm,
- rodzaj ruchu końcówek chwytynych,
- siła na wyjściu zespołu napędowego, N,
- skok tłoczyska siłownika, mm,
- ciśnienie płynu roboczego, Pa;

Chwytaaki podciśnieniowe:

- wymiary pola przyssawki, mm<sup>2</sup>,
- nominalne podciśnienie w czaszy przyssawki, Pa;

Chwytaaki elektromagnetyczne:

- liczba zwojów,
- wymiary pola styku chwytaka z powierzchnią obiektu, mm<sup>2</sup>,
- napięcia zasilania.

Ze względu na prostotę konstrukcji chwytaków podciśnieniowych oraz elektromagnetycznych są one chętnie stosowane, gdy jest to tylko możliwe.

Głównymi elementami chwytaka podciśnieniowego są przyssawki oraz urządzenia do wytwarzania podciśnienia. Przyssawki wykonuje się z gumy lub innych elastycznych tworzyw sztucznych. Najczęściej podciśnienie uzyskuje się z eżektora dzięki energii sprężonego powietrza. Dodatkowe wyposażenie chwytaków podciśnieniowych stanowią przeguby umożliwiające właściwe zorientowanie urządzenia, a tym samym oszczędzenie energii sprężonego powietrza lub wytworzonego podciśnienia (np. włączeniu układu podciśnieniowego dopiero po dotknięciu przyssawki do powierzchni chwytanego obiektu).

Decydując się na użycie chwytaka podciśnieniowego należy pamiętać, że:

- mogą one być stosowane do płaskich powierzchni dla różnego rodzaju materiałów,
- zapewniają ograniczoną siłę przyciągania do danej powierzchni,
- dokładność pozycjonowania obniża elastyczność przyssawki,

- nie mogą występować zabrudzenia (cząstki, pyły) między powierzchniami styku przyssawki a obiektu manipulacji,
- niezbędny jest pewien czas na wytworzenie odpowiedniego podciśnienia, w związku z czym wydłuża się czas uchwycenia,
- wymagana jest hermetyczność połączeń,
- czas pracy chwytaka jest ograniczony ze względu na zużycie przyssawki.

**Chwytnak elektromagnetyczny** składa się z rdzenia oraz uzwojenia. Czasem stosuje się również magnesy stałe, ale wówczas chwytak musi zawierać dodatkowe urządzenia do uwalniania obiektu. Chwytnaki magnetyczne stosuje się zwykle do przenoszenia ferromagnetycznych elementów o powierzchniach kształtowych, których nie można uchwycić urządzeniami chwytającymi innego rodzaju.

Przy wyborze chwytaka elektromagnetycznego należy pamiętać o tym, że:

- mogą one być stosowane tylko do materiałów ferromagnetycznych,
- mogą osiągnąć dużą siłę przyciągania na jednostkę powierzchni,
- na skutek gwałtownego przemieszczenia podczas uchwycenia następuje zwykle pogorszenie dokładności pozycjonowania – żadaną dokładność pozycjonowania można osiągnąć w niektórych przypadkach stosując sztywny trzpień,
- występujący magnetyzm szczątkowy stwarza niebezpieczeństwo zabrudzenia powierzchni chwytaka i obiektu,
- czasy uchwycenia są bardzo krótkie,
- podczas pracy chwytaka nagrzewają się zwoje,
- trzpień i uzwojenie mogą być wykonane przez użytkownika.

### 8.3.3 Dobór parametrów chwytaka

Po dokonaniu wyboru typu chwytaka dobiera się jego parametry, w szczególności należy obliczyć żadaną siłę chwytu. Siłę przyciągania elektromagnesu oblicza się wg wzoru

$$F = \frac{(In)^2}{25P(R_p + R_m)} \quad (8.6)$$

gdzie:  $I$  – natężenie prądu w uzwojeniu,

$n$  – liczba zwojów,

$P$  – pole styku obiektu z elektromagnesem,

$R_p, R_m$  – oporność magnetyczna powietrza i metalu.

Siłę przylegania chwytaka podciśnieniowego oblicza się wg wzoru

$$F = k_p P(p_a - p_p) \quad (8.7)$$

gdzie:  $P$  – powierzchnia robocza przyssawki,

$p_a$  – ciśnienie atmosferyczne,

$p_a$  – ciśnienie wewnątrz przyssawki,

$k_p = 0,85$  – współczynnik uwzględniający możliwość zmiany ciśnienia atmosferycznego i powierzchni roboczej przyssawki.

W obu przypadkach obliczone wartości sił przyciągania i przylegania mogą być zwiększone przez zastosowanie kilku elektromagnesów lub przyssawek. Możliwość utrzymania obiektu przez chwytak podciśnieniowy lub elektromagnetyczny wyznacza się z zależności

$$\mu \left( \frac{F}{mk_1k_2} - g \cos \theta_0 + a \cos \theta \right) \geq g \sin \varphi_0 \sin \theta_0 + a \sin \varphi \sin \theta \quad (8.8)$$

gdzie:  $F$  – siła przyciągania (przylegania), N,

$m$  – masa obiektu,

$g$  – przyspieszenie ziemskie,  $m/s^2$ ,

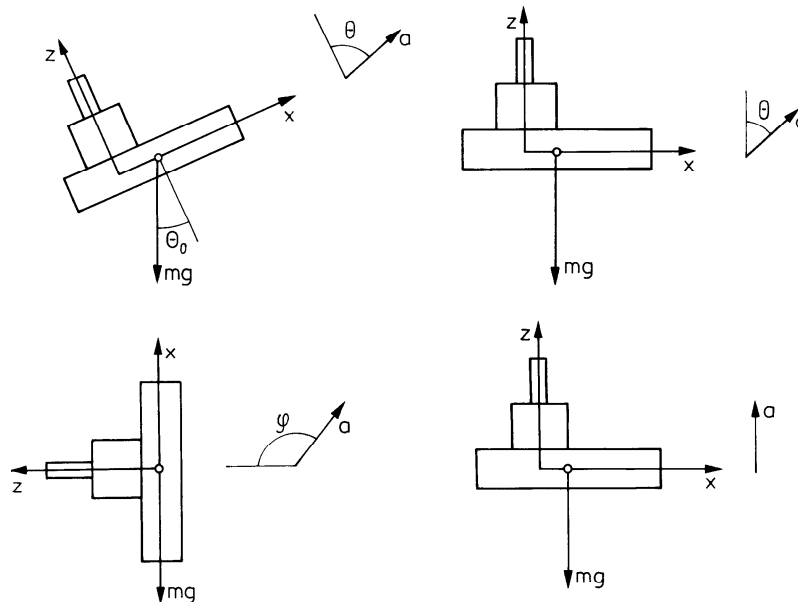
$a$  – przyspieszenie chwytaka,  $m/s^2$ ,

$\theta$  – kąt między wektorem przyspieszenia a osią chwytaka,

$\theta_0$  – kąt między wektorem przyspieszenia ziemskiego a osią chwytaka,

$\varphi$  – kąt między rzutem wektora przyspieszenia na płaszczyznę prostopadłą do osi Z a osią Y,

$\varphi_0$  – kąt między rzutem wektora przyspieszenia ziemskiego na płaszczyznę prostopadłą do osi Z a osią Y (rys. 8.14).



Rys. 8.14. Szczególne przypadki manipulowania obiektem uchwyconym przez chwytak podciśnieniowy lub elektromagnetyczny. (Źródło: Morecki, Knapczyk, 1999)

$$\varphi = \varphi_0 = \pi/2$$

$$\mu \left( \frac{F}{mk_1k_2} - g \cos \theta_0 + a \cos \theta \right) \geq g \sin \theta_0 - a \sin \theta$$

$$\varphi = \varphi_0 = \pi/2, \quad \theta_0 = 0$$

(8.9)



$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{F}{mk_1k_2} - g + a \cos \theta \right) &\geq a \sin \theta \\ \varphi = \varphi_0 = \pi/2, \quad \theta_0 = \pi/2 \\ \mu \left( \frac{F}{mk_1k_2} - a \cos \theta \right) &\geq g + a \sin \theta \\ \varphi = \varphi_0 = \pi/2, \quad \theta_0 = \theta = \pi/2 \\ \mu \frac{F}{mk_1k_2} &\geq g + a \end{aligned} \tag{8.9}$$

gdzie:  $\mu$  – współczynnik tarcia między obiektem a chwytakiem (dla gumy i stali  $\mu = 0,3$ , dla stali i innych metali  $\mu = 0,17$ ),

$k_1$  – współczynnik bezpieczeństwa (zapasu siły chwytu) zależny od warunków pracy chwytaka,

$k_2$  – współczynnik uwzględniający przesunięcie punktu przyłożenia siły przylegania i środka ciężkości obiektu, zależny od konstrukcji chwytaka,

$$k_2 = \frac{r}{r + \Delta x} \tag{8.10}$$

$r$  – średni promień powierzchni chwytaka,

$\Delta x$  – przemieszczenie osi chwytaka i środka ciężkości obiektu.

Dla chwytaków ze sztywnymi końcówkami chwytynymi parametrami istotnymi z punktu widzenia prawidłowości uchwycenia danego obiektu są: zakres przemieszczeń końcówek chwytynych, siła chwytu, wymiary chwytaka, sposób uchwycenia, głębokość uchwycenia i inne parametry konstrukcyjne chwytaka. Użytkownik, dysponując zwykle jednym rozwiązaniem danego chwytaka ze sztywnymi końcówkami chwytynymi, ma niewielką możliwość zmiany parametrów konstrukcyjnych chwytaka, prowadzącą się do zmiany końcówek chwytynych oraz zmiany warunków zasilania. Zmniejszenie ciśnienia zasilania umożliwi osiągnięcie mniejszych wartości siły chwytu; zwykle wartość siły chwytu zmienia się również wraz ze zmianą długości końcówki chwytnej.

Jeśli nie jest możliwe uzyskanie pożądaných warunków uchwycenia obiektu za pomocą chwytaków dostarczonych przez producenta, to należy podjąć próbę zaprojektowania chwytaka wg zaleceń omówionych w p. 8.4.

### 8.3.4 Przystosowanie końcówek chwytynych do kształtu powierzchni obiektu

Większość rozwiązań konstrukcyjnych chwytaków ma dwa przeciwległe króćce, do których mocuje się sztywne końcówki chwytne; przez zmianę wymiarów i kształtu końcówek chwytynych można przystosować dany chwytak do obiektu. Przystosowanie to może polegać na:

- zmianie kształtu końcówek chwytynych, np. przystosowanie do kształtu powierzchni obiektu,

- zmianie wymiarów końcówek chwytanych, np. ich wydłużenie lub skrócenie (związane z wymiarami obiektu),
- zmianie powierzchni kontaktu końcówki chwytnej z obiektem,
- zastosowanie specjalnych materiałów dla fragmentów końcówki stykających się z powierzchnią chwytanego obiektu, np. o zwiększonym współczynniku tarcia, elastyczne itp.

## **8.4 Zasady projektowania chwytaków robotów przemysłowych**

Podstawowe etapy projektowania chwytaków obejmują:

1. wybór miejsca uchwycenia,
2. obliczenie sił i momentów sił działających na obiekt w warunkach dynamicznych,
3. określenie liczby końcówek chwytanych, sposobu i zakresu ich przemieszczenia,
4. dobór układu przeniesienia napędu,
5. obliczenie zespołu napędowego,
6. opracowanie konstrukcji chwytaka, w tym także konstrukcji przyłącza.

### **8.4.1 Określenie parametrów wejściowych do projektowania chwytaków**

Dane wejściowe do projektowania chwytaków określa się na podstawie warunków eksploatacji i charakterystyki geometrycznej zrobotyzowanego stanowiska, charakterystyki obiektu i charakterystyki robota przemysłowego.

#### **Warunki eksploatacji i warunki geometryczne stanowiska:**

- Wykonanie chwytaka (normalne, pyłoszczelne, iskrobezpieczne itp.) i warunki przedstawiane w postaci zakresu dopuszczalnych parametrów otoczenia, przy których są zapewnione żądane parametry techniczne i użytkowe chwytaka.
- Wymiary gabarytowe strefy chwytania, sposób bazowania obiektu i ustawienie w pozycji chwytania.
- Wymiary gabarytowe strefy uwolnienia obiektu, sposób bazowania i parametry położenia obiektu w strefie uwolnienia.

#### **Charakterystyka obiektu:**

- Kształt i parametry geometryczne obiektu określają kształt, parametry i liczbę końcówek chwytanych, konfigurację chwytaka, zakres rozwarcia końcówek chwytanych.
- Masa i charakterystyki bezwładnościowe obiektu umożliwiają wyznaczenie sił bezwładności działających na obiekt podczas pracy robota.

- Charakterystyki wytrzymałościowe obiektu stawiają ograniczenia maksymalnej wartości siły chwytu.

### **Charakterystyki robota:**

- Prędkości i przyśpieszenia poszczególnych zespołów ruchowych robota określają siły bezwładności obiektu.
- Powtarzalność pozycjonowania robota jest uwzględniana przy określaniu zakresu rozwarcia końcówek chwytnych.
- Rodzaj napędu robota – przy projektowaniu zespołu napędowego chwytaka czasem bywa uwzględniany rodzaj istniejącego napędu.
- Zakończenie ramienia – jako miejsce przyłączenia chwytaka.

## **8.4.2 Wybór miejsc uchwycenia obiektu**

Wyboru miejsc uchwycenia dokonuje się na podstawie charakterystyki obiektu (kształtu, wymiarów, masy, wytrzymałości, jakości powierzchni itp.) oraz warunków eksploatacji (otoczenia, warunków chwytania i umiejscowienia obiektu, bazowania obiektu).

Po określeniu miejsc uchwycenia, na podstawie kształtu i parametrów geometrycznych obiektu oraz parametrów strefy chwytania i uwalniania, dokonuje się wyboru liczby końcówek, ich wymiarów i kształtu, a także sposobu przemieszczenia. Z informacji o żądanym sposobie przemieszczenia korzysta się również przy obliczaniu układu przeniesienia napędu (wyznaczaniu charakterystyki przesunięcia). Liczba końcówek chwytnych może być różna; standardowy chwytak ma dwie końcówki chwytne, umieszczone przeciwległe. Końcówki chwytne występują jako elementy sztywne, nie odkształcające się podczas chwytania obiektu. Występowanie niekorzystnych zjawisk dynamicznych podczas uderzania sztywnej końcówki o twardą powierzchnię obiektu, a także często specyficzne wymagania stawiane przez proces technologiczny lub obiekt manipulacji powodują konieczność użycia sprężystych końcówek chwytnych.

Standardowe wyposażenie robotów przemysłowych obejmuje zwykle sam chwytak z niekompletnymi końcówkami chwytymi (króćcami). W zależności od rodzaju obiektu manipulacji użytkownik doбира odpowiednie nasadki na króćce. Istotą stosowania nasadek jest to, że bez zmiany układu napędowego oraz układu przeniesienia napędu, a jedynie dzięki zmianie długości, kształtu bądź materiału nasadki, uzyskuje się żądane warunki uchwycenia obiektu.

Nasadki na końcówki chwytne mogą pełnić różne funkcje, np.:

- obejmowanie całej powierzchni bocznej obiektu,
- korygowanie położenia obiektu (w niewielkim zakresie, np. obiektów o walcowej powierzchni bocznej),

- zapewnienie żądanego rodzaju styku powierzchni obiektu i końcówki chwytnej,
- zapewnienie miękkiego styku końcówki chwytnej i powierzchni chwytanego obiektu,
- izolowanie termiczne chwytaka.

### 8.4.3 Obliczanie sił i momentów sił działających na obiekt

Wyznaczenie sił i momentów sił działających na obiekt może być dokonane różnymi metodami. Najczęściej stosuje się metody analityczne. Metodyka obliczeń obejmuje wyznaczenie charakterystyk bezwładnościowych obiektu, obliczenie sił i momentów sił działających na uchwycony obiekt i wyznaczenie dopuszczalnych zakresów zmian sił i momentów sił. W obliczeniach przyjmuje się najbardziej niekorzystne przypadki uchwycenia i ekstremalne warunki pracy manipulatora (np. obroty na maksymalnym promieniu, maksymalne przyśpieszenia itp.).

Wypadkowe (statyczne i dynamiczne) siły i momenty sił działające na chwytak przenoszący obiekt wynoszą:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{T} + \mathbf{P} \quad (8.11)$$

$$\mathbf{M} = -\mathbf{L}_c + \mathbf{r}_c \times \mathbf{F} \quad (8.12)$$

Siły dynamiczne  $\mathbf{T}$  określają wpływ ruchu obiektu z chwytakiem:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\theta} &= m \mathbf{v}_c \end{aligned} \quad (8.13)$$

gdzie:  $\boldsymbol{\omega}$  – wektor prędkości kątowej,

$\mathbf{v}_c$  wektor prędkości liniowej,

$m$  – masa obiektu.

Wektor krętu masy obiektu  $\mathbf{K}_c$  określa się wg wzoru

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{I}_c \boldsymbol{\omega} + m (\mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_c) \quad (8.14)$$

gdzie:  $\mathbf{I}_c$  – moment bezwładności obiektu,

$\mathbf{r}_c$  – wektor położenia środka masy.

Pochodna względem czasu wektora krętu

$$\mathbf{L}_c = \frac{d\mathbf{K}_c}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_c \quad (8.15)$$

Dla pełnego zapisu przytoczonych wyżej ogólnych zależności niezbędna jest pełna znajomość dynamiki konkretnego robota przemysłowego. Układ sił i momentów sił wyznaczonych w układzie odniesienia obiektu trzeba sprowadzić do układu odniesienia chwytaka, ostatniego członu manipulatora, do którego mocowany jest chwytak lub do innego układu odniesienia.



Iloraz  $F_G/F_A$  dla  $v_G = \omega_{41} \cdot l_5$  ma postać

$$\frac{F_G}{F_A} = \frac{V_A}{2\omega_{41}l_5 \cos(180^\circ - \beta - \varphi_{41})} \quad (8.16)$$

gdzie:

$$s_A = s_{21}, \quad \omega_{41} = \frac{d\varphi_{41}}{ds_{21}} \cdot \frac{ds_{21}}{dt} = \varphi'_{41} V_A$$

#### 8.4.4 Tendencje rozwojowe chwytaków

Większość stosowanych obecnie chwytaków ma napęd pneumatyczny. Wynika to najczęściej z realizacji nieskomplikowanego zadania zacisku końcówek chwytnych na powierzchni obiektu. Taki chwytak ma dwa stany pracy: zamknięty i otwarty, co odpowiada stanom uchwycenia i uwolnienia obiektu. Zespół napędowy chwytaka stanowi siłownik pneumatyczny dwustronnego lub jednostronnego (ze sprężyną zwrotną) działania. Przemieszczenie i siła zespołu napędowego są przenoszone na końcówki chwytne. Istnieje wiele rozwiązań układów przeniesienia napędu.

W chwytakach wykorzystuje się zalety napędu pneumatycznego: dobrą charakterystykę masowo-gabarytową, prostą konstrukcję zespołów wykonawczych, dużą szybkość działania.

Istotną niedogodnością stosowania chwytaków z napędem pneumatycznym jest trudność sterowania położeniem i prędkością przemieszczenia końcówek chwytnych.

Napęd elektryczny zdecydowanie przeważa we współczesnych rozwiązaniach konstrukcyjnych robotów przemysłowych. Zalety tego napędu są ogólnie znane: nie są potrzebne oddzielne stacje zasilania, zbędne stają się przetworniki oraz uszczelnienia, uproszczone zostaje przygotowanie do pracy i obsługa. Jednakże w większości przypadków roboty z napędem elektrycznym są wyposażone w chwytaki z napędem pneumatycznym, najczęściej z siłownikiem liniowym.

W chwytakach elektrycznych pojawia się możliwość sterowania siłą chwytu i prędkością ruchu końcówek chwytnych (możliwość kształtowania tego przebiegu). Zastosowanie takich chwytaków w robotach z napędem elektrycznym umożliwi łatwiejszą wymianę chwytaków (w tym także automatyczną), uproszczenie struktury układów sterowania, ujednoczenie typu napędu, podwyższenie niezawodności.

Zastosowanie w chwytakach napędu elektrycznego jest związane ze spełnieniem dwóch głównych wymagań: dużej redukcji prędkości, a więc stosowania przekładni o dużym przełożeniu, podtrzymywania siły chwytu przy odłączonym napędzie, a więc zapobiegania możliwemu ruchowi zwrotnemu silnika (rozwieranie się chwytaka).

## 8.5 Chwytyki podobne do ręki i dłoni z palcami

### 8.5.1 Chwytek jako mechaniczna ręka

Mechaniczna ręka o wielu stopniach ruchliwości wykazuje wysoką zręczność. Zazwyczaj jest podobna do ręki człowieka, w której jest 47 przegubów (stawów) i 35 mięśni. Dłoń człowieka zawiera 19 kości, 17 stawów i 19 mięśni, a ponadto wiele ścięgien, więzadeł i elementów czucia. Zadania manipulacyjne, w których wykorzystuje się wiele napędów, wymagają złożonego układu sterowania. W przypadku, gdy zadanie jest ograniczone do chwytania obiektu, wtedy liczba napędów może być minimalizowana poprzez dostosowanie chwytaka do kształtu obiektu i odpowiedni rozkład sił reakcji w punktach podparć.

Mechanizm tzw. „samonapinający” ma liczbę napędów mniejszą od liczby ruchliwości, co jest możliwe dzięki wykorzystaniu energii potencjalnej elementów sprężystych, które są małe, lekkie i łatwe do wykonania. Taki mechanizm może być wykorzystany w mechanicznym chwytaku, którego palce automatycznie obejmują obiekt, co zapewnia proste sekwencje chwytania, bez konieczności aktywnej koordynacji wielu paliczków (członów). Samonapinający mechanizm pozwala na chwytanie obiektu w sposób podobny do chwytania przez dłoń człowieka.

Mechanizmy samonapinające zastosowane w chwytakach mechanicznych do poruszania członów palców pozwalają na samoczynne obejmowanie obiektu, a zatem dają stabilne sekwencje chwytania, które nie wymagają aktywnej koordynacji szeregu paliczków. Samonapinający mechanizm wykorzystuje  $(n - m)$  siłowników do sterowania  $n$  stopni ruchliwości, przy czym  $m$  elementów biernych (sprężystych) zastępuje siłowniki

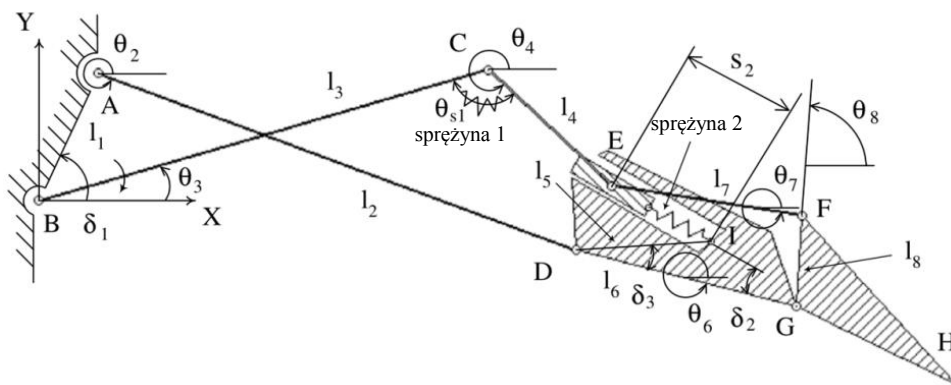
Jako przykład mechanizmu samonapinającego można podać mechanizm 5-boku przegubowego o jednym silniku obrotowym, napędzającym człon 1 przy podstawie oraz jedną sprężyną skrętną, samoczynnie napinaną przez połączenie obrotowe dwóch członów, np. 3 i 4. W przypadku, gdy obrót członu 4 zostanie zatrzymany przez moment oporu wywołany siłą reakcji obiektu chwytanego, wtedy moment napędowy silnika powoduje odkształcanie sprężyny skrętnej, aż mechanizm 4-boku osiągnie położenie, w którym człon 3 zetknie się z obiektem, wywierając na niego siłę nacisku proporcjonalną do momentu odkształcenia sprężystego sprężyny skrętnej.

Na rys. 8.16 i 8.17 przedstawiono mechanizm samonapinający 3-członowego palca chwytaka, w którym silnik obrotowy napędza człon 3 przy podstawie 1, a dwie sprężyny są samoczynnie napinane przez przemieszczenia względne członów 3 i 4 (sprężyna skrętna) oraz członów 5 i 6 (sprężyna ściskana). Zadanie analizy położeń i przemieszczeń mechanizmu chwytaka polega na wyznaczeniu zmiennych współrzędnych kątowych  $\theta_i$  ( $i=2,4,5,6,7,8$ ) członów biernych jako funkcji zmiennej współrzędnej kątowej  $\theta_3$  członu napędowego 3.

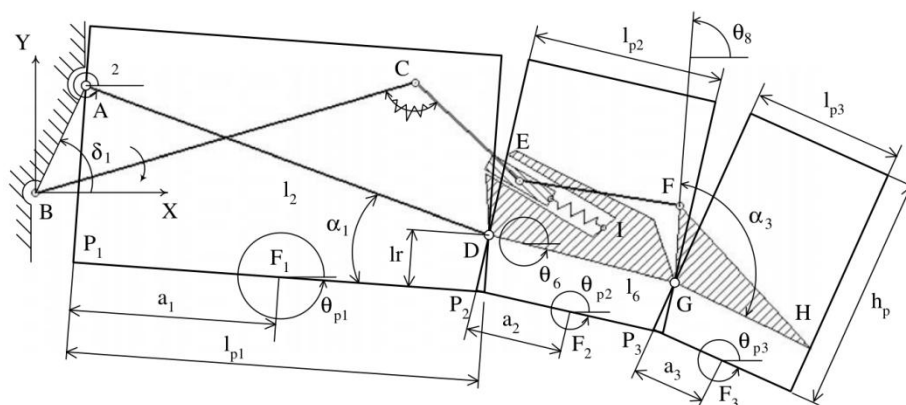
W przypadku mechanizmu o jednym napędzie czynnym i dwóch napędach biernych w postaci sprężyn, o położeniu decyduje nie tylko przemieszczenie ogniwa napędowego, którym można łatwo sterować, ale i odkształcenia sprężyn, zależne od obciążeń oraz od wartości ich parametrów, tzn. współczynników sprężystości i początkowej długości.

Znając położenia punktów styku chwytaka z obiektem, można wyznaczyć jaki moment napędowy wystarczy do uchwycenia obiektu w taki sposób, aby go nie upuścić. Chwytnak LARM składa się z 3 identycznych palców, przypominających wymiarami palce człowieka (wymiały są zaledwie o 20% większe niż u przeciętnego człowieka). Mechanizm palca, składający się z 7 członów, 1 suwaka i 2 sprężyn, wykazuje jeden stopień ruchliwości, co pozwala na realizację chwytu tak, jak ma to miejsce w przypadku ludzkiej dłoni.

a



b



Rys. 8.16. a) Mechanizm 3-członowego palca chwytaka wielo-palcowego. Oznaczenia: XY-układ odniesienia podstawy, 1, 3 - człon napędowy (kąt obrotu  $\theta_3$ ), 2, 6, 8 - człony (palczki) napędzane pośrednio, EI - sprężyna ściskana, napędzająca obrót członu 8. Zmienne:  $\theta_i$  - kąt przemieszczenia kątownego członu  $i$  względem osi  $x$ ,  $\theta_{s1}$  - kąt skręcenia sprężyny napędu członu 4 względem członu 3. b) Wymiarowanie palców chwytaka:  $l_{pi}$  - długość palca;  $h_p$  - grubość palca;  $\alpha_i$  - kąt nachylenia linii palca względem osi członu 2;  $\theta_{pi}$  - kąt nachylenia linii palca względem osi  $x$ ;  $a_i$  - odległość punktu styku palca od przegubu (stawu). (Źródło: LiCheng i in., 2009)



Przyjmując ustaloną wartość kąta  $\theta_{s1}$  można wyznaczyć odległość przegubów  $B$  i  $E$ , określonych jako długość fikcyjnego członu 9, oznaczoną  $l_9$

$$l_9 = \sqrt{l_3^2 + l_4^2 - 2l_3l_4\cos\theta_{s1}} \quad (8.17)$$

Wartości kąta  $(\theta_3 - \theta_9)$  między ramionami  $BC$  i  $BE$  oblicza się wg wzoru

$$\theta_3 - \theta_9 = \arccos \frac{l_3^2 + l_9^2 - l_4^2}{2l_3l_9} \Rightarrow \theta_9 = \theta_3 - \arccos \frac{l_3^2 + l_9^2 - l_4^2}{2l_3l_9} \quad (8.18)$$

Przyjmując ustaloną długość sprężyny  $s_2$  można wyznaczyć odległość przegubów  $D$  i  $E$ , określonych jako długość fikcyjnego członu 10, a oznaczoną jako  $l_{10}$

$$l_{10} = \sqrt{s_2^2 + l_5^2 - 2l_5s_2\cos(\delta_2 + \delta_3)} \quad (8.19)$$

Warunek zamknięcia łańcucha kinematycznego, złożonego z członów 1, 2, 10 i 9 można zapisać w postaci rzutów odpowiednich wektorów na osie  $X$  i  $Y$ , otrzymując układ równań

$$\begin{aligned} l_9\cos\theta_9 &= l_1\cos\delta_1 + l_2\cos\theta_2 + l_{10}\cos\theta_{10} \\ l_9\sin\theta_9 &= l_1\sin\delta_1 + l_2\sin\theta_2 + l_{10}\sin\theta_{10} \end{aligned} \quad (8.20)$$

Rugując niewiadomą  $\theta_{10}$  z układu (8.20) otrzymuje jedno równanie o niewiadomej  $\theta_2$

$$\begin{aligned} 2l_2(l_1\cos\delta_1 - l_9\cos\theta_9)\cos\theta_2 + 2l_2(l_1\sin\delta_1 - l_9\sin\theta_9)\sin\theta_2 &= \\ = l_{10}^2 - (l_1^2 + l_2^2 + l_9^2) + 2l_1l_9\cos(\theta_9 - \delta_1) \end{aligned}$$

Powyższe równanie można zapisać w postaci równania trygonometrycznego względem  $\theta_2$

$$A\cos\theta_2 + B\sin\theta_2 = D \quad (8.21)$$

$$A = \cos\delta_1 - \frac{l_9}{l_1}\cos\theta_9$$

$$B = \sin\delta_1 - \frac{l_9}{l_1}\sin\theta_9 \quad (8.22)$$

$$D = \frac{l_{10}^2 - (l_1^2 + l_2^2 + l_9^2)}{2l_1l_2} + \frac{l_9}{l_2}\cos(\theta_9 - \delta_1)$$

Po zastosowaniu podstawienia  $t = tg \frac{\theta_2}{2}$ , równanie (8.21) przyjmuje postać:

$$\frac{1}{2}(A + D)t^2 - Bt - \frac{1}{2}(A - D) = 0$$

Stąd rozwiązanie

$$t = \frac{B \pm \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}}{A + D} \quad (8.23)$$

W ten sposób wyznacza się zależność kąta  $\theta_2$  od  $\theta_3$ :

$$\theta_2 = 2\arctg(t) \Rightarrow \theta_2(\theta_3) \quad (8.24)$$

Na podstawie zależności (8.20) wyznacza się wartości sinusa i cosinusa kąta  $\theta_{10}$ , zatem określa relację między kątem  $\theta_{10}$  a  $\theta_3$ :

$$\begin{aligned} \cos \theta_{10} &= \frac{l_9}{l_{10}} \cos \theta_9 - \frac{l_1}{l_{10}} \cos \delta_1 - l_2 \frac{\cos \theta_2}{l_{10}} \\ \sin \theta_{10} &= \frac{l_9}{l_{10}} \sin \theta_9 - \frac{l_1}{l_{10}} \sin \delta_1 - l_2 \frac{\sin \theta_2}{l_{10}} \end{aligned} \quad (8.25)$$

Znając wartość kąta  $\theta_{10}$  można wyznaczyć wartość kąta  $\theta_5$ :

$$\cos(\theta_{10} - \theta_5) = \frac{s_2^2 - l_{10}^2 - l_5^2}{2l_{10}l_5} \Rightarrow \theta_5 = \theta_{10} - \arccos\left(\frac{s_2^2 - l_{10}^2 - l_5^2}{2l_{10}l_5}\right) \quad (8.26)$$

Następnie wyznacza się wartość kąta  $\theta_6$ :

$$\delta_1 - \theta_5 = 2\pi - \theta_6 \Rightarrow \theta_6 = 2\pi + \theta_5 - \delta_1 \quad (8.27)$$

W kolejnym kroku wyznacza się wartości kąta  $\theta_8$ , rzutując wektory łańcucha członów 6, 8, 7 i 10 na osie  $x$  i  $y$ , otrzymując układ równań:

$$\begin{aligned} l_6 \cos \theta_6 + l_8 \cos \theta_8 - l_{10} \cos \theta_{10} &= l_7 \cos \theta_7 \\ l_6 \sin \theta_6 + l_8 \sin \theta_8 - l_{10} \sin \theta_{10} &= l_7 \sin \theta_7 \end{aligned}$$

Obie strony powyższych równań podnosi się do kwadratu i dodaje, aby wyrugować  $\theta_7$

$$\begin{aligned} l_6^2 + l_8^2 + l_{10}^2 + 2l_6l_8 \cos \theta_6 \cos \theta_8 - 2l_6l_{10} \cos \theta_6 \cos \theta_{10} - 2l_8l_{10} \cos \theta_8 \cos \theta_{10} \\ + 2l_6l_8 \sin \theta_6 \sin \theta_8 - 2l_6l_{10} \sin \theta_6 \sin \theta_{10} - 2l_8l_{10} \sin \theta_8 \sin \theta_{10} &= l_7^2 \end{aligned} \quad (8.28)$$

Po przekształceniu z powyższego równania, otrzymuje się:

$$A \cos \theta_8 + B \sin \theta_8 = D \quad (8.29)$$

gdzie

$$\begin{aligned} A &= \cos \theta_6 - \frac{l_{10}}{l_8} \cos \theta_{10}; \quad B = \sin \theta_6 - \frac{l_{10}}{l_8} \sin \theta_{10} \\ D &= \frac{l_7^2 - (l_6^2 + l_8^2 + l_{10}^2)}{2l_6l_8} + \frac{l_{10}}{l_8} \cos(\theta_6 - \theta_{10}) \end{aligned}$$

Po zastosowaniu podstawienia  $t = tg \frac{\theta_8}{2}$ , otrzymuje się:

$$\frac{1}{2}(A+D)t^2 - Bt - \frac{1}{2}(A-D) = 0 \quad (8.30)$$

Stąd

$$t = \frac{B \pm \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}}{A+D} \quad (8.30a)$$

Zatem kąt  $\theta_8$  jest równy:  $\theta_8 = 2arctg(t)$

Mając kąt  $\theta_8$ , możemy wyznaczyć wartość sinusa i cosinusa kąta  $\theta_7$ :

$$\begin{aligned} c\theta_7 &= \frac{l_6}{l_7} c\theta_6 + \frac{l_8}{l_7} c\theta_8 - \frac{l_{10}}{l_7} c\theta_{10} \\ s\theta_7 &= \frac{l_6}{l_7} s\theta_6 + \frac{l_8}{l_7} s\theta_8 - \frac{l_{10}}{l_7} s\theta_{10} \end{aligned} \quad (8.31)$$

Przyjęto, że palce chwytaka mają kształt prostokątny o długości  $l_{pi}$  i wysokości  $h_p$ , przy czym płaszczyzna palca, stykająca się z obiektem, jest nachylona względem członu pod kątem  $\alpha_i$ , a względem osi  $x$  pod kątem  $\theta_{pi}$ , gdzie

$$\theta_{p1} = \theta_2 + \alpha_1; \quad \theta_{p2} = \theta_6; \quad \theta_{p3} = \theta_8 + \alpha_3 \quad (8.32)$$

Współrzędne punktów  $F_i$  styku palców  $i = 1, 2, 3$  z obiektem oblicza się wg wzorów

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \delta_1 + (l_2 \sin \alpha_1 + l_r) \cos (\theta_{p1} - \frac{\pi}{2}) + a_1 \cos \theta_{p1} \\ y_1 &= l_1 \sin \delta_1 + (l_2 \sin \alpha_1 + l_r) \sin (\theta_{p1} - \frac{\pi}{2}) + a_1 \sin \theta_{p1} \\ x_2 &= l_1 \cos \delta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_r \cos (\theta_{p2} - \frac{\pi}{2}) + a_2 \cos \theta_{p2} \\ y_2 &= l_1 \sin \delta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_r \sin (\theta_{p2} - \frac{\pi}{2}) + a_2 \sin \theta_{p2} \\ x_3 &= l_1 \cos \delta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_6 \cos \theta_6 + l_r \cos (\theta_{p3} - \frac{\pi}{2}) + a_3 \cos \theta_{p3} \\ y_3 &= l_1 \sin \delta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_6 \sin \theta_6 + l_r \sin (\theta_{p3} - \frac{\pi}{2}) + a_3 \sin \theta_{p3} \end{aligned} \quad (8.33)$$

Macierz jacobianowa mechanizmu opisuje zależności pochodnych cząstkowych współrzędnych kartezjańskich punktów styku palców względem współrzędnych konfiguracyjnych

$$J^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial y_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial y_3}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{s1}} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_{s1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_{s1}} & \frac{\partial y_2}{\partial \theta_{s1}} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_{s1}} & \frac{\partial y_3}{\partial \theta_{s1}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s_2} & \frac{\partial y_1}{\partial s_2} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} & \frac{\partial y_2}{\partial s_2} & \frac{\partial x_3}{\partial s_2} & \frac{\partial y_3}{\partial s_2} \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

Palec chwytaka realizuje zadanie chwytu wywierając siły nacisków w kilku punktach styku między obiektem a poszczególnymi paliczkami palca. Chwył statyczny może wystąpić przy trzech punktach styku, po jednym przy każdym z paliczków. Przyjmując, że w punkcie styku występuje tylko siła reakcji, a moment siły reakcji jest tak mały, że można go pominąć, to wektor sił reakcji można zapisać w postaci:

$$\mathbf{f}_e = [f_{1x}, f_{1y}, f_{2x}, f_{2y}, f_{3x}, f_{3y}]^T \quad (8.35)$$

Wektor sił napędowych:

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_b, \tau_{s1}, f_{s2}]^T \quad (8.36)$$

Gdzie:

$\tau_b$  - moment obrotowy silnika napędowego,

$\tau_{s1}$  - moment obrotowy sprężyny skrętnej.

$f_{s2}$  - siła sprężyny ściskanej, przy czym:

$$\tau_{s1} = k_1(\theta_{s1} - \theta_{s10}); \quad f_{s2} = k_2(s_2 - s_{20}) \quad (8.37)$$

gdzie  $\theta_{s1}$  i  $s_{20}$  – początkowe wartości zmiennych sprężyn 1 i 2.

Zgodnie z zasadą prac przygotowanych:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{f}_e \quad (8.38)$$

gdzie  $\mathbf{J}$  – macierz jacobianowa mechanizmu opisana wzorem (8.34)

Stąd

$$\begin{aligned} \tau_b &= \frac{\partial x_1}{\partial \theta_3} f_{1x} + \frac{\partial y_1}{\partial \theta_3} f_{1y} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta_3} f_{2x} + \frac{\partial y_2}{\partial \theta_3} f_{2y} + \frac{\partial x_3}{\partial \theta_3} f_{3x} + \frac{\partial y_3}{\partial \theta_3} f_{3y} \\ \tau_{s1} &= \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{s1}} f_{1x} + \frac{\partial y_1}{\partial \theta_{s1}} f_{1y} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta_{s1}} f_{2x} + \frac{\partial y_2}{\partial \theta_{s1}} f_{2y} + \frac{\partial x_3}{\partial \theta_{s1}} f_{3x} + \frac{\partial y_3}{\partial \theta_{s1}} f_{3y} \\ f_{s2} &= \frac{\partial x_1}{\partial s_2} f_{1x} + \frac{\partial y_1}{\partial s_2} f_{1y} + \frac{\partial x_2}{\partial s_2} f_{2x} + \frac{\partial y_2}{\partial s_2} f_{2y} + \frac{\partial x_3}{\partial s_2} f_{3x} + \frac{\partial y_3}{\partial s_2} f_{3y} \end{aligned} \quad (8.39)$$

Siły reakcji  $\mathbf{f}_e$  w punktach styku wyznacza się z warunków równowagi sił działających na chwyłany obiekt w określonym położeniu. Gdy macierz  $\mathbf{J}$  jest wyznaczona, to można obliczyć składowe wektora  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_b, \tau_{s1}, f_{s2}]^T$  wg zależności (8.39). Mając dane wartości współczynników sprężystości  $k_1$  i  $k_2$  oraz początkowe wartości  $\theta_{s10}$  i  $s_{20}$  można wyznaczyć wartości zmiennych opisujących odkształcenia sprężyn

$$\theta_{s1} = \frac{\tau_{s1}}{k_1} + \theta_{s10} \quad s_2 = \frac{f_{s2}}{k_2} + s_{20} \quad (8.40)$$

**Przykład liczbowy.** Przyjęto wymiary mechanizmu napędu palca, które podano niżej:

$l_1 = 8,2; l_2 = 60,5; l_3 = 56,5; l_4 = 10,1; l_5 = 25,5; l_6 = 27,1; l_7 = 36,7; l_8 = 40,0 \text{ mm};$   
 $\delta_1 = 76^\circ; \delta_2 = -5^\circ; \delta_3 = 23,2^\circ; \alpha_1 = 7,6^\circ; \alpha_3 = 123,1^\circ; \theta_{30} = 16,2^\circ;$

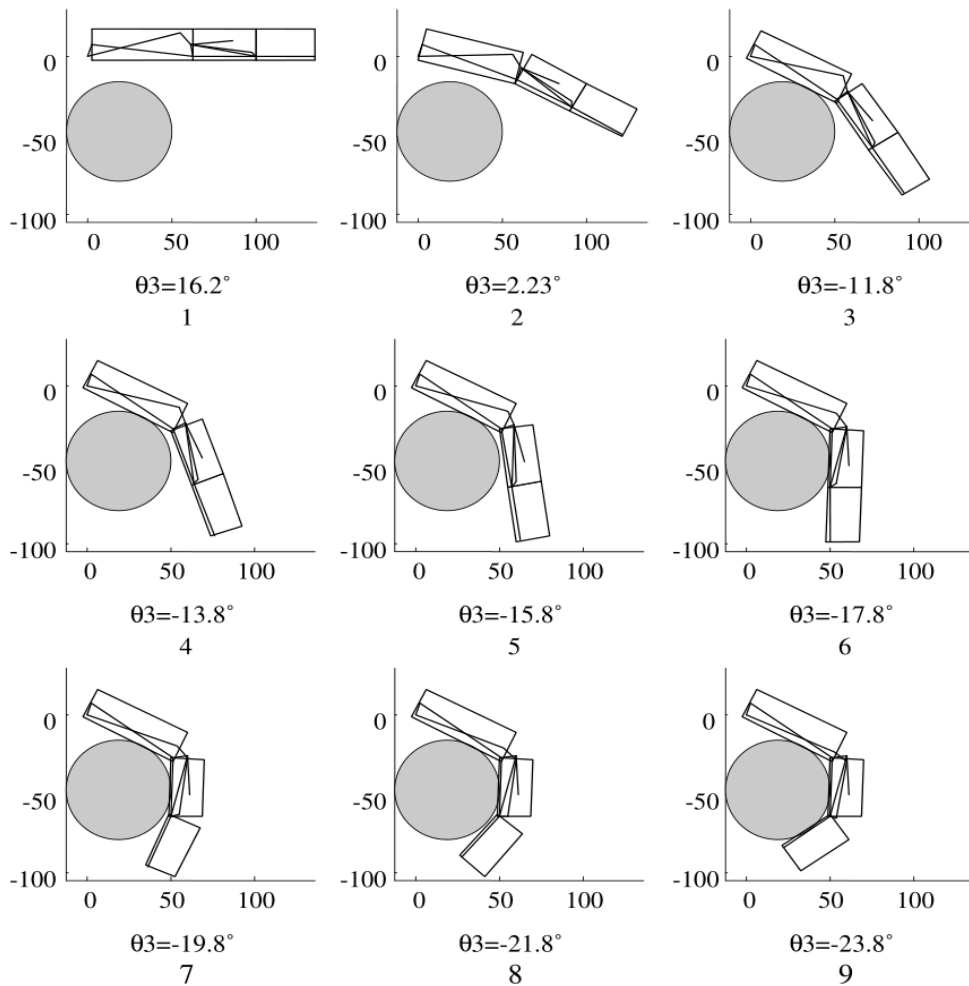
$\theta_{20} = -7,6^\circ; \theta_{60} = 0^\circ; \theta_{70} = -7,1^\circ; \theta_{80} = 123,1^\circ; \theta_{s10} = 112,0^\circ; s_{20} = 5,0 \text{ mm}$

Współczynniki sprężystości:  $k_1 = 0,077 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}; k_2 = 22 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

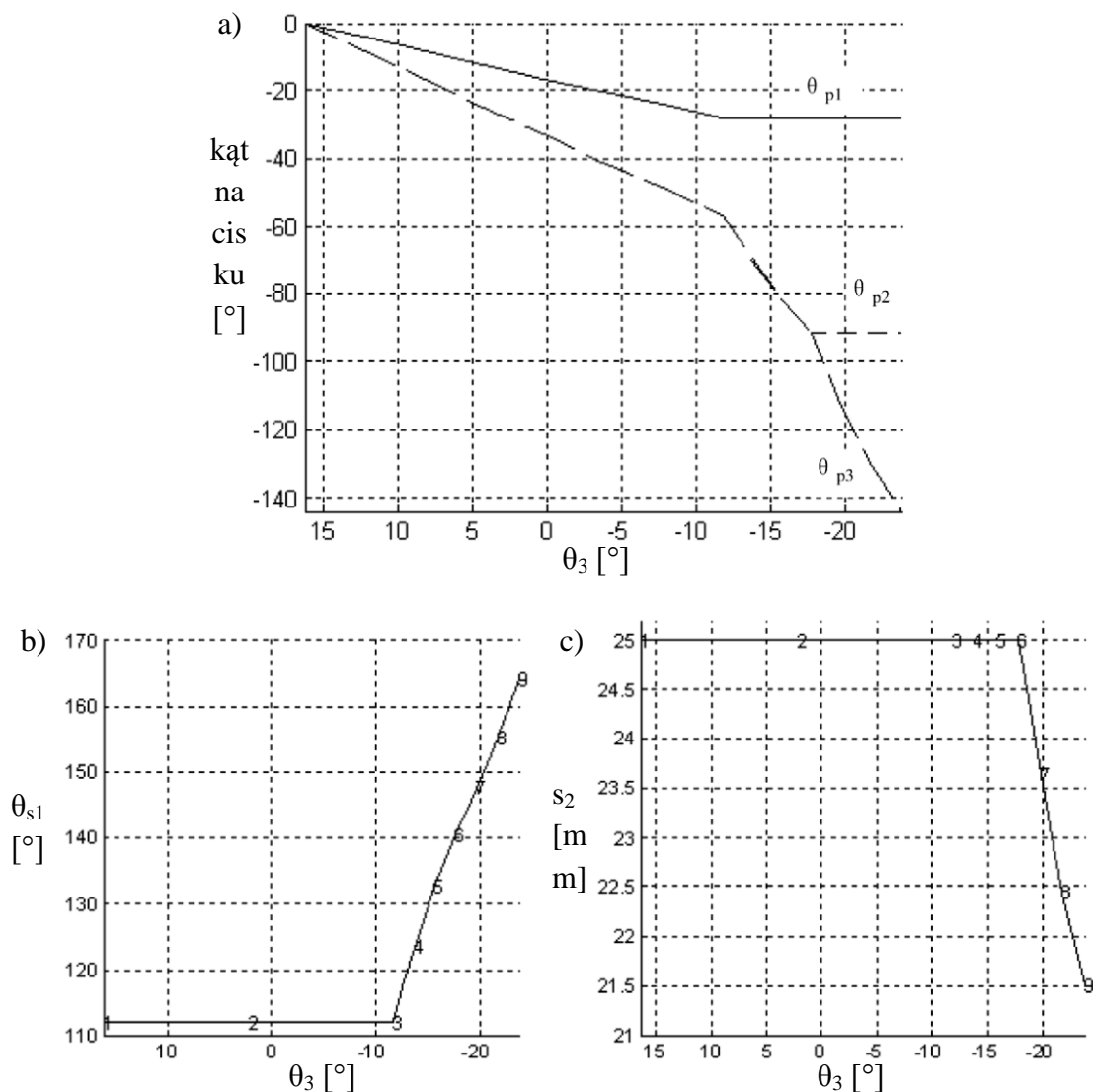
Wymiary palców:  $l_{p1} = 60; l_{p2} = 37,1; l_{p3} = 35; h_p = 20 \text{ mm}$

Promień cylindra (obiektu chwytanego) 30 mm, współrzędne środka (17,8; -46,8).

Wykorzystując przedstawiony algorytm obliczono kolejne położenia mechanizmu palca chwytaka 3-członowego, które przedstawiono na Rys. 8.17.



Rys. 8.17. Kolejne położenia członów (paliczków) palca chwytającego obiekt o kształcie cylindrycznym. (Źródło: LiCheng i in., 2009)



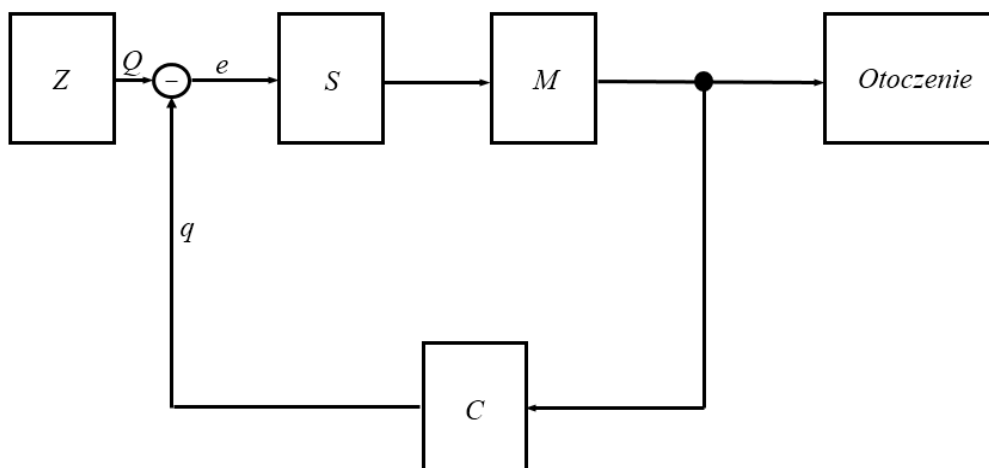
Rys. 8.18. Wyniki analizy przemieszczeń mechanizmu napędu palca chwytaka. Wykresy zależności: a) kątów nacisku  $\theta_{pi}$  ( $i = 1, 2, 3$ ); b) współrzędnej kątowej  $\theta_{s1}$  sprężyny skrętej; c) współrzędnej liniowej  $s_2$  sprężyny ściskanej, obliczone dla kolejnych wartości kąta obrotu napędu  $\theta_3$ :  $\theta_{3i} = 16,2^0; 2,23^0; -11,8^0; -13,8^0; -15,8^0; -17,8^0; -19,8^0; -21,8^0; -23,8^0$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ). (Źródło: LiCheng i in., 2009)

Na rys. 8.18 przedstawiono wyniki symulacji, które otrzymano wykorzystując podane wzory. Z rys. 18b wynika, że sprężyna liniowa 2 jest ściskana o 3,5 mm od początkowej wartości  $s_{20} = 25,0$  mm do końcowej 21,5 mm. Z rys. 18c wynika, że sprężyna kątowa 1 jest skręcana o kąt  $52^0$  od początkowej wartości  $\theta_{s10} = 112,0^0$  do  $164^0$ . Przyjmując ustalone wartości sił reakcji w punktach styku palców z obiektem równe 10 N, wg wzorów (8.37) otrzymuje się wartości momentu napędowego:  $\tau_b = 2,41$  Nm, wartości sił sprężyn:  $\tau_{s1} = 0,07$  Nm,  $f_{s2} = 76,4$  N.

# 9. Układy sterowania manipulatorów

## 9.1 Sprzężenie zwrotne i zamknięty układ sterowania

Funkcją układu sterowania, na podstawie zadanej trajektorii  $Q(t)$ , jest wyznaczenie takich sygnałów sterujących siłownikami manipulatora, które umożliwiają jej realizację. Najczęściej sygnały te są obliczane przy użyciu informacji pochodzącej z czujników sprzężenia zwrotnego. Typowy układ sterowania położeniami członów manipulatora przedstawiono na rys. 9.1, na którym przyjęto następujące oznaczenia:  $Z$  – zadajnik podający wartość konfiguracji odniesienia  $Q$ ,  $S$  – układ sterowania (sterownik),  $M$  – manipulator,  $q$  – rzeczywista konfiguracja, jaką przyjmuje manipulator,  $C$  – zespół czujników pomiarowych położenia i prędkości,  $e$  – różnica między konfiguracją odniesienia a konfiguracją rzeczywistą (błąd regulacji).



Rys. 9.1. Typowy układ sterowania manipulatorem, oznaczenia:  $Z$  – zadajnik podający wartość konfiguracji odniesienia  $Q$ ,  $S$  – układ sterowania (sterownik),  $M$  – manipulator,  $q$  – rzeczywista konfiguracja, jaką przyjmuje manipulator,  $C$  – zespół czujników pomiarowych położenia i prędkości uogólnionych,  $e$  – różnica między konfiguracją odniesienia a konfiguracją rzeczywistą (błąd regulacji).

Różnice występujące między konfiguracjami odniesienia i rzeczywistymi są wywołane przez trudne do przewidzenia wpływy zakłóceń działających na manipulator w trakcie jego ruchu. Szczególnie trudne jest uwzględnienie wpływu różnych rodzajów tarcia występującego w łożyskach siłowników, ponieważ nie są dokładnie znane modele opisujące to zjawisko. Rozpatrując sterowanie manipulatorem jako zadanie planowania trajektorii ruchu, rozróżnia się trzy przypadki:

1. Sterowanie ruchem poszczególnych członów manipulatora (lokalne):

- sterowanie serwomechanizmów,

- sterowanie metodą kompensacji momentów,
- sterowanie czasowo-optymalne,
- sterowanie ze zmienną strukturą,
- niezależne sterowanie nieliniowe ze sprzężeniem zwrotnym.

## 2. Programowe sterowanie ruchem w przestrzeni kartezjańskiej:

- sterowanie względem prędkości,
- sterowanie przyśpieszeniem,
- sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym siłowym.

## 3. Sterowanie adaptacyjne:

- sterowanie adaptacyjne z modelem odniesienia,
- samonastrajające sterowanie adaptacyjne,
- adaptacyjne sterowanie względem zakłóceń z kompensacją prostą,
- adaptacyjne sterowanie ruchem zaprogramowanym.

Poniżej omówiono tylko niektóre z podanych rodzajów sterowania.

Ruchy w połączeniach ruchowych są planowane wg zadanych trajektorii  $\theta(t)$ , a sterowane są:  $\tau$  – wektor momentów napędowych silników, obliczanych na podstawie zmierzonych współrzędnych konfiguracyjnych, przy wykorzystaniu sprzężenia zwrotnego w układzie sterowania. Równanie dynamiki manipulatora ma postać

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) \quad (9.1)$$

gdzie

$M(\theta)$  - macierz  $[n \times n]$  mas manipulatora,

$V(\theta, \dot{\theta})$  - wektor  $[n \times 1]$  sił odśrodkowych i sił Coriolisa;

$G(\theta)$  - wektor  $[n \times 1]$  sił grawitacji,

$\dot{\theta}, \ddot{\theta}$  - wektory prędkości i przyśpieszeń obliczanych wg zadanej trajektorii.

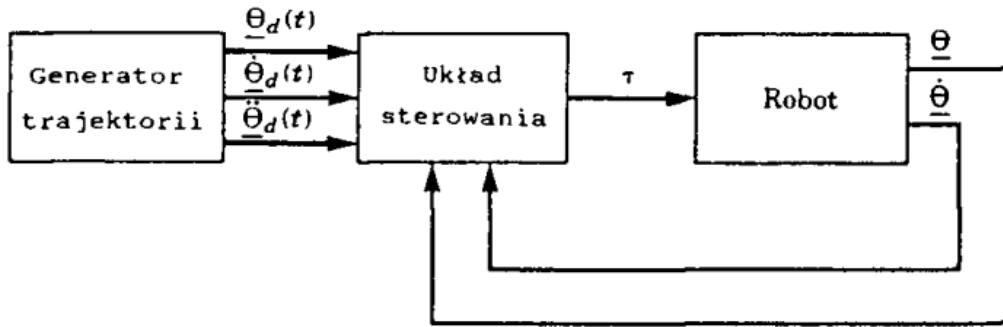
Układ sterowania wyznacza sygnały sterujące siłownikami manipulatora, które są wymagane do realizacji pożądanego trajektorii. Sygnały te są obliczane przy wykorzystaniu informacji pochodzącej z czujników sprzężenia zwrotnego. Występują różnice między konfiguracjami odniesienia i rzeczywistymi, wynikające z zakłóceń działających na manipulator, np. skutek tarcia w łożyskach siłowników.

Uchyb jako różnica między przemieszczeniem pożądanym ( $\theta_d$ ) i aktualnym ( $\theta$ ) oraz podobnie, między prędkością pożądaną ( $\dot{\theta}_d$ ) i aktualną ( $\dot{\theta}$ )

$$E = \theta_d - \theta; \quad \dot{E} = \dot{\theta}_d - \dot{\theta} \quad (9.2)$$

W układzie sterowania obliczana jest wartość wymaganego momentu napędowego, rozwijanego przez silnik, w funkcji uchybu. Celem jest zmniejszenie uchybu. Układ sterowania wykorzystujący sprzężenie zwrotne nazywa się układem zamkniętym (rys. 9.2).





Rys. 9.2. Schemat blokowy układu sterowania robota.

Podstawowym kryterium sterowania jest stabilność układu. Układ jest stabilny, jeśli uchyb pozostaje mały nawet przy występowaniu umiarkowanych zakłóceń. Sprawdzenie stabilności i poprawności działania układu zamkniętego przeprowadza się, wykorzystując model matematyczny prostego układu mechanicznego, złożonego z ciała o masie  $m$  i sprężyny o sztywności  $k$ . Przyjęto siłę tarcia jako proporcjonalną do prędkości masy, przy współczynniku  $b$ . Warunek równowagi sił działających na masę prowadzi do równania ruchu w postaci

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (9.3)$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Jego rozwiązaniem jest funkcja  $x(t)$  określająca ruch masy  $m$ . Rozwiązanie jest zależne od warunków początkowych położenia i prędkości.

Ten prosty układ mechaniczny wykorzystano jako przykład, na którym przedstawiono podstawowe pojęcia dotyczące układu sterowania. Można przewidywać kilka różnych zachowań układu. Na przykład w przypadku bardzo słabej sprężyny (małej wartości  $k$ ) i znacznego tarcia (dużej wartości  $b$ ) można wyobrazić sobie, że masa wytrącona z położenia równowagi będzie wracać do położenia równowagi bardzo powoli. Jednak w przypadku bardzo sztywnej sprężyny i przy małym tarcu masa może oscylować wiele razy, zanim zatrzyma się.

Z analizy równań różniczkowych wynika, że postać rozwiązania równania (9.3) zależy od pierwiastków jego równania charakterystycznego

$$ms^2 + bs + k = 0 \quad (9.4)$$

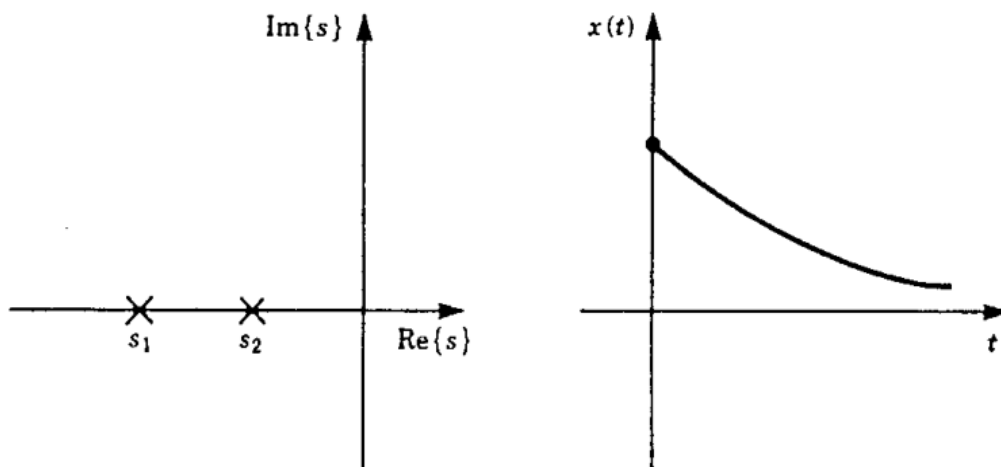
które są następujące

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad (9.5)$$

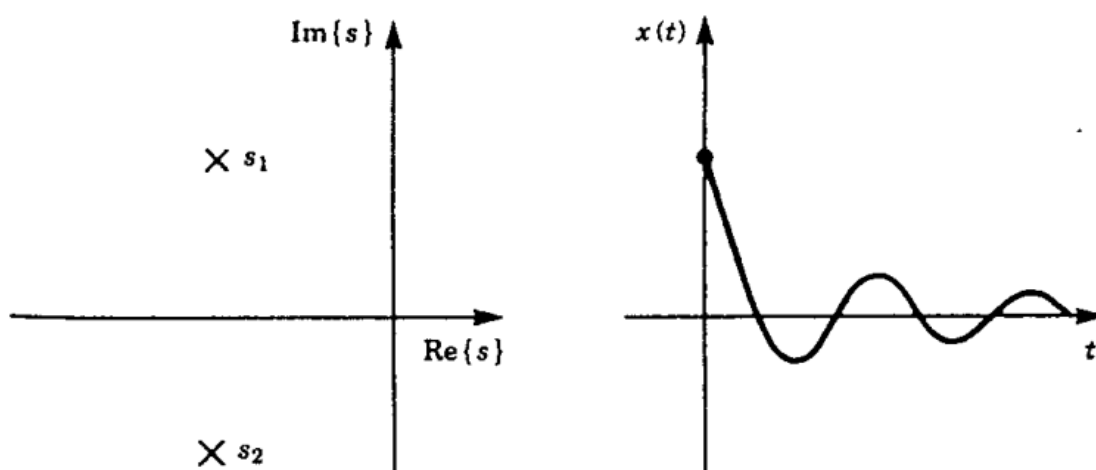
Położenie pierwiastków (9.5) na płaszczyźnie liczb zespolonych określa naturę układu. Jeśli oba pierwiastki są liczbami rzeczywistymi, układ nie wykazuje oscylacji. Jeśli są liczbami zespolonymi (tj. mają składnik urojony), to zachowanie układu jest

oscylacyjne. Jeśli włączy się przypadek graniczny między tymi dwoma, to otrzyma się trzy klasy odpowiedzi analizowanego układu:

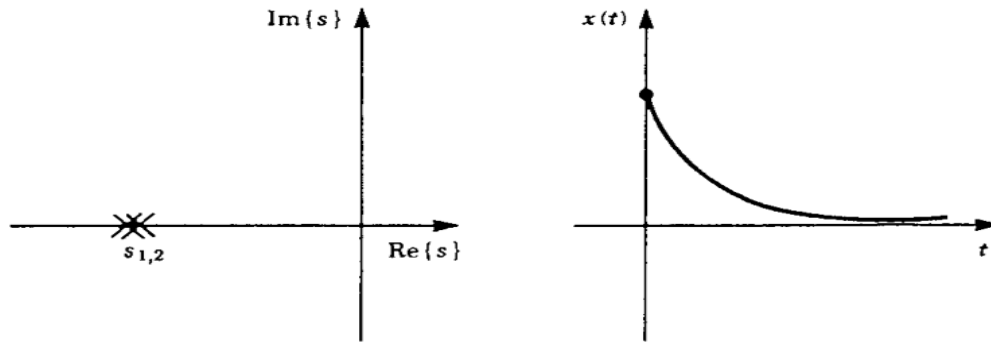
1. Pierwiastki rzeczywiste i różne, gdy  $b^2 > 4mk$ ; tzn. przeważa tarcie i układ wolno powraca do położenia równowagi. Taki przypadek nazywa się tłumieniem nadkrytycznym (rys. 9.3).
2. Pierwiastki zespolone, gdy  $b^2 < 4mk$ ; tzn. przeważa sprężystość i układ wykazuje zachowanie oscylacyjne. Taki przypadek nazywa się tłumieniem podkrytycznym (rys. 9.4).
3. Pierwiastki rzeczywiste i równe, gdy  $b^2 = 4mk$ ; tzn. tarcie i sprężystość są zrównoważone, powodując możliwie najszybszą i nieoscylacyjną odpowiedź układu. Ten przypadek określa tłumienie krytyczne (rys. 9.5).



Rys. 9.3. Położenie pierwiastków i odpowiedź układu z tłumieniem nadkrytycznym.



Rys. 9.4. Położenie pierwiastków i odpowiedź układu z tłumieniem podkrytycznym.



Rys. 9.5. Położenie pierwiastków i odpowiedź układu z tłumieniem krytycznym.

Trzeci przypadek (tłumienia krytycznego) określa się jako pożądany, ponieważ układ „zeruje” niezerowe warunki początkowe i bez oscylacji powraca do położenia nominalnego tak szybko, jak to jest możliwe.

## 9.2 Sterowanie układem drugiego rzędu

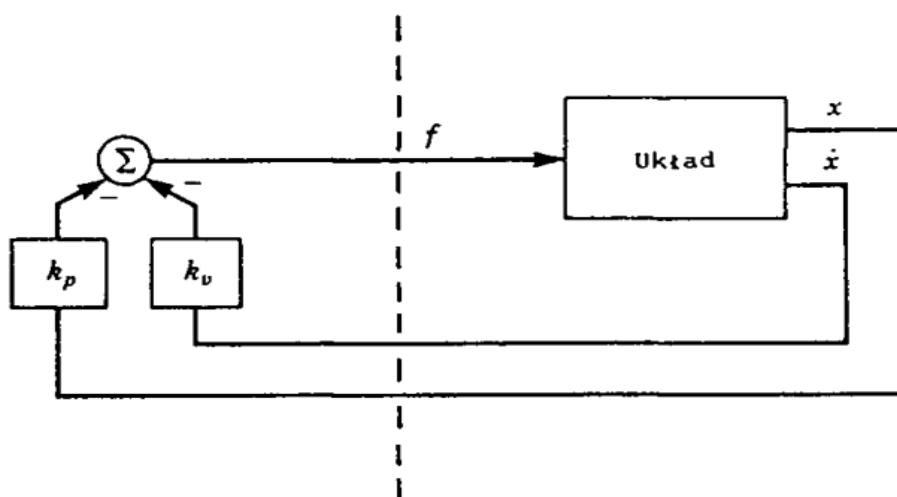
Jeżeli pominiemy sprężystość ( $k = 0$ ), to układ nie wraca do położenia początkowego po wytrąceniu go z równowagi. Jednak dzięki odpowiedniemu wykorzystaniu czujników, silnika i układu sterowania można zmieniać właściwości układu w pożądany sposób.

Tłumiony układ drgający z masą, sprężyną i dodatkowym siłownikiem opisuje równanie

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = f \quad (9.6)$$

$f$  - siła napędowa jako funkcja sprzężenia zwrotnego siłownika (prawo sterowania)

$$f = -k_p x - k_v \dot{x} \quad (9.7)$$



Rys. 9.6. Układ sterowania typu zamkniętego. Komputer sterujący (na lewo od linii przerywanej) odczytuje sygnały wejściowe przekazywane z czujnika i wysyła rozkazy wyjściowe do siłownika. (Źródło: Craig, 1993)

Na rys. 9.6 przedstawiono schemat blokowy układu zamkniętego, przy czym część po lewej stronie linii przerywanej jest układem sterowania, a część po prawej stronie jest układem fizycznym. Układ sterowania jest układem pozycjonowania, usiłującym utrzymać ustaloną pozycję bez względu na działające siły zakłócające.

Przyrównując równanie dynamiki układu otwartego (9.3) do prawa sterowania otrzymujemy równanie dynamiki układu zamkniętego

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = 0 \quad (9.8)$$

gdzie:

$$b = b + k_v ; k = k + k_p$$

Przez odpowiedni dobór współczynników wzmocnienia układu sterowania ( $k_v$  i  $k_p$ ) można spowodować, aby układ wykazywał określone właściwości, np. tłumienie krytyczne (tzn.  $b = 2\sqrt{mk}$ ) i pożądaną sztywność zamkniętej pętli daną przez  $k$ .

Jeśli wartości  $b$  lub  $k$  będą ujemne, to układ sterowania może być niestabilny, uchyb ma tendencję do powiększania się.

### 9.3 Rozdzielenie prawa sterowania

Układ sterowania można podzielić na część modelową i część sprzężoną, przyjmując rozdzielenie prawa sterowania. W równaniu ruchu układu otwartego (9.6) przyjęto modelową część prawa sterowania w postaci

$$f = \alpha f' + \beta \quad (9.9)$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  oznaczają funkcje lub stałe, dobierane tak, aby  $f'$  pełniło rolę nowego wejścia do układu, w którym masa jest jednostkowa. Dla układu o takiej strukturze prawo sterowania ma postać

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = \alpha f' + \beta \quad (9.10)$$

Aby układ modelował ruch masy jednostkowej przy wymuszeniu  $f'$ , to dobiera się

$$\alpha = m, \quad \beta = b \dot{x} + k x \quad (9.11)$$

Podstawiając zależności (9.11) do (9.10) otrzymuje się równanie

$$\ddot{x} = f' \quad (9.12)$$

Jest to równanie masy jednostkowej, które przyjmuje się jako równanie dynamiki otwartego układu sterowania, przy czym

$$f' = -k_p x - k_v \dot{x} \quad (9.13)$$

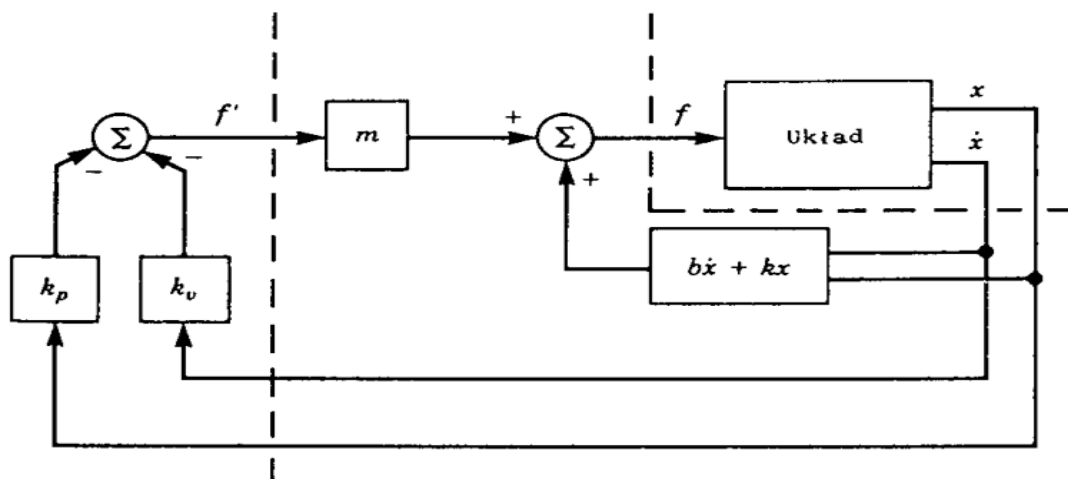
Połączenie tego prawa sterowania z równaniem (9.12) daje

$$\ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x = 0 \quad (9.14)$$

Tłumienie krytyczne określa zależność

$$k_v = 2\sqrt{k_p} \quad (9.15)$$

Na rys. 9.7 pokazano schemat blokowy układu sterowania, w którym wykorzystano metodę rozdzielenia prawa sterowania.



Rys. 9.7. Zamknięty układ sterowania wykorzystujący rozdzielone prawo sterowania.

## 9.4 Sterowanie nadążne

Trajektorię podaje się zwykle w postaci funkcji czasu  $x_d(t)$ , określającej pożądaną pozycję członu roboczego. Przyjmuje się, że trajektoria jest gładka (co oznacza, że istnieją pierwsze dwie pochodne) i że nasz generator trajektorii dostarcza  $x_d, \dot{x}_d, \ddot{x}_d$  w każdej chwili czasu  $t$ . Zdefiniowano uchyb między pożądaną i aktualną trajektorią jako

$$e = x_d - x$$

Prawo sterowania, zapewniające ruch zgodny z zadana trajektorią jest następujące

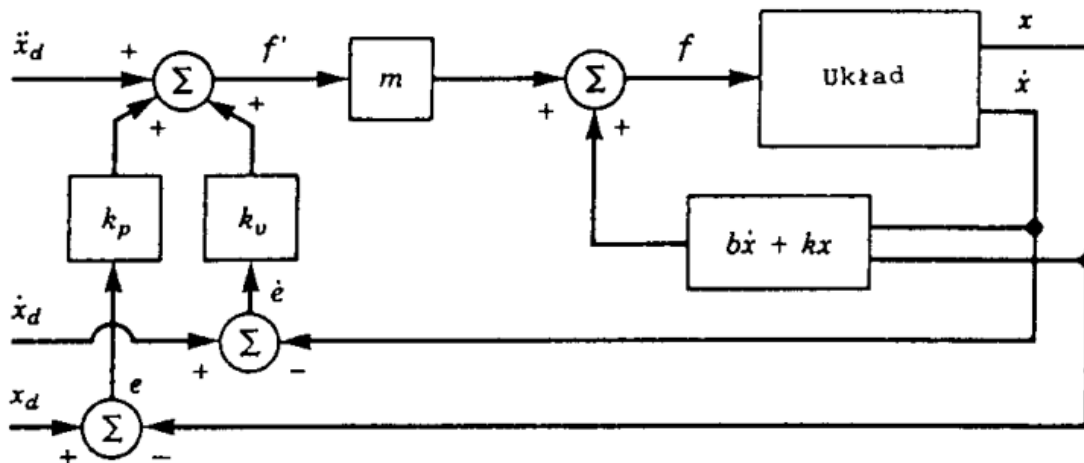
$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (9.16)$$

Połączenie równania (9.16) z równaniem masy jednostkowej (9.12) prowadzi do

$$\ddot{x} = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (9.17)$$

$$\text{lub } \ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0 \quad (9.18)$$

W tym równaniu różniczkowym drugiego rzędu można tak dobrać współczynniki, aby uzyskać określoną odpowiedź układu (często z tłumieniem krytycznym). Takie równanie nazywa się równaniem stanu w przestrzeni uchybu, ponieważ opisuje zmiany uchybu względem pożądanego trajektorii. Na rys. 9.8 pokazano schemat blokowy nadążnego układu sterowania.



Rys. 9.8. Sterownik nadążnego układu sterowania dla zadanej trajektorii. (Źródło: Craig, 1993)

Jeśli znane są dokładne wartości parametrów modelu  $(m, b, k)$ , a nie występują zakłócenia i nie ma uchybu początkowego, to ruch członu będzie dokładnie zgodny z pożądaną trajektorią. Jeśli wystąpi uchyb początkowy, to zostanie wyzerowany zgodnie z równaniem (9.18) i układ nadążny będzie dokładnie realizował zadaną trajektorię.

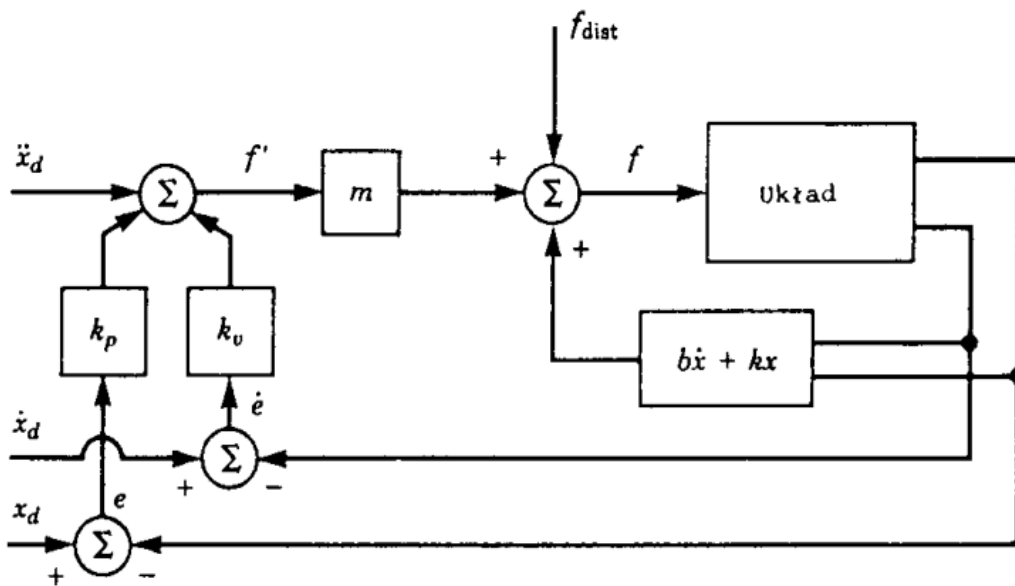
Jednym z zadań sterowania jest eliminowanie zakłóceń, czyli utrzymywanie prawidłowego funkcjonowania (małych błędów) nawet przy występowaniu pewnych zakłóceń zewnętrznych. Na rys. 9.9 pokazano nadążny układ sterowania z dodatkowym wejściem siły zakłócającej  $f_{zakł}$ . Analiza układu o zamkniętej pętli prowadzi do równani uchybu

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = f_{zakł} \quad (9.19)$$

Równanie (9.19) jest równaniem różniczkowym z funkcją wymuszenia po prawej stronie. Jeśli  $f_{zakł}$  jest ograniczona, to znaczy że istnieje stała o wartości  $a$ , że

$$\max_t f_{zakł}(t) < a \quad (9.20)$$

Wtedy rozwiązanie równania różniczkowego  $e(t)$  jest również ograniczone. Stabilne układy liniowe o podanej wyżej właściwości określa się jako układy „ograniczone wejście, ograniczone wyjście”. Właściwość ta zapewnia stabilność układu dla szerokiej klasy możliwych zakłóceń.



Rys. 9.9. Nadążny układ sterowania poddany działaniu zakłóceń. (Źródło: Craig, 1993)

W przypadku zakłócenia ustalonego ( $f_{zakł} = const.$ ) układ pozostaje w spoczynku (tzn. pochodne wszystkich zmiennych układu są równe zero). Przyrównując do zera pochodne występujące w równaniu (9.19) otrzymuje się równanie stanu ustalonego

$$k_p e = f_{zakł} \quad (9.21)$$

$$\text{stąd } e = f_{zakł} / k_p \quad (9.22)$$

Wartość  $e$  dana zależnością (9.22) określa błąd w stanie ustalonym. Zatem przy większych wartościach współczynnika  $k_p$  błąd w stanie ustalonym będzie mniejszy.

W celu wyeliminowania błędu w stanie ustalonym stosuje się zmodyfikowane prawo sterowania. Modyfikacja polega na wprowadzeniu wyrazu całkowego do prawa sterowania

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt \quad (9.23)$$

Co daje w wyniku równanie uchybu

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e + k_i \int e dt = f_{zakł} \quad (9.24)$$

Wyraz całkowy dodaje się tak, aby układ nie wykazywał błędu w stanie ustalonym przy występowaniu stałych zakłóceń. Wartość  $k_i$  przyjmuje się jako małą. Prawo sterowania o postaci (9.24) jest nazywane prawem sterowania regulatorem PID (proporcjonalno-całkowo-różniczkowym).

W rozpatrywanych tutaj układach sterowania przyjęto, że komputer sterujący wykonuje obliczenia prawa sterowania nieskończenie szybko, tak że wartość siły siłownika  $f$  jest ciągłą funkcją czasu. W rzeczywistości obliczenia wymagają pewnego czasu i dlatego wynikowa siła napędowa jest dyskretna funkcją „schodkową”. Jeśli

częstość obliczeń nowych wartości  $f$  jest znacznie wyższa od częstości drgań własnych układu sterowanego, to przyjęte przybliżenie jest wystarczające.

Częstość wejściowych sygnałów odniesienia określa dolną granicę częstości próbkowania (reagowania), która powinna być co najmniej dwa razy wyższa od częstości wejściowych sygnałów odniesienia.

Przy eliminowaniu zakłóceń podaje się górne ograniczenie funkcjonowania systemu jako funkcję czasu. Jeśli wzorcowy okres jest dłuższy od czasu korelacji efektów zakłócających, wtedy te zakłócenia nie będą stłumione. Praktycznie przyjmuje się, że okres próbkowania powinien być 10 razy krótszy od czasu korelacji zakłóceń.

Wszystkie rzeczywiste mechanizmy wykazują skończoną sztywność i dlatego mogą w nich występować drgania. Jeśli ważne jest tłumienie tych drgań, to częstość próbkowania powinna być co najmniej 2-krotnie większa od częstości drgań własnych (rezonansowych).

## 9.5 Sterowanie robota przemysłowego

Układ sterowania robota PUMA 560 ma strukturę hierarchiczną, dwupoziomową z komputerem sterującym LSI-11 (DEC), który przekazuje rozkazy do 6 mikro-procesorów Rockwell 6503, sterujących wg prawa sterowania PID. Każda para obrotowa jest wyposażona w przyrostowy enkoder optyczny. Enkodery optyczne są przyłączone do wskaźników położenia, z których mikroprocesory odczytują bieżącą współrzędną. Współrzędne wewnętrzne są różniczkowane w kolejnych przedziałach czasowych w celu otrzymania przybliżonych wartości prędkości w połączeniach obrotowych.

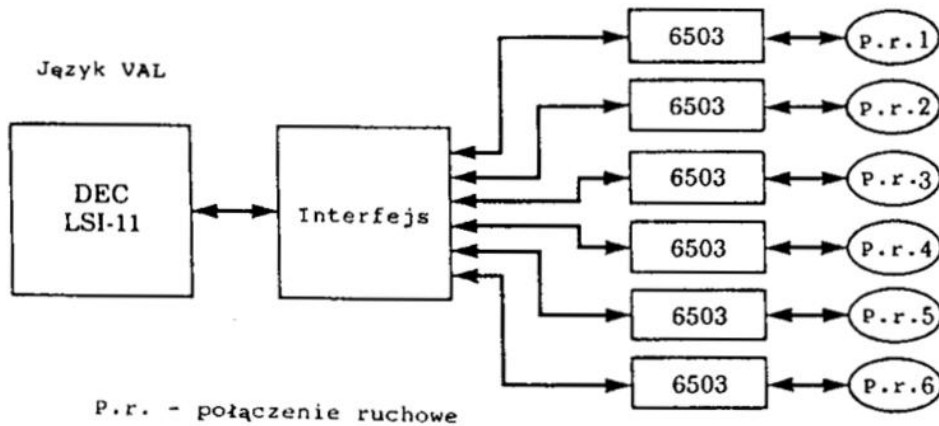
Do sterowania momentami obrotowymi silników prądu stałego służy mikroprocesor z przyłączonymi przetwornikami cyfrowo-analogowymi (DAC), umożliwiającymi wykorzystanie pętli sterowania. Prąd przepływający przez silnik jest sterowany w obwodzie analogowym przez nastawianie napięcia przyłożonego do twornika tak, aby utrzymać pożądany prąd twornika.

Co 28 milisekund komputer LSI-11 zadaje nową pozycję mikroprocesorom sterującym, które działają w cyklu 0,875 ms. W tym czasie interpolują pożądane położenie, obliczają uchyb, wykonują obliczenia dla prawa sterowania PID i zadają nową wartość momentów obrotowych silników.

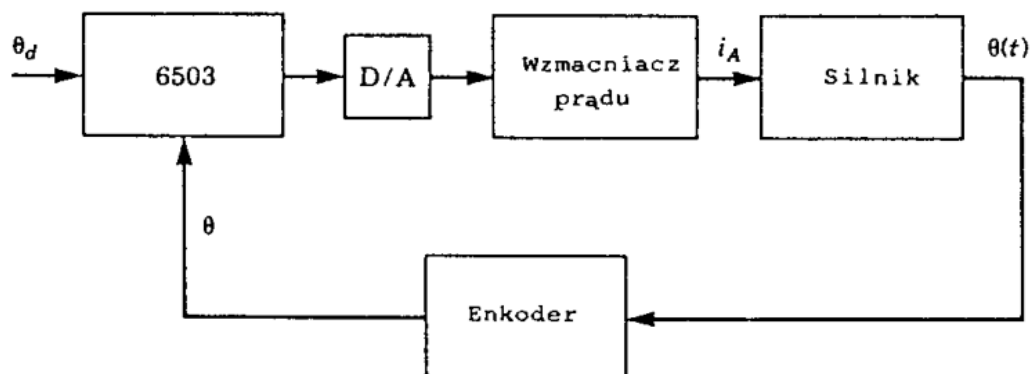
Komputer sterujący wykonuje wszystkie operacje na „wyższym poziomie” układu sterowania. Przede wszystkim zajmuje się interpretacją rozkazów programowych, krok po kroku. Gdy interpretowany jest rozkaz ruchu, komputer musi wykonać wszystkie potrzebne obliczenia zadania odwrotnego, zaplanować pożądaną trajektorię i zacząć generowanie trajektorii punktów pośrednich (co 28 milisekund) dla sterowników połączeń obrotowych.



Komputer jest także przyłączany do standardowych urządzeń peryferyjnych, jak np. terminal i stacja dysków. Układ sterowania robota pozwala użytkownikowi programować ruchy przyrostowo we współrzędnych konfiguracyjnych lub kartezyjskich za pomocą programatora klawiaturowego.



Rys. 9.10. Układ sterowania robota PUMA 560 za pomocą komputera DEC. Oznaczenia: p.r. – połączenie ruchowe; 6503 – mikro-procesor. (Źródło: Craig, 1993)



Rys. 9.11. Bloki funkcjonalne układu sterowania parą obrotowa robota PUMA 560. (Źródło: Craig, 1993)

Mikroprocesor 6503 wykonuje

- sterowanie momentem obrotowym silnika za pośrednictwem przetwornika cyfrowo-analogowego (D/A) w cyklu 0,875 ms,
- interpoluje pożądane położenie, oblicza uchyb, prawo sterowania PID i zadaje nową wartość momentu obrotowego silnika.

Komputer LSI-11 wykonuje:

- obliczenia zadania odwrotnego kinematyki,

- planowanie pożądanego trajektorii i generowanie punktów pośrednich (co 28 ms) dla sterowników par obrotowych,
- jest także przyłączany do standardowych urządzeń peryferyjnych jako terminal.

Dodatkowo przyłączany jest uczący programator klawiaturowy (ręczny programator), pozwalający operatorowi poruszać robotem na różne sposoby, np. programować ruchy przyrostowo we współrzędnych konfiguracyjnych lub kartezyjskich. Za pomocą programatora klawiszowego wywołuje się obliczanie trajektorii „w biegu” przez mikroprocesory sterujące oraz zapisywanie jej w pamięci.

## 9.6 Nieliniowe układy sterowania manipulatora

Liniowe układy sterowania wykorzystują przybliżenie, że każde połączenie ruchowe może być rozpatrywane niezależnie (oddzielnie), a momenty bezwładności zredukowane do osi obrotu silników napędowych są stałe. Przy takich założeniach model manipulatora opisuje  $n$  niezależnych równań różniczkowych drugiego rzędu, liniowych o stałych współczynnikach. Dla układów, których parametry zmieniają się w czasie, lub układów, które z natury są nieliniowe, rozwiązanie jest trudniejsze.

Gdy nieliniowości są niewielkie, to można zastosować lokalną linearyzację w sąsiedztwie punktu pracy. Jeśli manipulator wykonuje ruch między oddalonymi punktami, to linearyzacja dla całego zakresu ruchu może być niedokładna. Należałoby rozważyć bardziej złożone prawa sterowania o zmiennych w czasie współczynnikach wzmacnienia, jako funkcje położenia ciała, zapewniające ustalone tłumienie krytyczne układu.

Rozważono manipulator zawierający jeden człon i jedno połączenie obrotowe, tzw. odwrócone wahadło fizyczne. Przyjęto, że  $m$  - masa członu jest skupiona w jego punkcie końcowym, a moment bezwładności wynosi  $ml^2$ . W układzie występuje tarcie Coulomba i tarcie wiskotyczne w połączeniu obrotowym oraz obciążenie ciężarem własnym. Model manipulatora jest opisany równaniem

$$\tau = ml^2\ddot{\theta} + k_v\dot{\theta} + k_c\text{sign}\dot{\theta} + mlg \cos\theta \quad (9.25)$$

Układ sterowania ma dwie części: linearyzującą część modelową i część sprzężoną. Część modelowa prawa sterowania jest opisana zależnością

$$f = \alpha f' + \beta \quad (9.26)$$

gdzie

$$\alpha = ml^2$$

$$\beta = k_v\dot{\theta} + k_c\text{sign}\dot{\theta} + mlg \cos\theta$$

Część sprzężona jest wyrażona wzorem

$$f' = \ddot{\theta}_d + k_v \dot{e} + k_p e$$

Przy czym współczynniki wzmocnienia są obliczane na podstawie pożądanych warunków działania układu.

Ogólna metoda wykorzystana w zadaniu sterowania manipulatora obejmuje:

1. Obliczenie nieliniowej modelowej części prawa sterowania, która likwiduje nieliniowości układu sterowanego.
2. Redukowanie układu do liniowego, który może być sterowany za pomocą prostej sprzężonej części prawa sterowania, wyprowadzonej dla masy jednostkowej.

W pewnym sensie linearyzujące prawo sterowania wprowadza model odwrotny układu sterowanego. Nieliniowości w układzie usuwają nieliniowości w modelu odwrotnym, a to wraz ze sprzężoną częścią prawa sterowania daje w wyniku zamknięty układ liniowy.

### 9.6.1 Wielowejsciowe i wielowyjściowe układy sterowania

Układ sterowania manipulatora jest wielowejsciowy i wielowyjściowy (MIMO). Oznacza to, że na wejściu występuje wektor pożądanych położeń, prędkości i przyspieszeń w połączeniach ruchowych. Prawo sterowania służy do obliczania wektora sygnałów sterujących silnikami napędowymi. Podstawowy schemat rozdzielonego prawa sterowania, zawierający część modelową i część sprzężoną przyjmuje postać macierzowo-wektorową

$$f = \alpha f' + \beta \tag{9.27}$$

gdzie dla układu o  $n$  stopniach swobody  $f$ ,  $f'$  i  $\beta$  oznaczają wektory ( $n \times 1$ ),  $\alpha$  – macierz ( $n \times n$ ), która nie musi być diagonalna, a jest dobierana tak, aby rozdzielić zmienne w  $n$  równaniach ruchu. Jeśli  $\alpha$  i  $\beta$  są prawidłowo dobrane, wtedy dla dla funkcji wejściowej  $f'$  układ staje się układem  $n$  niezależnych mas jednostkowych. Stąd w przypadku wielowymiarowym część modelowa prawa sterowania jest określana jako linearyzujące i rozdzielające prawo sterowania. Prawo sprzężeniowe dla układu wielowymiarowego przyjmuje postać

$$f' = \ddot{x}_d + K_v \dot{e} + K_p e \tag{9.28}$$

gdzie  $K_v$  i  $K_p$  oznaczają macierze ( $n \times n$ ), które na ogół są dobierane jako diagonalne o stałych współczynnikach wzmocnienia na przekątnej, natomiast  $\dot{e}$  i  $e$  oznaczają wektory ( $n \times 1$ ) błędów położenia i prędkości.

### 9.6.2 Zadanie sterowania manipulatora

Wcześniej podano model i odpowiednie równania ruchu służące do realizacji sterowania manipulatora. Dynamika ruchu manipulatora jest opisana w postaci

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) \quad (9.29)$$

gdzie

$\tau$  oznacza wektor sił/momentów sił napędowych w połączeniach ruchowych,

$M(\theta)$  oznacza macierz ( $n \times n$ ) bezwładności manipulatora,

$V(\theta, \dot{\theta})$  – wektor ( $n \times 1$ ) momentów/sił odśrodkowych i Coriolisa,

$G(\theta)$  – wektor ( $n \times 1$ ) sił grawitacji.

Każdy element macierzy  $M(\theta)$  i wektora  $G(\theta)$  jest złożoną funkcją  $\theta$  – wektora współrzędnych konfiguracyjnych wszystkich połączeń ruchowych manipulatora. Każdy element  $V(\theta, \dot{\theta})$  jest złożoną funkcją zarówno  $\theta$  jak i  $\dot{\theta}$ .

Dodatkowo można uwzględnić model tarcia lub inne efekty. Przy założeniu, że model tarcia jest wyrażony funkcją przemieszczeń i prędkości względnych w połączeniach ruchowych. Wtedy do prawej strony równania (9.29) dodaje się wyraz  $F(\theta, \dot{\theta})$  aby otrzymać model opisany równaniem

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) \quad (9.30)$$

Zadanie sterowania złożonego układu, opisanego równaniem (9.30), może być zrealizowane przez rozdzielony sterownik, którego schemat wprowadzono tutaj.

$$\tau = \alpha \tau' + \beta \quad (9.31)$$

gdzie

$\tau$  oznacza wektor ( $n \times 1$ ) momentów/sił odśrodkowych

$$\alpha = M(\theta)$$

$$\beta = V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta}) \quad (9.32)$$

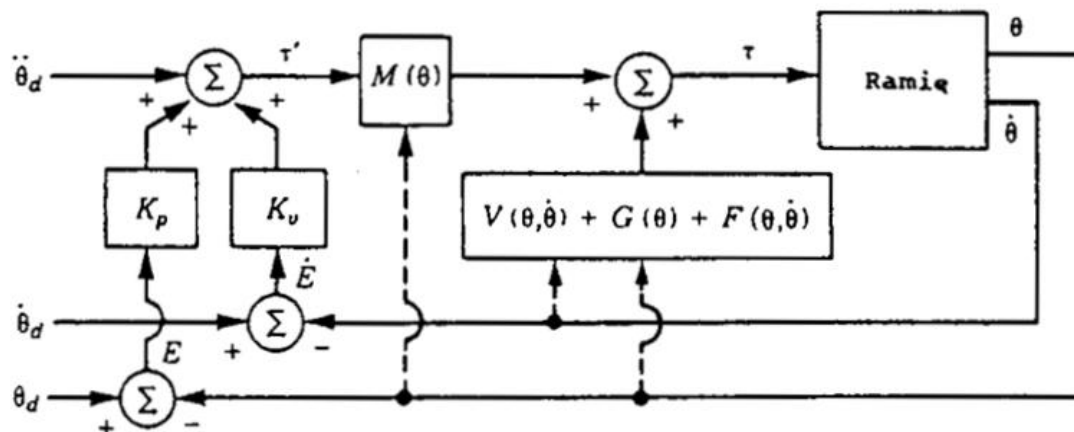
Przyjęto prawo sprzężenia

$$\tau' = \ddot{\theta}_d + K_v \dot{e} + K_p e \quad (9.33)$$

gdzie

$$e = \theta_d - \theta \quad (9.33a)$$

Tak opisany układ sterowania pokazano na rys. 9.12.



Rys. 9.12. Układ sterowania robota oparty na opisanym modelu. (Źródło: Craig, 1993)

Stosując zależności (9.30) – (9.33) można wykazać, że układ zamknięty jest opisany przez równanie uchybu w postaci

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = 0 \quad (9.34)$$

Równanie (9.34) jest równaniem wektorowym o zmiennych rozdzielonych, ponieważ macierze  $K_v$  i  $K_p$  są diagonalne. Zatem równanie to dla każdego połączenia ruchowego można zapisać w postaci

$$\ddot{e}_i + k_{vi} \dot{e}_i + k_{pi} e_i = 0 \quad (9.35)$$

Idealne działanie układu sterowania, podane równaniem (9.34) jest nieosiągalne w praktyce z różnych przyczyn, z których najważniejszymi są:

1. Dyskretna forma obliczeń komputerowych w przeciwieństwie do idealnego, ciągłego w czasie prawa sterowania, ujętego postaci (9.32) i (9.33).
2. Niedokładności w modelu manipulatora, wykorzystanego do obliczeń wg zależności (9.33a).

### 9.6.3 Rozważania praktyczne

W rozważaniach dotyczących strategii rozdzielonego prawa sterowania przyjęto, że cały układ działa w sposób ciągły, a obliczenia obejmujące prawo sterowania nie wymagają żadnego czasu. Równania dynamiki (9.31) – (9.33) muszą być rozwiązane zgodnie z prawem sterowania. Obliczenia te są dość skomplikowane. Prawie wszystkie układy sterowania manipulatorów są wykonane w technice cyfrowej

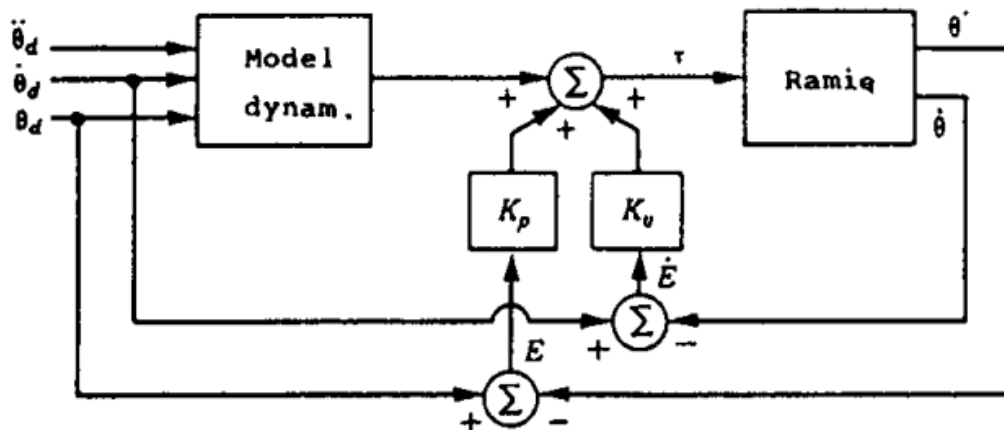
i działają z pewną częstością próbkowania, tzn wskazania czujników mierzących położenia są odczytywane w dyskretnych chwilach czasu. Na podstawie odczytanych wartości sygnał sterujący jest obliczany i wysyłany do silnika. Zatem odczyty czujników i wysyłanie sygnałów do silników nie są wykonywane w sposób ciągły, lecz ze skończoną częstością próbkowania. Aby uwzględnić efekt opóźnienia wywołany czasem obliczeń i skończoną częstością próbkowania, trzeba użyć narzędzi z zakresu sterowania czasowo-dyskretnego.

W dyskretnych chwilach czasu równania różniczkowe przekształca się w równania różnicowe, a do rozważania problemu stabilności i położenia biegunów takich układów wykorzystuje się odrębne narzędzia do rozwiązania zagadnień dotyczących układów czasowo-dyskretnych.

Chociaż daje się wyprowadzić skomplikowane różniczkowe równanie ruchu manipulatora, to czasowo-dyskretny równoważnik jest na ogół niemożliwy do otrzymania. Jest tak, ponieważ rozwiązanie równań ruchu przy danych warunkach początkowych, funkcji wejścia i pewnego skończonego przyrostu, jest całkowanie numeryczne. Przyjmuje się, że obliczenia mogą być wykonane wystarczająco szybko i z taką częstością, że układ działa w sposób ciągły.

### **Sterowanie nieliniowe ze sprzężeniem wprzód**

Sterowanie ze sprzężeniem wprzód było zaproponowane jako sposób wykorzystania nieliniowego modelu dynamiki w prawie sterowania bez konieczności wykonywania czasochłonnych obliczeń z częstością reagowania układu. Na rys. 9.12 część modelowa prawa sterowania zawiera się w pętli wspomagania, przez którą płyną sygnały sterujące z określoną częstością. Inny możliwy schemat sterowania jest pokazany na rys. 9.13. Tutaj modelowa część prawa sterowania jest na zewnątrz pętli wspomagania. W ten sposób można otrzymać szybką wewnętrzną pętlę sprzężenia zwrotnego, w której wykonuje się mnożenie uchybu przez współczynniki wzmocnienia, połączoną z zewnętrzną częścią modelową, z której sygnał wyjściowy jest dodawany z mniejszą częstością.



Rys. 9.13. Schemat sterowania z modelową częścią prawa sterowania na zewnątrz pętli wspomagania. (Źródło: Craig, 1993)

Niestety, schemat ze sprzężeniem wprzód z rys. 9.13 nie zapewnia pełnego rozdzielenia równań. Równanie uchybu dla tego układu jest następujące

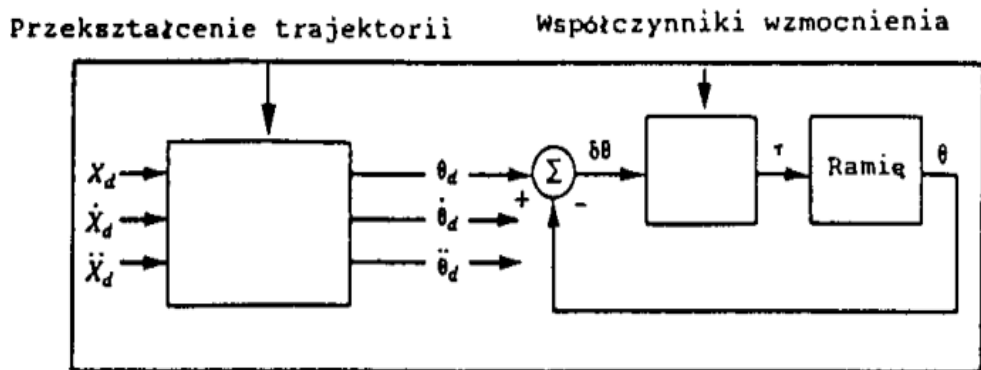
$$\ddot{e} + M^{-1}K_v\dot{e} + M^{-1}K_p e = 0 \quad (9.36)$$

Jeśli zmienia się konfiguracja manipulatora, to zmienia się efektywny współczynnik wzmocnienia zamkniętej pętli, a quasi-statyczny biegun przemieszcza się na płaszczyźnie liczb zespolonych.

W układzie sterowania z rys. 9.13 model dynamiczny jest obliczany jako funkcja pożądanego trajektorii, która jest znana wcześniej, zatem wartości funkcji mogą być obliczane przed rozpoczęciem ruchu. Obliczone przebiegi momentu obrotowego w czasie rzeczywistym mogą być odczytywane z pamięci. Zatem taki schemat wymaga niewielkiej liczby działań obliczeniowych w czasie rzeczywistym i tym samym umożliwia dobór wysokich częstotliwości próbkowania.

### Sterowanie w przestrzeni kartezyjskiej

Często występuje zadanie, w którym końcówka robocza powinna poruszać się po linii prostej lub po torze o kształcie opisanym we współrzędnych kartezyjskich. Na rys. 9.14 pokazano schemat sterowania manipulatora, w którym występuje proces przekształcania trajektorii opisanej we współrzędnych kartezyjskich do jej obliczania we współrzędnych konfiguracyjnych. Proces ten poprzedza działanie opisanego wcześniej układu sterowania we współrzędnych konfiguracyjnych.



Rys. 9.14. Schemat sterowania wg współrzędnych konfiguracyjnych w przypadku wejścia w postaci trajektorii we współrzędnych kartezjańskich. (Źródło: Craig, 1993)

Proces przekształcania trajektorii jest trudny w sensie obliczeniowym, jeśli wykonuje się go metodą analityczną. Wektor  $\theta_d$  jest wyznaczany w wyniku rozwiązania zadania odwrotnej kinematyki, a następnie prędkości i przyspieszenia w połączeniach ruchowych są obliczane numerycznie wykorzystując pierwsze i drugie różnice skończone, Jednak numeryczne różniczkowanie prowadzi do wzmocnienia zakłóceń i wprowadza opóźnienie.

W alternatywnym podejściu zmierzona pozycja manipulatora jest przekształcana za pomocą równań kinematyki do opisu pozycji we współrzędnych kartezjańskich. Opis ten jest porównywany z pożądanym położeniem w celu wyrażenia uchybu w przestrzeni kartezjańskiej. Układ sterowania, oparty na takim wyrażeniu uchybu nazywa się układem sterowania w przestrzeni kartezjańskiej,

Proces przekształcania trajektorii jest wewnątrz pętli sprzężenia zwrotnego. Sterowniki sterujące w przestrzeni kartezjańskiej muszą wykonywać wiele obliczeń wewnątrz tej pętli, w której są teraz przekształcenia kinematyczne. Zatem wynikowy układ może pracować przy mniejszej częstotliwości próbkowania w porównaniu z układami sterowania we współrzędnych konfiguracyjnych. To z kolei pogarsza stabilność i zdolność układu do eliminacji zakłóceń.

W intuicyjnym układzie sterowania porównywane są położenia bieżące i pożądane, określone we współrzędnych kartezjańskich, w celu wyrażenia uchybu w tych współrzędnych. Uchyb ten może być przekształcony w małe zmiany współrzędnych konfiguracyjnych za pomocą odwróconego jacobianu. Wynikowe wartości uchywu wyrażone we współrzędnych konfiguracyjnych są następnie mnożone przez współczynniki wzmocnienia, w celu obliczenia sił/momentów sił napędowych, które spowodują redukcję tych błędów. Ten układ nazywa się sterownikiem z odwróconym jacobianem.

W układzie zawierającym sterownik z jacobianem transponowanym wyznacza się współrzędne kartezjańskie wektora sił, które przyłożone do członu roboczego spowodują jego przemieszczenie w kierunku redukcji uchybu. Ten wektor jest



następnie przekształcany przez jacobian transponowany w celu obliczenia równoważnych sił/momentów napędowych, które spowodują redukcję zmierzonego uchybu.

Sterowniki z jacobianem odwróconym i transponowanym wprowadzono intuicyjnie, jednak nie ma pewności, że będą stabilne. Trzeba pamiętać, że odwrotność jacobianu na ogół nie jest równa jego transpozycji. Oba układy mogą być stabilne przez odpowiedni dobór współczynników wzmocnienia i uwzględnienie sprzężenia zwrotnego prędkości. Jednak nie można znaleźć stałych współczynników wzmocnienia, odpowiadających stałym biegunom zamkniętej pętli. Dynamiczna odpowiedź takiego sterownika będzie zmieniać się wraz z konfiguracją manipulatora.

Dynamiczne równanie ruchu manipulatora we współrzędnych kartezjańskich jest całkiem podobne do równania we współrzędnych konfiguracyjnych. Równanie dynamiki ciała sztywnego może być zapisane w postaci

$$\mathbf{f} = M_x(\theta)\ddot{\mathbf{x}} + V_x(\theta, \dot{\theta}) + G_x(\theta) \quad (9.37)$$

gdzie  $\mathbf{f}$  oznacza fikcyjny wektor siły/momentu siły, działający na człon roboczy manipulatora,  $\mathbf{x}$  – odpowiedni wektor przedstawiający pozycję i orientację członu roboczego we współrzędnych kartezjańskich,  $M_x(\theta)$ - macierz bezwładności,  $V_x(\theta, \dot{\theta})$  - wektor sił zależnych od położenia i prędkości,  $G_x(\theta)$ - wektor sił grawitacji, przy czym wszystkie wektory są wyrażone we współrzędnych kartezjańskich.

Podobnie jak w przypadku sterowania we współrzędnych konfiguracyjnych, można równania dynamiki wykorzystać w sterowniku z rozdzieleniem i linearyzacją. Na podstawie równania (9.37) oblicza się fikcyjny wektor siły wyrażony we współrzędnych kartezjańskich, który powinien być przyłożony do członu roboczego. Zatem w celu sterowania wykorzystuje się jacobian transponowany, a następnie siły/momenty napędowe potrzebne do efektywnego zrównoważenia układu

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{F} \quad (9.38)$$

Tak jak w przypadku sterowania we współrzędnych konfiguracyjnych, praktyczna realizacja zadania może być najlepiej osiągnięta za pomocą układu sterowania o dwóch częstościach pracy. Parametry dynamiczne są uaktualniane z mniejszą częstością od częstości pracy zamkniętej pętli serwonapędu w procesie podstawowym lub są obliczane przez drugi procesor. Serwonapędy pracują przy częstości 500 Hz lub większej w celu wyeliminowania zakłóceń i uzyskania stabilności układu. Natomiast parametry dynamiczne są funkcjami pozycji manipulatora i powinny być uaktualniane z częstością odpowiadającą częstości zmian pozycji, które są mniejsze od 100 Hz.

# 10. Pojęcia podstawowe

## 10.1 Pojęcia z zakresu automatyki i sterowania

**Sygnal** jest to wielkość fizyczna, której przebieg w czasie opisuje zachowanie układu. Sygnały są: *wejściowe* (wymuszenia), mogą być sygnałami sterowania lub *zakłócenia* oraz sygnały *wyjściowe* (oddziałujące na inne układy).

**Wielkość regulowana** – wielkość lub stan procesu, podlegające pomiarowi i regulacji.

**Sprzężenie zwrotne** – sygnał mierzony na wyjściu układu i porównywany z sygnałem na wejściu. Może mieć wartość dodatnią lub ujemną.

**Sygnal błędu** – różnica między sygnałami wejścia i sygnałami sprzężenia zwrotnego.

**Charakterystyka czasowa** – odpowiedź układu w funkcji czasu na standardowy sygnał wprowadzony na wejście.

**Współczynnik wzmocnienia** – wielkość wyjścia układu liniowego uznana za odpowiedź na wymuszenie sinusoidalne o jednostkowej amplitudzie.

Ponadto stosuje się wskaźniki: *kąt fazowy*, *zapas fazy*, *czas procesu przejściowego*, *czas uspokojenia*, *czas opóźnienia*.

**Sterowanie w układzie otwartym** – sterowanie bez sprzężenia zwrotnego.

**Sterowanie w układzie zamkniętym** – sterowanie w układzie, w którym sygnał wejściowy podany na element wykonawczy jest funkcją sygnału błędu.

**Sterowanie proporcjonalne** – sterowanie w układzie, w którym sygnał na wejściu podany na element wykonawczy jest proporcjonalny do sygnału błędu.

**Sterowanie pozycją** – przemieszczenie obiektów z zadanego położenia w inne.

**Sterowanie typu „play-back”** – sterowanie wg programu nauczania.

**Sterowanie inteligentne** – sterowanie działaniem manipulatora z uwzględnieniem sygnałów pochodzących od czujników lub sensorów.

Ponadto stosowane są układy sterowania typu: *adaptacyjny*, *czasowo-optimalny*, ze zmienną strukturą względem prędkości, siłą oraz *nadążne*, *ślizgowe*, *odporne* (krzepkie).

**Planowanie zadań** – sensory wizyjne rozpoznają obiekty oraz ich położenie w przestrzeni roboczej i powodują ciąg działań elementarnych w celu realizacji zadania sformułowanego przez użytkownika (np. umieścić sworzeń w otworze).

## Czujniki i sensory

**Przetwornik** przetwarza fizyczną, nieelektryczną wielkość wejściową na elektryczną wielkość wyjściową. Przetwornik wykonuje tylko operację konwersji energii.

**Sensor** zwykle wykorzystuje przetwornik, a jego elektryczną wielkość wyjściową przetwarza zgodnie z zadaniem algorytmem w celu uzyskania wyjścia przystosowanego do procesu sterowania z wykorzystaniem komputera.

*Uwaga:* Istotna różnica między przetwornikiem a sensorem polega na tym, że sensor nie może uzyskać żądanej funkcji innej, niż funkcja otrzymana z przetwornika.

**Inteligentny sensor** – sensor, który współdziała interakcyjnie ze sterującym komputerem w celu manipulacji danych (np. filtracja danych sensora wizji).

**Nieinteligentny sensor** – sensor, który dostarcza tylko dane wyjściowe .

**Przetwornik (sensor) absolutny** zapewnia elektryczny sygnał wyjściowy, który reprezentuje wszystkie możliwe wartości sygnału wejściowego bez zmian.

**Przetwornik przyrostowy** - kiedy oryginał nie jest ustalony dla wszystkich punktów w obszarze pomiarowym, a każdy punkt jest uznany za początkowy dla następnego.

**Przetwornik analogowy** – sygnał wyjściowy jest ciągły i proporcjonalny do sygnału wejściowego.

**Przetwornik (sensor) cyfrowy** przy zadanim ciągłym sygnale wejściowym sygnał wyjściowy ma naturę dyskretną.

**Sensor wizyjny** służy do zbierania informacji metodami optycznymi w otoczeniu manipulatora, do rozpoznawania i identyfikacji obiektów; stosuje się półprzewodnikowe przetworniki obrazu (CCD lub CSD) oraz skanery laserowe.

**Sensor dotyku** (taktylny) służy do rozpoznawania siły stykowej i kształtu obiektu przy zetknięciu chwytaka z przedmiotem. Są stosowane sensory dotyku: *przełącznikowe* (mikroprzełączniki) lub *ciągłego działania* (indukcyjne, igłowe, elastomery).

**Sensory zbliżenia** to urządzenia do pomiaru odległości lub wykrywania przeszkód: *indukcyjne, ultradźwiękowe, optyczne, pneumatyczne, mikrofalowe, laserowe, światłowodowe*.

**Przetworniki położenia:** *potencjometry* (liniowe i kątowe) oraz *enkodery optyczne* (absolutne lub przyrostowe).

**Przetwornik prędkości** w ruchu postępowym lub obrotowym na sygnał elektryczny: *bezpośrednie*, np. techogeneratory lub *różniczkujące*, najczęściej są stosowane optyczne enkodery przyrostowe.

**Przetwornik siły** przetwarza wartość siły na sygnał elektryczny. Mierzonymi są: siła rozciągająca lub ściskająca, siła gnąca lub ścinająca oraz moment skręcający.

Przetworniki: *rezystancyjne, półprzewodnikowe, piezorezystywne*, pojemnościowe lub indukcyjne, również czujniki świetlne, np. fotorezystory, fotodiody, fotopowielacze.

**Statyczna charakterystyka urządzenia** opisuje cechy w temp.  $25 \pm 10^0$  C, wilgotności 90%, ciśnieniu 880 – 1080 mbar, przy wolnych zmianach wielkości mierzonej i braku udarów. Określa: *liniowość, dokładność, stabilność, precyzja, częstość i rozdzielczość*.

**Charakterystyka dynamiczna:** Odpowiedź urządzenia na zmiany wielkości mierzonej jako funkcja czasu. Do podstawowych charakterystyk należą charakterystyka *fazowa* i *częstotliwościowa*.

**Czujnik położenia** jest umieszczany na wale silnika, co ułatwia jego sterowanie. Zazwyczaj jest to przyrostowy optyczny przetwornik położenia tzw. **enkoder** optyczny.

Kąt obrotu wału jest mierzony przez zliczanie liczby impulsów (od 16 do 10000 linii na jeden obrót), co zapewnia dokładność 0,01 stopnia.

**Resolwer** generuje dwa sygnały analogowe, o wartości sinusa i kosinusa kąta obrotu wału, który jest wyznaczany na podstawie różnicy amplitud tych sygnałów.

**Potencjometry** są połączone w mostek, generują napięcie proporcjonalne do kąta obrotu wału. Występowanie zakłóceń ogranicza zastosowanie.

**Tachometry** dają sygnał analogowy, proporcjonalny do prędkości kątowej wału.

**Czujniki siły** zawierają tensometry generujące sygnał napięciowy proporcjonalny do odkształcenia elementu. Sztywniejszy czujnik ma mniejszą czułość. Pomiar różnicowe poprawiają liniowość i eliminują zakłócenia.

**Czujniki foliowe** są trwale lecz mało czułe. Półprzewodnikowe czujniki wydłużenia dają zmiany rezystancji ok. 70 razy większe od foliowych.

## 10.2 Pojęcia podstawowe z zakresu kinematyki, statyki i dynamiki

**Kinematyka** jest nauką o ruchu (przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia) bez uwzględnienia sił powodujących ruch.

**Przestrzeń robocza** jest to miejsce położenia i orientacji osiągalnych przez człon roboczy manipulatora.

**Trajektoria** jest funkcją czasu opisującą położenie, przemieszczenie (i wyższe pochodne przemieszczenia) mechanizmu robota w każdej chwili.

**Układ współrzędnych** określa pozycję punktu i orientację członu względem pewnego układu odniesienia.

**Stopnie swobody** są liczbą niezależnych zmiennych, które powinny być podane w celu pełnego usytuowania wszystkich członów mechanizmu.

**Punkt nauczony** jest to punkt w przestrzeni roboczej, do którego manipulator jest rzeczywiście przemieszczany, po czym następuje odczyt z sensorów i zapamiętanie współrzędnych konfiguracyjnych. W przypadku polecenia powrotu do tego punktu każde połączenie ruchowe jest poruszane o zapamiętaną wartość przemieszczenia.

**Powtarzalność manipulatora**, zwykle podana przez producenta, określa odchylenie (średnie lub maksymalne) przy kolejnych powrotach do punktu nauczonego. Zależy od dokładności układu sterowania (czujnika przemieszczenia, tzw. enkodera), sztywności manipulatora i obciążenia.

**Punkt obliczony** określa pozycję i orientację członu roboczego we współrzędnych kartezyjskich. W celu wyznaczenia odpowiednich współrzędnych konfiguracyjnych należy obliczyć rozwiązanie zadania odwrotnego.

**Dokładność** opisuje odchylenie punktu osiągniętego od punktu zaprogramowanego (obliczonego). Zależy od tolerancji wykonania wymiarów manipulatora, tzn. od dokładności parametrów D-H, mających wpływ na wartości współrzędnych konfiguracyjnych, obliczonych wg rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki. Dokładność jest zazwyczaj znacznie gorsza od powtarzalności. Można ją poprawić przez dokładniejsze wyznaczenia parametrów D-H za pomocą procedury **kalibracji**.

**Jakobian** manipulatora jest macierzą, której elementy są pochodnymi cząstkowymi współrzędnych kartezyjskich członu roboczego względem współrzędnych konfiguracyjnych w połączeniach ruchowych. Macierz jacobianowa nie jest osobliwa, gdy można ją odwrócić, aby obliczyć prędkości w połączeniach ruchowych dla danych prędkości kartezyjskich. Jeśli wyznacznik jacobianu jest równy zero, to oznacza, że utracił pełny rząd i jest osobliwy.

**Położenia osobliwe** manipulatora odpowiadają tym punktom przestrzeni roboczej, gdzie niektóre wartości współrzędnych członu roboczego nie można zmienić, np. na granicy lub tam gdzie może zmienić się konfiguracja.

# Bibliografia

Angeles J., *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods, and Algorithms*. Third Edition, Springer 2007.

Craig J.J., *Wprowadzenie do robotyki. Mechanika i sterowanie*. Tłumaczył J. Knapczyk, Wydanie drugie uzupełnione. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1993.

Knapczyk J., Lebediew P.A., *Teoria mechanizmów przestrzennych i manipulatorów*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1990.

Kozłowski K., Dutkiewicz P., Wróblewski W., *Modelowanie i sterowanie robotów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.

LiCheng W., Carbone G., Ceccarelli M., *Design an underactuated mechanism for a 1 active DOF finger operation*. Mechanism and Machine Theory 44 (2009) 336-348.

Morecki A., Knapczyk J. (red.), *Podstawy robotyki. Teoria i elementy manipulatorów i robotów*. Wydanie trzecie. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.

Morecki A., Knapczyk J., Kędzior K., *Teoria mechanizmów i manipulatorów. Podstawy i przykłady zastosowań w praktyce*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2002.

Spong M.W., Vidyasagar M., *Dynamika i sterowanie robotów*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.

Tsai L.W., *Robot Analysis. The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons, New York 1999.