

**Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu**

***Wprowadzenie do mechatroniki***

Józef Wojnarowski

Nowy Sącz 2012

### **Komitet Redakcyjny**

doc. dr Marek Reichel – przewodniczący;  
prof. dr hab. inż. Jarosław Frączek; prof. dr hab. Leszek Rudnicki;  
dr hab. n. med., prof. nadzw. Ryszard Gajdosz; dr hab., prof. nadzw. Zdzisława Załona;  
dr hab. Magdalena Sitarz; dr hab. Wanda Pilch; mgr Agata Witrylak-Leszyńska

### **Redaktor Naczelny**

doc. dr Marek Reichel

### **Sekretarz Redakcji**

dr Tamara Bolanowska-Bobrek

### **Redakcja Techniczna**

dr Tamara Bolanowska-Bobrek

### **Recenzent**

dr hab. inż., prof. nadzw. Stanisław Zawiślak

Wydano za zgodą JM Rektora PWSZ w Nowym Sączu,  
prof. dr. hab. inż. Zbigniewa Ślipka

Autor ponosi odpowiedzialność za poprawność językową tekstu  
© Copyright by Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu  
Nowy Sącz 2012

ISBN 978-83-63196-22-6

### **Adres Redakcji**

Nowy Sącz 33-300, ul. Staszica 1  
tel. 18 443 45 45, e-mail: briw@pwsz-ns.edu.pl

### **Wydawca**

Wydawnictwo Naukowe Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Nowym Sączu  
ul. Staszica 1, 33-300 Nowy Sącz  
tel. 18 443 45 45, e-mail: briw@pwsz-ns.edu.pl

### **Druk**

„EXPOL” P. Rybiński, J. Dąbek Spółka Jawna  
ul. Brzeska 4, 87-800 Włocławek  
tel./fax: 54 232 37 23, 232 48 73  
e-mail: sekretariat@expol.home.pl

## SPIS TREŚCI

<b>1. Wprowadzenie</b> .....	9
1.1. Rys historyczny kształtowania się dyscypliny mechatroniki .....	9
1.2. Mechatronika – nowa dziedzina nauki? .....	11
1.3. Mechatronika a robotyka.....	11
1.4. O projektowaniu mechatronicznym .....	13
1.5. O zastosowaniu informatyki.....	13
<b>2. Prekursorzy mechatroniki – krótki rys historyczny</b> .....	15
<b>3. Analiza strukturalna mechanizmów</b> .....	18
3.1. Podstawy teoretyczne.....	18
3.1.1. Stopień ruchliwości łańcucha kinematycznego .....	19
3.1.2. Klasyfikacja płaskich mechanizmów .....	20
3.1.3. Człony bierne i ruchliwość lokalna .....	23
3.2. Schemat strukturalny, graf strukturalny i macierz połączeń.....	24
3.3. Analiza strukturalna mechanizmu.....	25
3.4. Motywacja techniczna – zastosowania .....	26
<b>4. Paradygmat mechatroniki</b> .....	27
4.1. Definicje mechatroniki .....	28
4.2. Zasady dziedzin, które tworzą paradygmat mechatroniki .....	30
4.3. Kiedy stosowanie systemów mechatronicznych jest sensowne?.....	32
<b>5. Zasady mechaniki</b> .....	35
5.1. Prawa Newtona .....	35
5.2. Pęd i zasada zachowania pędu .....	35
5.3. Kręt i zasada zachowania krętu.....	36
5.4. Zasada zachowania energii mechanicznej .....	36
5.5. Zasady wariacyjne .....	36
5.6. Zasada d’Alemberta.....	37
5.7. Zasada prac przygotowanych .....	37
5.8. Zasada najmniejszego działania.....	37
5.9. Zasada Gaussa .....	38
5.10. Wybrane zagadnienia z mechaniki analitycznej .....	38
5.11. Równania Lagrange’a I-go rodzaju .....	39
5.12. Równanie Lagrange’a II-go rodzaju. ....	39
5.13. Równanie kanoniczne Hamiltona .....	40
5.14. Przykład .....	41
5.15. Praca, energia, moc i sprawność.....	43
5.16. Równanie Lagrange’a dla układów elektro-mechanicznych.....	44
5.17. Równanie różniczkowe ruchu Mangerona-Deleanu .....	45
5.18. Zestawienie formuł (równań) uzyskanych z wariacyjnej zasady Hamiltona.....	46
5.19. Brachistochrona jako przykład zagadnienia optymalizacji .....	46

<b>6. Zasady mechaniki płynów</b> .....	49
6.1. Zasada zachowania masy .....	49
6.2. Lepkość kinematyczna i dynamiczna .....	49
6.3. Przepływy laminarne i burzliwe .....	50
6.4. Równanie Eulera .....	51
6.5. Równanie Bernoulli'ego .....	53
<b>7. Zasady elektromechaniki</b> .....	54
7.1. Prawo Coulomba, zasada zachowania ładunku i prawo Ohma .....	54
7.2. Prawa Kirchhoffa .....	56
7.3. Równanie Maxwella .....	58
<b>8. Charakterystyczne przykłady</b> .....	60
8.1. Wyznaczyć częstotliwości drgań układu o 2 stopniach swobody .....	60
8.2. Analiza ruchu modelu wózka suwnicy z uwzględnieniem doboru regulatora .....	62
8.3. Wyznaczanie równań ruchu oraz częstotliwości drgań własnych .....	68
8.4. Analogie elektromechaniczne .....	69
8.4.1. Układ o 1 stopniu swobody .....	70
8.4.2. Obwody elektryczne .....	70
<b>9. Sterowanie w mechatronice</b> .....	73
9.1. Struktura układu mechatronicznego .....	73
9.2. Układy sterowania .....	74
9.3. Przykłady sterowania systemów mechatronicznych .....	76
9.4. Chwytniki jako urządzenia mechatroniczne .....	79
<b>10. Modelowanie układów mechatronicznych</b> .....	81
10.1. Zadania modelowania w mechatronice .....	81
10.2. Kryteria podobieństwa i liczby znamienne .....	81
10.3. Analiza i synteza układu mechatronicznego .....	85
10.4. Schematy blokowe układu mechatronicznego .....	88
10.5. Funkcja przejścia i charakterystyki dynamiczne .....	88
<b>11. Modelowanie dyskretnych układów mechanicznych metodą grafów</b> .....	89
11.1. Wprowadzenie teoretyczne .....	89
11.2. Motywacja techniczna – zastosowania .....	96
11.3. Graf jako schemat analogowy na elektroniczne maszyny analogowe (EMA) .....	96
11.4. Wykorzystanie grafu biegunowego do wyznaczania równania charakterystycznego układu .....	98
11.5. Objasnienia do programów .....	103
11.5.1. Program „RÓWNANIA RUCHU” .....	103
11.5.2. Program „RÓWNANIE CHARAKTERYSTYCZNE” .....	104
11.6. Zastosowanie grafów, modelowanie układów mechanicznych .....	104
<b>12. Modelowanie układów mechatronicznych w formalizmie grafów wiązań (bond grafów)</b> .....	107
12.1. Podstawowe pojęcia .....	107
12.2. Graf wiązań w opisie, zmienne wyteżeniowe i przepływowe .....	108
12.3. Przyczynowość (casuality) .....	108
12.4. Elementy składowe (constitutive elements) .....	111

12.4.1. Źródła (sources).....	111
12.4.2. Element magazynujący energię (buffers).....	111
12.4.3. Element rozpraszający (dissipator) .....	112
12.4.4. Transformator i girator.....	112
12.4.5. Węzły (junctions) .....	113
12.4.5.1. Węzeł 0 „węzeł zerowy” (0 junction)....	113
12.4.5.2. Węzeł 1 „węzeł jedynkowy” (1 junction) .....	114
12.5. Metoda budowania grafu wiązań układu elektrycznego.....	114
12.6. Metoda budowania grafu wiązań układów mechanicznych .....	115
12.7. Układanie równań na podstawie modelu grafu wiązań.....	115
12.7.1. Analiza przyczynowości (causal analysis) .....	115
12.7.2. Procedura wyznaczania przyczynowości .....	116
12.7.3. Tworzenie równań na podstawie przyczynowego grafu wiązań.....	116
12.7.4. Układ złożony z 2 sprzężonych mas punktowych w postaci wózków .....	117
<b>13. Maszyna mechatroniczna jako system dynamiczny .....</b>	<b>120</b>
13.1. O modelowaniu układów mechanicznych .....	120
13.2. Maszyna mechatroniczna jako obiekt regulacji.....	125
<b>14. ABS jako przykład urządzenia mechatronicznego.....</b>	<b>129</b>
14.1. Opis ogólny.....	129
14.2. Zasada działania.....	130
14.3. Regulatory ciśnienia.....	131
14.4. Korektor hamowania.....	132
14.5. Kontrola układu.....	132
14.6. Obwód hydrauliczny.....	134
<b>15. O zastosowaniu mikrokontrolerów w mechatronice .....</b>	<b>136</b>
<b>16. Generalna klasyfikacja zmiennych układu dynamicznego .....</b>	<b>139</b>
16.1. Klasyfikacja zmiennych elementów modelu .....	139
16.2. Klasyfikacja pod względem lokalnego stanu energetycznego .....	140
<b>17. Mechatronika – nauka czy technologia? .....</b>	<b>141</b>
<b>18. Od mechatroniki do mikro-, nano- i mikro-nano-technologii .....</b>	<b>142</b>
<b>19. Dodatek A – federacja IFToMM a mechatronika.....</b>	<b>143</b>
<b>20. Dodatek B – jednostki i wybrane stałe fizyczne.....</b>	<b>146</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>147</b>
<b>Nota o Autorze .....</b>	<b>149</b>

### Ważniejsze oznaczenia

$\vec{a}$  – wektor przyspieszenia względem układu inercjalnego

$\vec{a}_i$  – wektor przyspieszenia punktu  $i$

$B$  – indukcja pola magnetycznego

$c_{ia}$  – są wektorami określającymi położenie punktów połączeń członów łańcuchów kinematycznych

$E$  – energia kinematyczna

$E$  – strumień natężenia pola elektrycznego

$E_d$  – energia dostarczona

$E_k$  – siła elektromotoryczna źródła napięcia  $k$

$E_m$  – energia mechaniczna

$E_u$  – Liczba kryterialna Eulera

$E_u$  – uzyskana energia użyteczna

$\vec{F}$  – siła wzajemnego oddziaływania dwóch punktowych ładunków elektrycznych

$\vec{F}_l$  – wypadkowy wektor sił czynnych

$M_i$  – momenty zewnętrzne

$\vec{F}_i$  – wektor sił czynnych

$\vec{F}_{mi}$  – wektor masowych sił bezwładności

$H$  – funkcja Hamiltona

$\mathbf{H}$  – macierz incydencji grafu

$I$  – natężenie prądu (w układzie SI w amperach – A)

$i$  – liczba stopni swobody

$\vec{j}$  – gęstość prądu

$k$  – wzmocnienie statyczne

$K$  – krzywizna powierzchni (tzw. krzywizna Gaussa)

$k$  – współczynnik proporcjonalności

$k * p_k$  - liczba więzów nałożonych na człon przez parę  $k$ -tej klasy

$K_i$  – jest krętem ciała „ $i$ ” liczonym względem środka masy  $C_i$

$\vec{K}_0$  – wektor krętu

$L$  – funkcja Lagrange’a danego układu

$L$  – praca

$L_{jk}$  – współczynniki indukcji

$M$  – Liczba kryterialna Macha

$m$  – masa

$m_i$  – masa punktu  $i$

$m_{ik}$  – współczynniki bezwładności

$n$  – liczba ruchomych członów

$P$  – moc

$p_i = p_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$  – macierz pędów uogólnionych

$\vec{p}$  – wektor pędu

$p_k$  – liczba par kinematycznych klasy  $k$

$q$  – gęstość ładunków

$Q$  – siła uogólniona

$Q = \|Qn\|$  – macierz kolumnowa zmiennych przepływowych wraz z siłowym wymuszeniem

$q = \|qn\|$  – macierz kolumnowa zmiennych biegunowych wraz z kinematycznymi źródłami wymuszenia

$\dot{q}_i$  – prędkości uogólnione

$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$  – macierz prędkości uogólnionych

$q_m$  – masowe natężenie przepływu

$Q'_i$  – uogólnione siły niepotencjalne

$q_1, q_2$  – punktowe ładunki elektryczne

$q_i$  – macierz kolumnowa współrzędnych uogólnionych  
 $q_i$  – współrzędne uogólnione  
 $Q_i$  – siły uogólnione  
 $Q_{ej} = U_i R_j$  – napięcia uogólnione  
 $r$  – odległość między ładunkami  
 $r_1$  i  $r_2$  – promienie krzywizny (odwrotności krzywizny)  
 $Re$  – liczba kryterialna Reynoldsa  
 $r_i$  – jest wektorem promieniem środka masy  $C_i$  mierzonym w inercjalnym układzie odniesienia  
 $R_i$  – wypadkowy wektor reakcji więzów  
 $\vec{R}_i$  – oznacza reakcje więzów  
 $s$  – jest elementem łuku krzywej  
 $s_{ik}$  – parametry mechaniczne  
 $S_{jk}$  – współczynniki potencjału  
 $Str$  – Liczba kryterialna Strouhala  
 $t$  – czas  
 $t$  – jest jednostkowym wektorem stycznym w danym punkcie do krzywej  
 $T_k$  – jest wielkością drzewa grafu,  $m^{T_k}$  jest liczbą krawędzi k-tego drzewa  
 $T_{ki}$  – transmitancja i-tej gałęzi k-tego drzewa  
 $U$  – napięcie między końcami przewodnika (w układzie SI w woltach – V)  
 $U_\alpha$  – spadek napięcia na elemencie  $\alpha$   
 $u(t)$  – zmienna wejściowa modelowanego procesu dynamicznego  
 $V$  – energia potencjalna  
 $v$  – współczynnik lepkości kinematycznej  
 $\vec{v}_s$  – wektor prędkości środka masy  
 $v_{sr}$  – prędkość średnia  
 $W$  – stopień ruchliwości mechanizmu  
 $W_e$  – Liczba kryterialna Webbera  
 $\vec{W}_i$  – siły wewnętrzne  
 $W_o$  – Liczba kryterialna Womerley'a  
 $X_a^c$  i  $Y_a$  – są uzewnętrznionymi siłami i momentami pochodzącymi od oddziaływania innych ciał na ciało „i” po wyodrębnieniu go z łańcucha kinematycznego  
 $\dot{x}_j$  – uogólnione współrzędne prędkości  
 $y(t)$  – zmienna wyjściowa  
 $\delta \vec{r}_i$  – oznacza przesunięcia przygotowane (wirtualne)  
 $\delta q_i$  – są wariacjami odpowiednich współrzędnych uogólnionych  $i=1, \dots, s$   
 $\lambda_j$  – mnożniki Lagrange'a  
 $\mu$  – współczynnik lepkości dynamicznej  
 $\rho$  – gęstość płynu  
 $\Psi_j$  – sprzężenie magnetyczne  
 $\varepsilon$  – względna przenikalność elektryczna ośrodka  
 $\eta$  – sprawność  
 $\mu$  – przenikalność magnetyczna  
 $\Phi_E$  – strumień indukcji magnetycznej  
 $\varepsilon_0$  – przenikalność elektryczna próżni  
 $\nabla() = \frac{\partial()}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial()}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial()}{\partial z} \vec{k}$  – operator gradientu  
 $\nabla \times$  – operator rotacji





## 1. Wprowadzenie

### 1.1. Rys historyczny kształtowania się dyscypliny mechatroniki

„The mechanical part of the system has been reduced to its minimal function of delivering physical power. The rest is computation”.

(„Mechaniczne części systemu, mogą być zredukowane do minimalnych funkcji dostarczania energii. Reszta to technika komputerowa”).

David M. Auslander  
([in:] The Computer AS Liberator: The Rise of Mechanical System Control. ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, vol. 115v June 1993, pp. 234-238)

W ciągu ostatnich lat projektowanie i budowa maszyn podlega radykalnym przemianom. Istotę tych zmian trafnie ujął David M. Auslander w przedstawionym wyżej cytacie. Zredukował on funkcję układu mechanicznego do dostarczania i transmisji energii, a resztę pozostawił technice komputerowej. Sformułowanie w ujęciu Davida M. Auslandera jest może dużym uproszczeniem, jednak faktem pozostaje, że jakość i wydajność nowoczesnych urządzeń zależy przede wszystkim od układów sterowania, a właściwie od systemów informacyjnych.

Nowoczesne maszyny budowane z modułów funkcjonalnych tworzą całość, jednak modułami tymi nie są jak dotychczas klasyczne mechanizmy, ale także systemy informacyjne. Obecnie w działaniu maszyny w układzie i transmisji energii istotną rolę odgrywa informacja. Wszystkie te przemiany doprowadziły do tego, że klasyczna mechanika jest obecnie połączona nierozzerwalną więzią z elektroniką, elektromechaniką i nadrzędnym nad wszystkim sterowaniem komputerowym. Powiązaniem tych wszystkich dyscyplin technicznych w projektowaniu maszyn zajmuje się nowa teoria maszyn zwana **mechatroniką**.

Jako jeden z pierwszych synergizmem układów mechanicznych, hydraulicznych oraz elektrycznych zajął się George Constantinesco. Sformułował on zasadę przepływu energii wyróżniający 3 jej rodzaje: mechaniczną, płynną i elektryczną [7]. Analizując możliwości przekazywania mocy w konstruowanych maszynach, Constantinesco (już w roku 1926) przepowiedział, że w przyszłości napędy maszyn będą wymagały odpowiedniego współdziałania układów mechanicznych, hydraulicznych i elektrycznych, a dziedzinę zajmującą się tym problemem nazwał neomechaniką. Co więcej, już wtedy przewidywał, że duże znaczenie w działaniu systemów mechanicznych będą miały nieznane wówczas podukłady elektroniczne.

W latach 70. dokonano pełnej integracji mechaniki precyzyjnej, elektroniki, sterowania i technik komputerowych – prognozy Constantinesco ziściły się. Obecnie proces ten doprowadził do zmiany w podejściu do projektowania i konstruowania maszyn.

W technice człowiek realizuje swoje potrzeby poprzez przekształcanie materii, energii i informacji. Podstawowe rodzaje operacji mogą mieć charakter fizyczny, chemiczny, biologiczny i informatyczny. Technika opanowała najpierw przetwarzanie materii, potem energii, aż przyszła kolej na przetwarzanie informacji. Maszyny służą do zastępowania lub ułatwiania pracy człowieka poprzez dokonywanie właśnie tych

3 operacji. Widzimy więc, że w każdej maszynie, choć w marginalny sposób, mamy do czynienia z każdym z rodzajów przetwarzania. Na podstawie tych spostrzeżeń możemy stworzyć nową definicję maszyny – jako urządzenia przetwarzającego materię, energię i informację.

Mając na uwadze tę teorię, wszystkie maszynymy możemy podzielić na: materiałowe, energetyczne i informacyjne. Gdybyśmy zgrupowali np. urządzenia przemysłu maszynowego służące do najrozmaitszych celów i porównali rangę znaczenia przekształcenia materii, energii i informacji (tab. 1.1), to zauważylibyśmy, że w poszczególnych branżach przemysłu maszynowego wytwarzane są maszyny o różnych postaciach konstrukcyjnych i wyróżnić można maszyny, których najważniejszym celem jest przetwarzanie informacji (7 branż).

Tab. 1.1. Ranga znaczenia przekształcenia materii (M), energii (E) i informacji (I) w produktach branż przemysłu maszynowego (według ankiety Niemieckiego Stowarzyszenia Wytwórców Maszyn VDMA z 1986).

<b>Branż przemysłu maszynowego</b>	<b>M</b>	<b>E</b>	<b>I</b>
Obrabiarki	1	3	2
Maszyny i ciągniki rolnicze	1	2	3
Technika napędów	3	1	2
Technika biurowa i informacji	2	3	1
Maszyny spożywcze i opakowaniowe	1	2	3
Technika transportu bliskiego	3	2	1
Technika lotnicza	1	2	3
Maszyny budowlane i przemysłu materiałów budowlanych	1	3	2
Armatury	3	2	1
Pompy	3	1	2
Maszyny włókiennicze	1	2	3
Narzędzia precyzyjne	1	2	3
Technika druku i papieru	2	3	1
Maszyny górnicze	2	1	3
Budowa aparatów	1	2	3
Maszyny do przeróbki gumy i tworzyw sztucznych	1	3	2
Maszyny do obróbki drewna	1	3	2
Technika cieplna, procesowa i odpadowa	1	2	3
Maszyny szwalnicze i odzieżowe	1	3	2
Wagi	3	2	1
Maszyny odlewnicze	1	2	3
Sprężarki i pompy próżniowe	2	1	3
Roboty i manipulatory	3	2	1
Maszyny badawcze	2	3	1
Technika spawalnicza	1	2	3
Maszyny pralnicze i do czyszczenia chemicznego	1	2	3
Maszyny przemysłu obuwniczego i skórzanego	1	3	2
Pojazdy i urządzenia pożarnicze	2	1	3
Kasy pancerne i skarbcce	2	1	3

Z tab. 1.1. wynika, że istnieje dominacja w zakresie przekształcania energii i informacji.

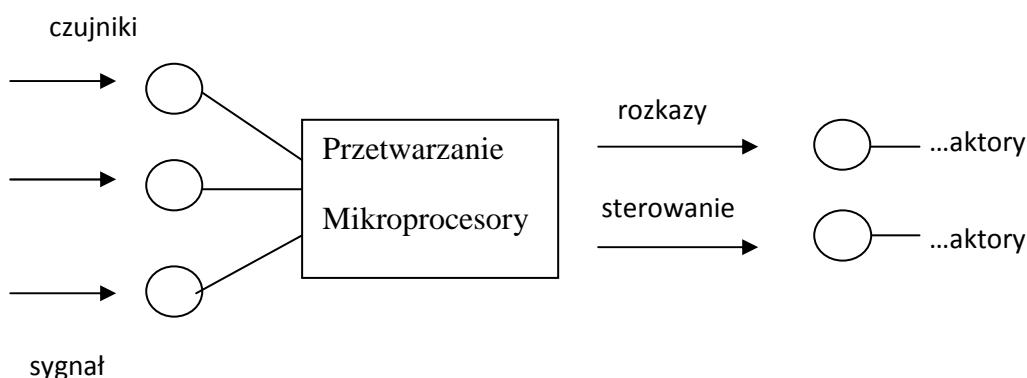
Najistotniejszym celem wyrobów branży, np. „wagi”, wszelkiego rodzaju wag czy wyrównoważarek, lub branży „maszyny badawcze”, jest dostarczenie informacji. Maszyny te – generujące lub przetwarzające informacje – można porównać z klasyczną maszyną informacyjną, czyli zegarem mechanicznym. W rzeczywistości w każdej maszynie mamy do czynienia z przetwarzaniem informacji, choćby były to tylko rozkazy włączenia i wyłączenia.

## 1.2. Mechatronika – nowa dziedzina nauki?

Trwa dyskusja na temat – czy mechatronika to rzeczywiście nowa dyscyplina naukowa, czy też nowy etap w rozwoju maszyn [12]. Niektórzy kojarzą tę dyscyplinę naukową z komputerami, inni z robotyką, a jeszcze inni interpretują ją jako technikę „interfejsowania” lub jako wiedzę integrującą projektowanie maszyn. Wszystkie te opinie posiadają jednak pewne cechy wspólne. Pierwszą z nich jest zastosowanie sterowania komputerowego do operowania funkcjami mechanicznymi, drugą zaś ujęcie systemowe – to, że produkt mechaniczny objawia się jako coś więcej niż suma jego części mechanicznych i elektronicznych. Mechatronika jako nowa dziedzina zajmuje się badaniem, a także rozwijaniem nowo powstałych zintegrowanych systemów mechaniczno-elektronicznych. Systemy te cechuje pewna „inteligencja” – są one w stanie przy pomocy czujników odbierać z otoczenia pewne sygnały, by potem móc je przetwarzać za pomocą mikroprocesorów, aż wreszcie na tej podstawie reagować przy pomocy elementów wykonawczych, tzw. aktorów (rys. 1.1).

Urządzenia są różnorodne i elastyczne, dlatego też mogą być zastosowane do różnorodnych zadań.

Rys. 1.1. Schemat układu mechaniczno-elektronicznego.



## 1.3. Mechatronika a robotyka

Wielu spośród nas mechatronikę traktuje jako synonim robotyki. Niewątpliwie te 2 dyscypliny naukowe mają ze sobą wiele wspólnego. Roboty to przecież szczyt osiągnięć mechatroniki. Elementy, z których są one zbudowane można ograniczyć do takich jak:

- czujniki (sensory) – za ich pomocą robot odbiera z otoczenia informacje o procesie. Są tu wykorzystane techniki pomiarów;
- przetworniki informacji (mikroprocesory) – przy pomocy których robot przetwarza informacje. Są to elementy techniki komputerowej;
- elementy wykonawcze – za pomocą których robot aktywnie oddziałuje na swoje otoczenie, czyli bezpośrednio ingeruje (nastawia) w sterowany proces techniczny. Są to głównie elementy mechaniczne.

Po zastanowieniu możemy jednak zauważyć, że zastosowanie mechatroniki jest znacznie szersze, gdyż obejmuje:

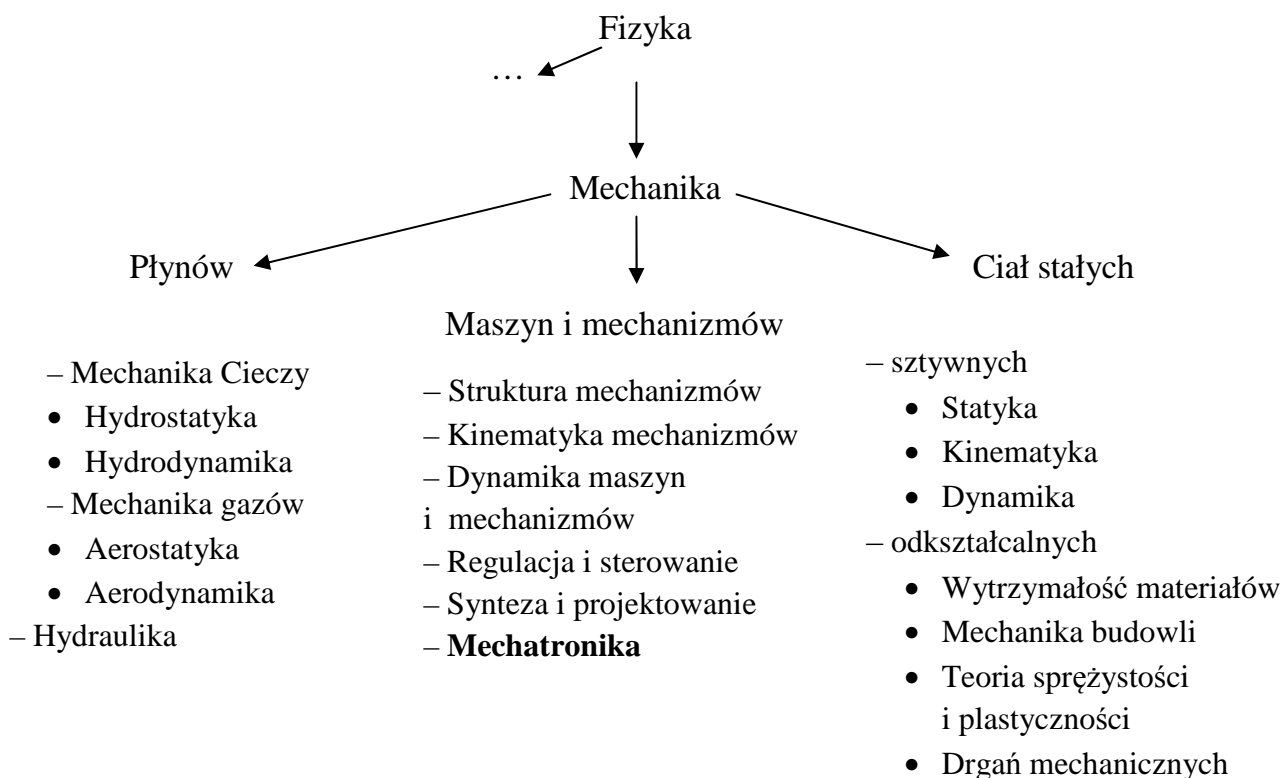
- wyposażenie wytwórcze (obrabiarki sterowane numerycznie, roboty, elastyczne systemy wytwarzania, wyposażenie magazynowe i transportowe);

- wytwory techniczne (począwszy od elektronicznych – np. komputery, telefony, do mechanicznych – np. kserokopiarki, maszyny do pisania itp.);
- zespoły i elementy (silniki elektryczne, monitory, sensory, złącza elektryczne i inne).

Każde urządzenie mechatroniczne oprócz podstawowych elementów potrzebuje też takich, za pomocą których operator (człowiek) może wprowadzać lub otrzymywać informacje do/z systemu. Ten uniwersalny schemat urządzenia mechatronicznego jest słuszny wtedy, gdy człowiek-operator już nie nadzoruje procesu technicznego swymi zmysłami oraz nie wpływa na ten proces ręcznie, ale stosuje do tego celu sterowanie, któremu może wydawać własne rozkazy oraz otrzymuje meldunki zwrotne. Aby człowiek mógł się porozumiewać z maszyną, konieczne są elementy do wprowadzenia informacji. Dokonuje się tego za pomocą przycisków, klawiszy lub dźwigni do wprowadzania ręcznego, a także wskaźników, ekranów i głośników do wydawania informacji.

Wszystko jednak znamionuje ruch. Teorią ruchu zajmuje się mechanika, a jeśli mówimy o niej, to zwykle o mechanice klasycznej w rozumieniu ujęć formalizmów I. Newtona, L. Eulera, Lagrange’a i Hamiltona. Na rys. 1.2 przedstawiono miejsce mechatroniki w dziedzinie mechaniki.

Rys. 1.2. Miejsce mechatroniki w dziedzinie mechaniki.



#### 1.4. O projektowaniu mechatronicznym

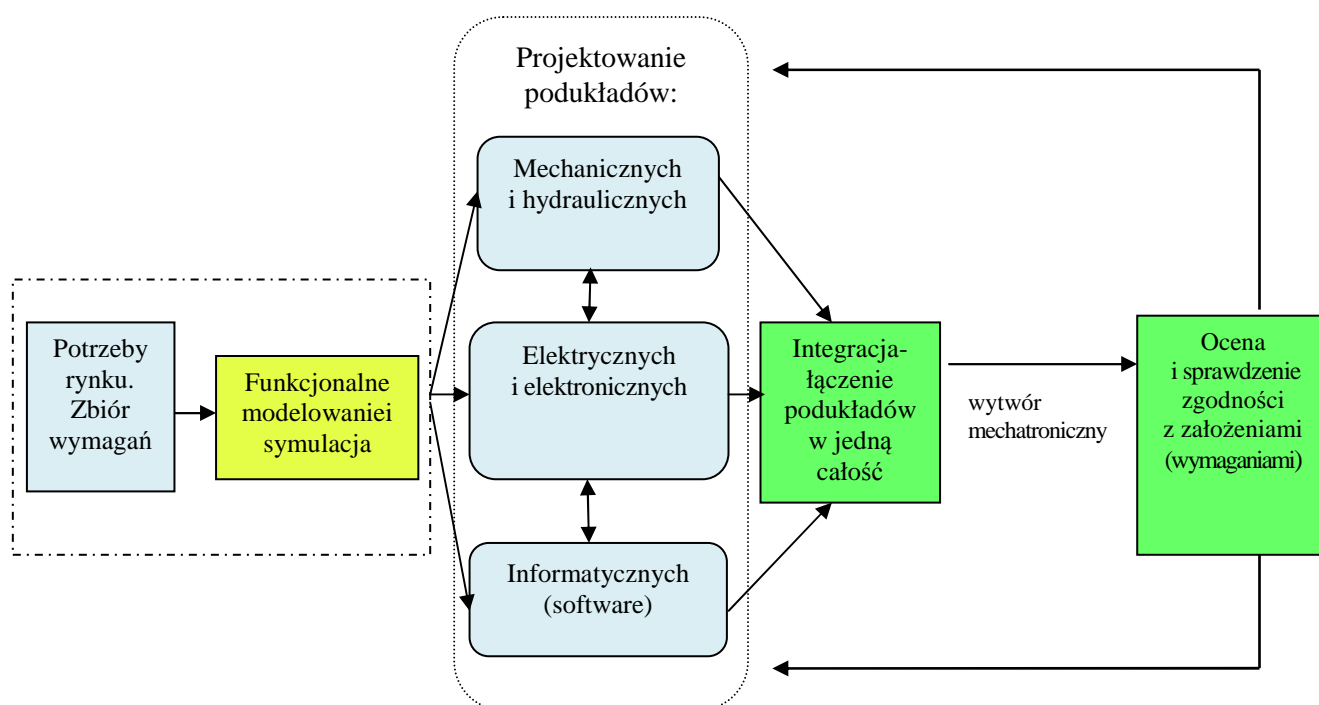
Projektowanie mechatroniczne to proces, w którym uczestniczą specjaliści wielu dyscyplin – reprezentujących: mechanikę, hydraulikę, elektronikę, informatykę, ekonomię, technologię – w celu wytworzenia konstrukcji określonych mechanizmów i maszyn. W takim rozumieniu filozofia projektowania mechatronicznego bazuje na paradygmacie wielkości dyscyplin. Wymaga to kształcenia studentów tego kierunku do pracy zespołowej. Odpowiednie przygotowanie studentów powinno stwarzać niezbędne procedury warunkujące sukces w innowacyjnym cyklu wytwórczym produktu. Aby być skutecznym w procedurach projektowania mechatronicznego, należy posiadać umiejętność posługiwania się narzędziami bazującymi na paradygmatach dyscyplin tworzących podstawy mechatroniki, dzięki którym można wdrażać podstawowe zasady mechatroniki – jako nowego kierunku twórczości technicznej.

Główne idee projektowania mechatronicznego to:

1. Modelowanie zjawisk nieliniowych w obszarze nowoczesnego przedsiębiorstwa przemysłowego, np. linii produkcyjnej, nowoczesne projektowanie zintegrowanego gniazda produkcyjnego i linii technologicznej, zawierającej: obrabiarkę CNC, robota przemysłowego, przenośniki, ładowarki, urządzenia pomiarowe oraz sieć przemysłową w układzie ze sterowaniem Master-Slave i sterownikiem PLC bądź centralnym komputerem sterującym procesem technologicznym.
2. Szybkie projektowanie i prototypowanie w zakresie *high technology* z wykorzystaniem zintegrowanego formalizmu mechaniki, elektroinformatyki oraz telekomunikacji.
3. Zapewnienie zintegrowanego systemu sterowania i elementu wykonawczego.
4. Zastosowanie nowoczesnych materiałów stalowych i aktuatorów opartych na kryształach piezoelektrycznych, technologii MEMS itp.
5. Zastosowania nowoczesnych pakietów komputerowych typu Matlab Simulink, LabView do projektowania układów regulatora nieliniowego i mikrokontrolera.
6. Modelowanie zjawisk ruchu robota w układzie off-line z wykorzystaniem oprogramowania CAD (CATIA, Unigraphics, Solid Works) oraz metody układów wieloczołowych.
7. Modelowanie zjawisk ruchów niepożądanych maszyn (drgań) i budowa kompaktowych urządzeń mechatronicznych tłumiących drgania.
8. Propagowanie idei projektowania ze zwróceniem uwagi na estetykę, nowoczesny wzór z zastosowaniem sterowania procesem projektowym metodami mechatroniki i design.
9. Innowacje poprzez zintensyfikowane wykorzystanie najnowszych osiągnięć z pogranicza nauki, technologii, biznesu i potrzeby.
10. Kreowanie sylwetki inżyniera mechatronika metodami klasycznymi i wykorzystaniem technik rzeczywistości wirtualnej.

Tworzenie funkcjonalnego modelu jest kluczowe w pierwszej fazie projektowania mechatronicznego (rys. 1.3).

Rys. 1.3. Schemat funkcjonalnego modelu od potrzeby do wytworu mechatronicznego.



### 1.5. O zastosowaniu informatyki

Mechatronika bazuje na synergicznym współdziałaniu mechaniki, elektroniki i informatyki.

Wśród narzędzi informatyki można wyróżnić m.in.:

- a) systemy do zarządzania bazami danych;
- b) środowisko do tworzenia zespołowej dokumentacji inżynierskiej – LaTeX;
- c) środowisko programistyczne do pracy grupowej – Eclipse;
- d) CAD/CAM – środowisko wspomaganie projektowania inżynierskiego;
- e) CVS – system do kontroli wersji;
- f) programy do analizy obrazów cyfrowych;
- g) pakiety matematyczne wspomagające obliczenia (Matemathica, Matlab, MatCAD);
- h) systemy analizy dźwięku;
- i) systemy do tworzenia symulacji (Inventor, Solid Works, Catia);
- j) GIS – geograficzne systemy informacyjne.

## 2. Prekursorzy mechatroniki – krótki rys historyczny

Trudno jest wskazać moment historyczny, będący początkiem nowej dyscypliny naukowej. Nie inaczej jest w przypadku teorii maszyn i mechanizmów – dyscypliny, która tworzyła się na podstawie uzyskiwanych przez wiele stuleci wyników w dziedzinie rozwijającej się techniki. Z niej to wyodrębniła się mechatronika.

W szczególności należy wymienić prace teoretyczne Włocha Girolamo Cardano z XIV wieku, Szwajcara Leonharda Eulera z XVIII wieku, a także dokonania z czasów pierwszej rewolucji technicznej Jamesa Watta, twórcy maszyny parowej (1769) i regulatora odśrodkowego, co dało podstawę do wyodrębniania się nauki o mechanice maszyn. Było to możliwe dzięki powstawaniu pierwszych szkół politechnicznych: praskiej politechniki (1792), École Polytechnique w Paryżu (1794) i Politechniki Wiedeńskiej (1815). Andre Ampère w 1806 roku pierwszy podjął badania struktury mechanizmów. Ze szkoły politechnicznej w Paryżu pochodzą prace J. Ponceleta, dotyczące badania ząbów i podstaw regulacji maszyn (1829). Robert Willis w dziele *Principles of Mechanism, designed for the use of students in the universities and for engineering students generally* wydanym w 1841 roku jako pierwszy wyodrębnił teorię mechanizmów jako nową dyscyplinę. Dalszy dynamiczny rozwój tej nowej dyscypliny związany był z pracami:

- *Elementi di cinematica applicata* G. Giulio (1847),
- *Traité de Cinématique*, książki Francuza Ch. Laboulaye'a (1849),
- *Teoria mechanizmów...* P.L. Czebyszewa (1854),
- *Theoretische Kinematik* F. Reuleaux (1875),
- *Lehrbuch der Kinematik* L. Burmestra (1888).

Wymienieni uczeni stworzyli „szkołę” teorii maszyn i mechanizmów poprzez sformułowanie szczegółowych zagadnień kinematyki oraz technicznych rozwiązań mechanizmów, niejednokrotnie związanych z ewolucją konstrukcji maszyny parowej i maszyn włókienniczych. Szczególną rolę odegrała rosyjska szkoła naukowa, wykreowana przez I.A. Wyszniegradzkiego, N.E. Żukowskiego, N.T. Mielcarowa, L. Assura oraz W.W. Dobrowolskiego, I.I. Artobolevskiego i N.G. Brujewicza.

W Polsce Witold Aulich w 1929 roku rozpoczął po raz pierwszy wykłady „Zasady Teorii Mechanizmów”, wprowadzone na stałe do programu wydziału mechanicznego Politechniki Lwowskiej. Jest autorem oryginalnej pracy *Czworobok czy łańcuch kinematyczny* oraz rozprawy *O zależności kształtu maszyny od jej wielkości (Studium morfologiczne, 1932)*. W dniu 3 października 1938 roku wygłosił on wykład inauguracyjny „Cywilizacja, stan inżynierski i szkoły politechniczne”, dając w nim wyraz niepokoju rozwojem cywilizacji technicznej. Swoje wystąpienie zakończył zdaniem „Jakie będą szkoły techniczne – taki będzie stan inżynierski i taki będzie jego udział w dalszej budowie i utrzymaniu wspólnego dzieła ludzkości, dzieła cywilizacji” – postulat aktualny do dnia dzisiejszego.

Po II wojnie światowej pionierami teorii maszyn i mechanizmów w Polsce byli Robert Szewalski, Waclaw Moszyński, Jan Oderfeld i Adam Morecki. Dzięki aktywności międzynarodowej polskich uczonych w dziedzinie TMM w 1969 roku w Zakopanem powołana została Międzynarodowa Federacja Teorii Maszyn i Mechanizmów (*International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms – IFToMM*). Tworzyło ją wówczas 13 komitetów narodowych teorii mechanizmów

i maszyn; pierwszym jej prezydentem został akademik Jan Artobolevski, a w latach 1991-1995 funkcję tę piastował prof. Adam Morecki (1994-1998). Dyscyplina teorii maszyn i mechanizmów, zwana niekiedy mechaniką maszyn, stała się więc wspólnym dorobkiem uczonych wielu narodów i jest częścią światowej nauki, o czym najlepiej świadczą kongresy organizowane co 4 lata przez Międzynarodową Federację Teorii Maszyn i Mechanizmów, zwane ostatnio światowymi kongresami nauki maszyn i mechanizmów. Właśnie w dyscyplinie Teorii Maszyn i Mechanizmów formułowano podstawy regulacji ruchu maszyn, a jako nowa dziedzina wyodrębniła się z niej interdyscyplinarna mechatronika reprezentująca nową filozofię w projektowaniu i wytwarzaniu maszyn.

Początek tego, co dziś ogólnie nazywamy mechatroniką dały udane i praktycznie zrealizowane układy, dzięki którym uzyskano samoczynną regulację obrotów maszyny za pomocą regulatorów odśrodkowych czy układach hydraulicznych projektowanie regulacji poziomów cieczy w zbiornikach. Niezależnie od tego, stosując zasady mechaniki i elektrotechniki, rozwijano również podstawy teoretyczne analizy działania takich układów.

Podstawy mechatroniki są dyscypliną naukową, której dorobek z różnych dziedzin nauki działów techniki usystematyzowano i podjęto próby uogólnienia jako multidyscyplinę integrującą mechanikę, hydraulikę, teorię mechanizmów i maszyn oraz elektroniczne sterowanie w celu pełnego wykorzystania synergizmu w projektowaniu wydajnych i niezawodnych maszyn we wszystkich dziedzinach zastosowań.

W wielu działach przemysłu funkcjonują zespoły maszynowe, które są skomplikowanymi strukturami złożonymi z zespołów napędowych, roboczych i sterowania. Złożoność procesów występujących w maszynach wytworzyła konieczność do traktowania maszyn jako systemów technicznych pozostających w ścisłej relacji z otoczeniem, w którym funkcjonują. Fakt ten narzuca określone zadania modelowania fizycznego i matematycznego zespołów maszynowych, metody optymalizacji konstrukcji i wreszcie problemy związane z regulacją oraz sterowaniem ruchu. W ten sposób z teorii maszyn i mechanizmów wykreowała się mechatronika (rys. 1.2).

Schemat struktury systemu mechatronicznego (rys. 2.1), w którym bezpośrednia ingerencja człowieka-operatora w realizowany proces zastąpiona jest dialogiem między operatorem a sterownikiem mikroprocesorowym. Jest to możliwe dzięki urządzeniom do wprowadzania informacji, które po odpowiednim przetworzeniu są dostarczane do podzespołów wykonawczych, aby w zaprogramowany sposób wykonywać założone zadanie.

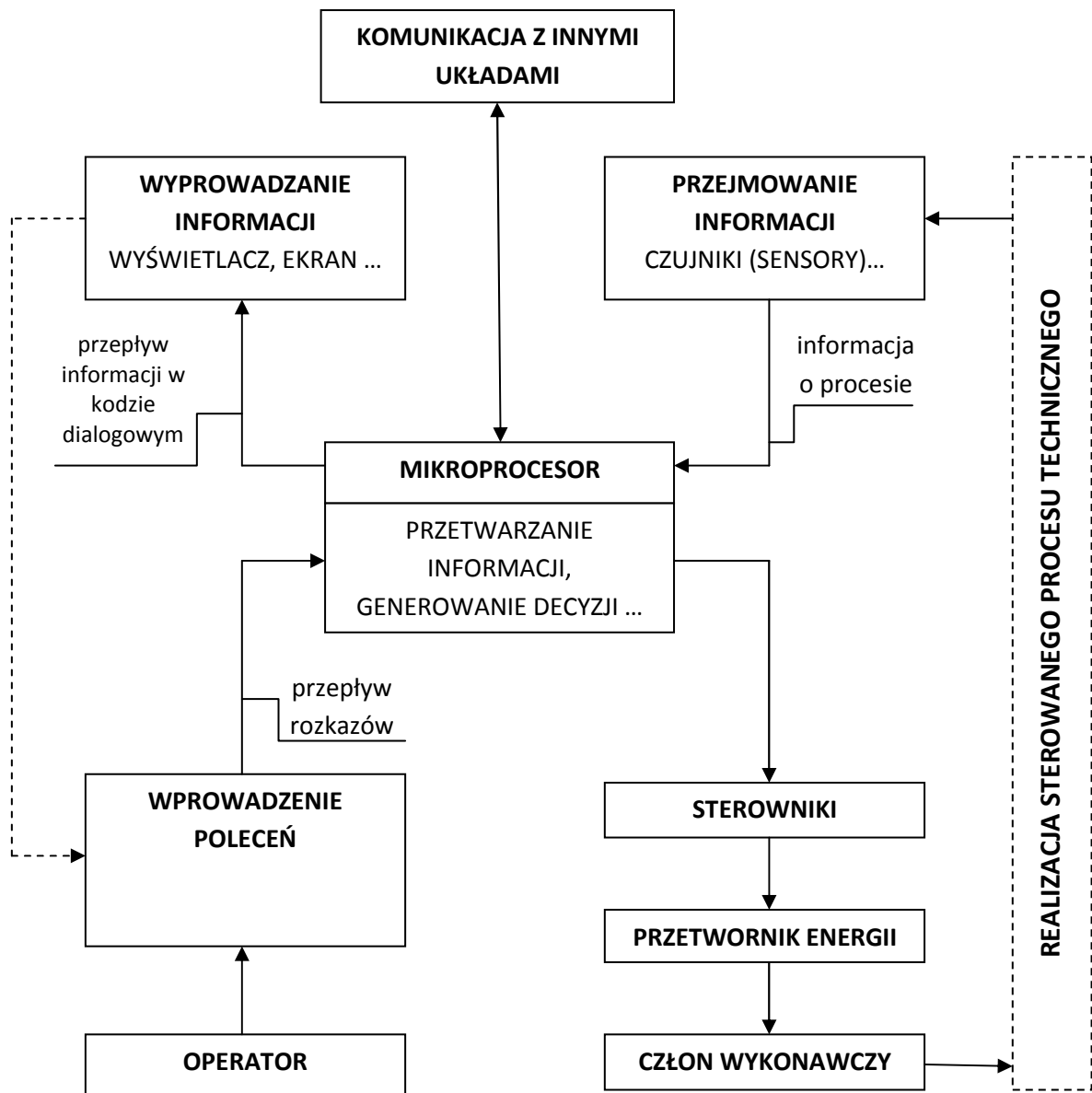
Zadane ruchy lub oddziaływania są definiowane dla elementu wykonawczego (chwytak robota przemysłowego, platforma robota mobilnego). Współrzędne zadanych wektorów ruchu i oddziaływań opisuje się w układzie odniesienia najczęściej skojarzonym z wybranym punktem otoczenia. Współrzędne te tworzą przestrzeń zewnętrzną nazywaną często przestrzenią zadaniową. Mogą być zadawane przez system wizyjny, radiowy lub być wpisywane z klawiatury komputera nadrzędnego. Współrzędne te stanowią dane wejściowe algorytmów generacji trajektorii, obliczających na bieżąco zadane współrzędne uogólnione. Algorytmy te są zainstalowane w komputerze nadrzędnym koordynującym działanie wszystkich mechanizmów układu mechatronicznego. W systemie mogą wystąpić dwa rodzaje sprzężeń zwrotnych. Pierwszy rodzaj stanowią sygnały z czujników wewnętrznych, drugi – sygnały z kamer lub z nadajników



radiowych przesyłających informacje z czujników ruchu lub działań w przestrzeni zewnętrznej. Kamery i czujniki z radiowym interfejsem stanowią czujniki zewnętrzne.

W początkowej fazie studium modelowania mechatronicznego niezbędna jest jednak znajomość analizy strukturalnej mechanizmów. Tym zagadnieniom poświęcony zostanie 3. rozdział podręcznika.

Rys. 2.1. Schemat struktury systemu mechatronicznego.



### 3. Analiza strukturalna mechanizmów

#### 3.1. Podstawy teoretyczne

Mechanizmem nazywamy układ mechaniczny przeznaczony do przekształcania ruchu jednego albo kilku członów w zadany ruch innych członów. W każdym mechanizmie możemy wyodrębnić człony i pary kinematyczne.

Członem nazywamy jeden lub kilka sztywno połączonych ciał. Człon nieruchomy nazywamy ostoją. Prostą parą kinematyczną nazywamy ruchowe połączenie 2 członów. Główną cechą par kinematycznych jest ograniczenie liczby stopni swobody ruchu względnego każdego z członów. Ze względu na liczbę więzów nałożonych na względny ruch członów, pary kinematyczne można podzielić na klasy. Klasa kinematycznej pary odpowiada liczbie więzów nałożonych na względny ruch członów wchodzących w tę parę.

W zależności od sposobu połączenia członów ilość więzów może przyjmować liczby od 1 do 5 i dlatego wszystkie pary kinematyczne dzielimy na 5 klas (tabl. 3.1). Wewnątrz każdej klasy – w zależności od rodzaju wykluczonego ruchu członów – pary kinematyczne dzielimy na postacie. Pary kinematyczne ze względu na rodzaj ruchu względnego można podzielić na przestrzenne i płaskie, a ze względu na sposób połączenia na pary niższe i wyższe. Niższymi nazywamy takie pary, których człony stykają się powierzchnią. W wyższych parach człony posiadają punkt lub linię styczności i w przeciwieństwie do par niższych nie mogą przenosić znacznych obciążeń. W tabl. 3.2 pokazano schematy członów par kinematycznych.

Układ członów połączonych parami kinematycznymi nazywamy łańcuchem kinematycznym. Łańcuchy kinematyczne dzielimy na otwarte i zamknięte, proste i złożone, płaskie i przestrzenne.

Tabl. 3.1. Postacie par kinematycznych.

Klasa	Liczba stopni swobody	POSTAC		
		1	2	3
I	5			
II	4			
III	3			
IV	2			
V	1			

Tabl. 3.2. Schematy członów par kinematycznych.

Obiekt	Schemat strukturalny
Człon prosty wchodzący w dwie pary V klasy	
Człon złożony wchodzący w trzy pary V klasy	
Człon w kształcie sztywnego kąta	
Ostoja półpary obrotowej	
Ostoja półpary postępowej	
Para obrotowa V klasy	
Para postępową V klasy	
Para śrubowa	
Para walcowa IV klasy	
Para kulista III klasy	
Wyższe pary kinematyczne	

### 3.1.1. Stopień ruchliwości łańcucha kinematycznego

Liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego względem członu przyjętego za nieruchomy nazywamy stopniem jego ruchliwości. Ruchliwość łańcucha kinematycznego wyznaczamy ze wzoru strukturalnego:

$$W = 6n - \sum_{k=1}^5 k \cdot p_k, \quad (3.1)$$

gdzie:

$n$  – liczba ruchomych członów,

$p_k$  – liczba par kinematycznych  $k$  klasy,

$k \cdot p_k$  – liczba więzów nałożonych na człon przez parę  $k$ -tej klasy.

W rozwiniętej postaci wzór (3.1) przyjmuje postać:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (3.2)$$

Dla mechanizmów płaskich, czyli mechanizmów należących do tzw. trzeciej rodziny, wzór na ruchliwość przyjmuje postać:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (3.3)$$

Wzory (3.2) i (3.3) wyrażają liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego w ruchu bezwzględny, tj. względem układu współrzędnych niezwiązanych z członami łańcucha, w przypadku gdy na wszystkie człony łańcucha kinematycznego nałożono  $m = 1, 2, 3, 4$  więzów ogólnych, wzór strukturalny przyjmuje postać:

$$W = (6 - m)n - \sum_{k=m+1}^5 (k - m) \cdot p_k, \quad (3.4)$$

przy założeniu, że więzy „m” nie pokrywają się z więzami „k”. Ponieważ mechanizm przedstawia sobą łańcuch kinematyczny, to do określenia jego ruchliwości stosujemy te same wzory strukturalne.

### 3.1.2. Klasyfikacja płaskich mechanizmów

Ogólnie przyjęto klasyfikację opracowaną przez Assura-Artobolewskiego, która opiera się na pojęciu grupy i 4 założeniach.

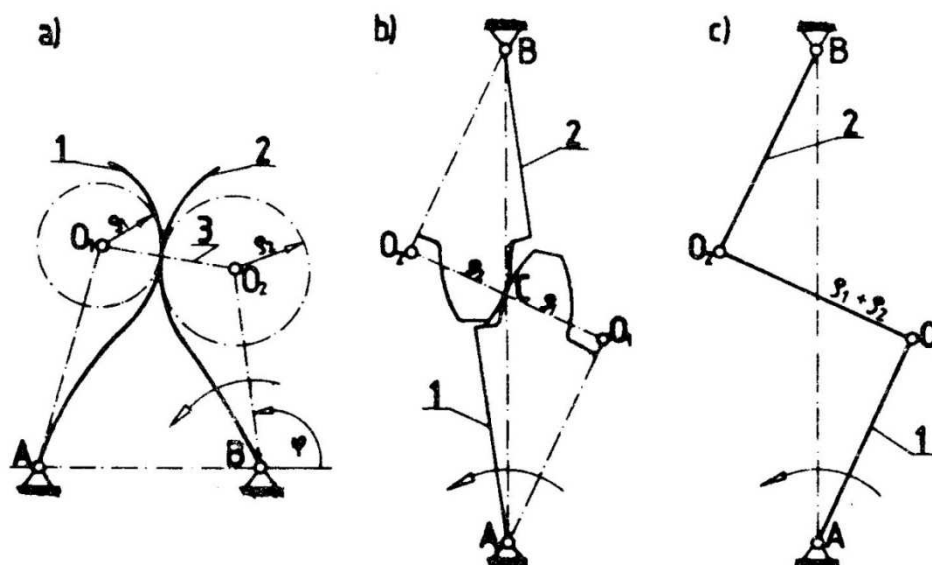
Grupą Assura nazywamy otwarty łańcuch kinematyczny, który dołączony do ostoji posiada ruchliwość zerową.

Przyjęte założenia:

1. Liczba członów napędzających równa jest ruchliwości mechanizmu.
2. Człony napędzające wchodzi w pary kinematyczne z ostoją.
3. Wszystkie pary kinematyczne rozpatrywanego mechanizmu są V klasy.
4. Człon napędzający wraz z ostoją tworzy grupę I klasy.

Jeśli w mechanizmie jest para IV klasy, np. krzywkowa (rys. 3.1a), lub para zazębienia (rys. 2.1b), to zastępujemy ją łańcuchem kinematycznym przez dołączenie 1 członu i 2 par O1, O2 V klasy (rys. 3.1a,c).

Rys. 3.1. Sposób zastąpienia pary kinematycznej czwartej klasy, łańcuchem kinematycznym z parami V klasy.




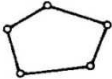


Zgodnie z tą klasyfikacją złożone mechanizmy otrzymujemy w wyniku dołączenia do członu napędzającego grup Assura. Grupy Assura dzielą się na klasy, a wewnątrz każdej klasy na rzędy, zaś wewnątrz rzędów na postacie, odmiany i modyfikacje.

Klasę grupy Assura definiujemy powiększonym o jeden najwyższym wymiarem sympleksu euklidesowego, który w niej można wyodrębnić.

Sympleks posiada wymiar  $r$ , jeśli jest utworzony z  $r+1$  wierzchołków, które w grupach Assura odpowiadają parom kinematycznym. Jeśli przyjąć umownie liczbę wierzchołków sympleksu za wymiar konturu, to klasę grupy można również zdefiniować wymiarem konturu. W tabl. 3.3 pokazano sympleksy: jednowymiarowy – człon, dwuwymiarowy – trójkąt złożony z 3 członów, trójwymiarowy – czworobok złożony z 4 członów, czterowymiarowy – pięciobok złożony z 5 członów.

Tabl. 3.3 Klasy konturu.

SYMPLEKSY	WYMIAR $p$ SYMPLEKSU	KLASA KONTURU $p + 1$
	1	2
	2	3
	3	4
	4	5

Rząd grupy Assura określany jest liczbą pólpar swobodnych, którymi grupę można przyłączyć do ostoi. Postać grupy określa sposób wzajemnego powiązania jej członów i par kinematycznych, obrotowych oraz postępowych.

Odmianę grupy otrzymujemy przez zmianę niektórych łańcuchów kinematycznych, zaś modyfikację grupy przez zastąpienie niektórych jej par kinematycznych innymi.

Pełna klasyfikacja grupy obejmuje zatem jej klasę, rząd, postać, odmianę oraz modyfikację.

Klasę mechanizmu określa najwyższa klasa wyodrębnionej w nim grupy. W tabl. 3.4 pokazano schematy niektórych grup Assura, zestawiając je w kolejności zależnej od klasy 1 rzędu, wyszczególniono również umownie korbę jako grupę I klasy, a ponadto pólpar swobodne zaznaczono 2 okręgami. Wszystkie zestawione grupy zawierają wyłącznie pary obrotowe.

Można oczywiście zestawić schematy o parach obrotowych i postępowych – w taki sposób w każdej klasie tworzymy różne postacie grup.

Dla przykładu w tab. 3.5 zestawiono różne postacie grupy Assura II klasy 2 rzędu. Zestawione postacie usystematyzowano i oznaczono w zależności od rodzaju względnego ruchu obrotowego O i postępowego P członów tworzących pracy w grupie.

Tabl. 3.4. Schematy podstawowych grup Assura.

Schemat strukturalny grupy	klasa grupy	rząd grupy	liczba członów	liczba par V klasy
	I	1	1	2
	II	2	2	3
	III	3	4	6
	III	4	6	9
	IV	2	4	6
	IV	3	6	9
	V	3	6	9
	V	4	8	12
	VI	3	6	9

Tabl. 3.5. Możliwe postacie grup Assura II klasy.

SCHEMATY STRUKTURALNE	POSTAĆ	SYMBOL
	1	000
	2	00P
	3	0P0
	4	POP
	5	PP0 (OPP)

### 3.1.3. Człony bierne i ruchliwość lokalna

Niekiedy przy konstruowaniu mechanizmu wprowadza się człony, które formalnie zmniejszają stopień ruchliwości, a w rzeczywistości nie wpływają na kinematykę całego mechanizmu. Takie więzy pozorne, które są tylko powtórzeniem więzów już nałożonych w inny sposób, nazywamy *biernymi*. Przy strukturalnej analizie nie należy brać pod uwagę członów, które nakładają więzy bierne. Niektóre mechanizmy mają stopnie swobody, które nie wpływają na kinematykę całego mechanizmu. Takie stopnie swobody nazywamy *lokalnymi*, zaś o mechanizmie będziemy mówić, że posiada ruchliwość lokalną.

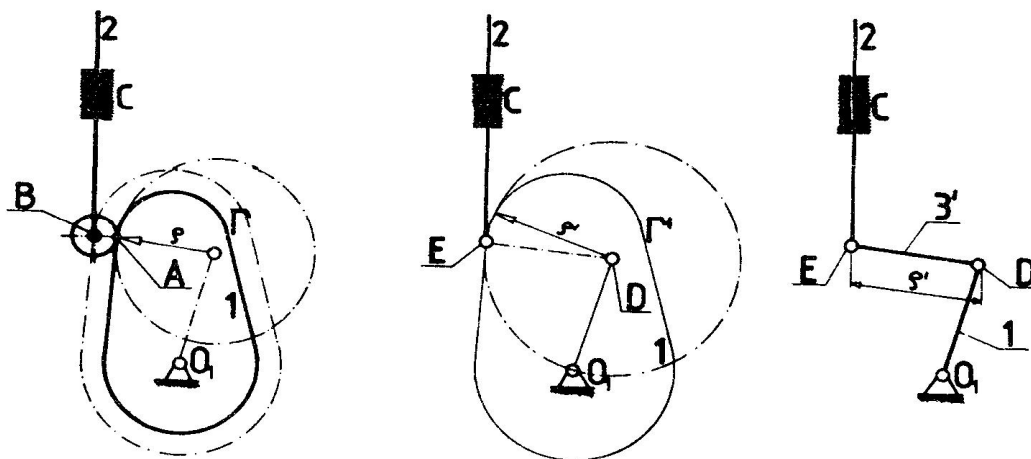
Przykładem może być mechanizm krzywkowy (rys. 3.2). Obrót rolki wokół osi B nie wywołuje ruchu ani krzywki 1, ani też popychacza 2, niemniej jednak mechanizm ma 2 stopnie swobody względem podstawy, z tym że jeden dotyczy całego mechanizmu, a drugi samego krążka. Łatwo bowiem zauważyć, że określonemu prawu ruchu krzywki odpowiada w pełni określony ruch popychacza, chociaż wobec możliwości ruchu obrotowego rolki stopień ruchliwości mechanizmu będzie:

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2. \quad (3.5)$$

Bez naruszenia kinematyki całego mechanizmu można usunąć rolkę, profil  $\Gamma$  powiększyć o promień rolki, zaś popychacz połączyć bezpośrednio z krzywką wyższą parą E. Zmodyfikowany mechanizm (rys. 3.2b) posiada 1 stopień ruchliwości, czyli:

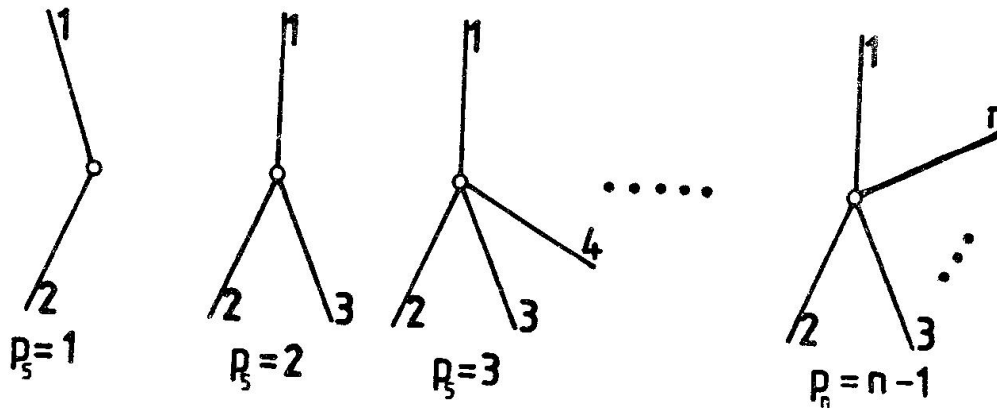
$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1. \quad (3.6)$$

Rys. 3.2. Sposób zastąpienia ruchliwości lokalnej na przykładzie mechanizmu krzywkowego.



Dla określenia klasy mechanizmu należy zamienić wyższą parę E fikcyjnym członem 3', który wchodzi w 2 pary obrotowe E i D. Przeprowadzając analizę strukturalną mechanizmów, należy zwrócić uwagę na fakt, że w konstrukcji mechanizmu można spotkać przeguby łączące nie 2 człony, a 3 i więcej (rys. 3.3). W tym przypadku przeguby takie nazywamy podwójnymi, potrójnymi itd. – w podwójnym przegubie  $p_5 = 2$ , zaś w potrójnym  $p_5 = 3$ . Jeżeli przegub łączy  $n$  członów, to tworzy on wielokrotną parę kinematyczną o liczbie par  $n - 1$ .

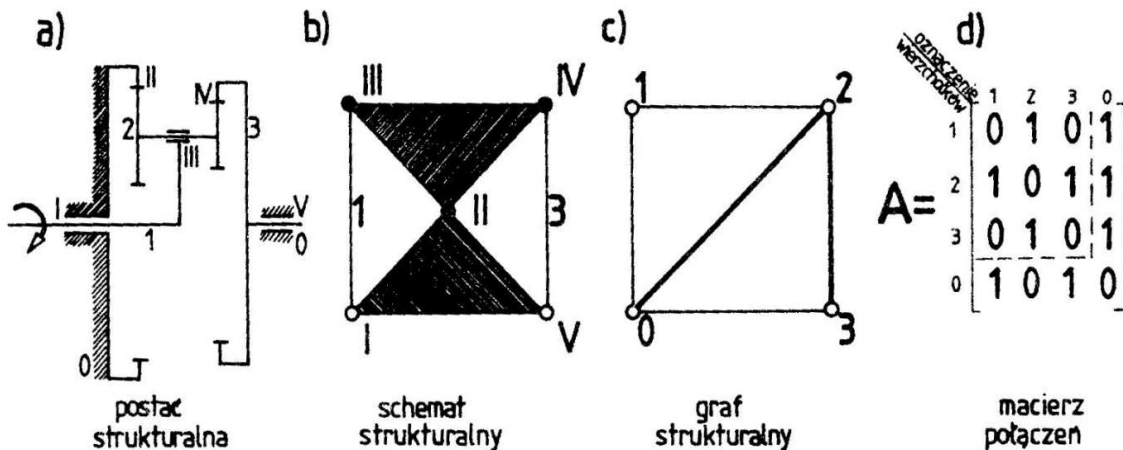
Rys. 3.3. Wielokrotne pary kinematyczne.



### 3.2. Schemat strukturalny, graf strukturalny i macierz połączeń

Na podstawie postaci strukturalnej mechanizmu (rys. 3.4a) można sporządzić schemat strukturalny mechanizmu (rys. 3.4b). Każdemu członowi przyporządkujemy wówczas wielokąt o wierzchołkach, które reprezentują półpary kinematyczne. Pary obrotowe oznaczamy kółkami pustymi, a pary zazębienia – zaciemnionymi.

Rys. 3.4. Model przekładni obiegowej w różnych reprezentacjach.



Graf strukturalny tworzymy przez odwrotne przyporządkowanie. Członom mechanizmu odpowiadają wierzchołki grafu, natomiast parom kinematycznym jego krawędzie. Krawędzie reprezentujące pary zazębienia pogrubiamy (rys. 3.4c).

Graf strukturalny można zapisać w reprezentacji macierzowej o elementach 0 lub 1. W takim zapisie elementom „1” lub „0” macierzy krawędzi grafu zwanej macierzą połączeń (rys. 3.4d) odpowiada istnienie lub nie par kinematycznych. Łatwo zauważyć, że każdy wiersz i każda kolumna o tym samym numerze co wiersz macierzy odpowiada 1 z członów mechanizmu. Po odrzuceniu wiersza i kolumny odpowiadających ostoi pozostała liczba jedynek w wierszu (kolumnie) charakteryzuje rząd konturu członu, a tym samym jego klasę. Na rys. 3.4 pokazano schemat strukturalny (b), graf strukturalny (c) i macierz połączeń (d).



### 3.3. Analiza strukturalna mechanizmu

W celu przeprowadzenia analizy strukturalnej mechanizmu należy:

- określić stopień ruchliwości mechanizmu;
- ustalić liczbę grup przyłączonych do członu napędzającego;
- sporządzić schemat strukturalny, graf strukturalny i macierz połączeń;
- podać klasę, rząd i postać każdej grupy;
- podać klasę mechanizmu;
- podać formułę tworzenia mechanizmu.

Dla przykładu, na rys. 3.5 pokazano mechanizm wahaczowy, którego liczba członów  $n = 5$ , liczba par kinematycznych  $p_5 = 7$ . Zgodnie ze wzorem (3.4) ruchliwość mechanizmu:

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1, \quad (3.7)$$

zatem mechanizm jest jednobieźny.

Formułę tworzenia zapisujemy w postaci:

$$I(0,1) \rightarrow III(2,3,4,5). \quad (3.8)$$

Na rys. 3.5b skonstruowano schemat strukturalny, a na rys. 3.5c – graf strukturalny mechanizmu.

Macierz połączeń jest następująca:

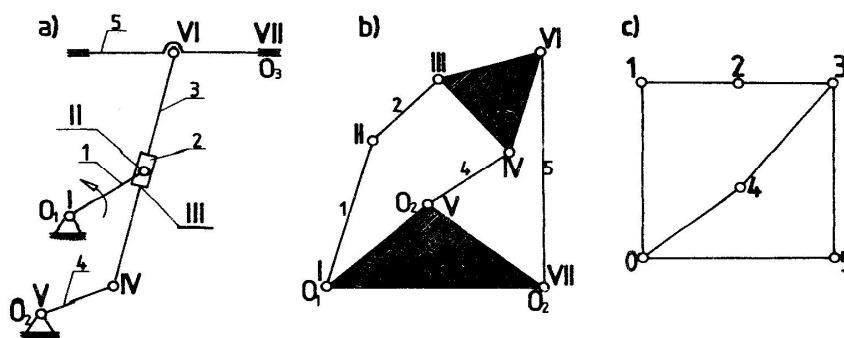
$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} \begin{array}{c} * \\ * \\ * \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (3.9)$$

\*)\*\*,\*\*) - oznaczenia wierzchołków grafu

Trzeci wiersz kolumny wskazuje, że mechanizm jest trzeciej klasy. Wiersz ten określa bowiem rząd konturu i klasę grupy III (III (2, 3,4,5)). Grupa ta jest wyraźnie widoczna w schemacie strukturalnym (rys. 3.5b).

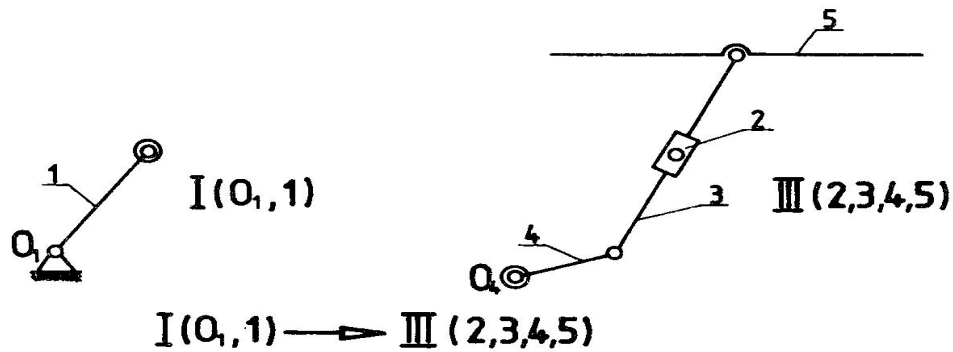
Na rys. 3.6 pokazano grupy mechanizmu i formułę tworzenia mechanizmu. Analizowany mechanizm jest trzeciej klasy.

Rys. 3.5. Mechanizm III klasy (a), i jego schemat strukturalny (b).



Na rys. 3.5 cyframi arabskimi oznaczono człony (ogniwa) mechanizmu, natomiast cyframi rzymskimi – pary kinematyczne.

Rys 3.6. Formuła tworzenia mechanizmu.



Z rys. 3.6 wynika, że z mechanizmu można było wyodrębnić grupę pierwszej klasy I(0,1) i grupę trzeciej klasy III(2,3,4,5). Oznacza to, że mechanizm jest trzeciej klasy, czyli najwyższej klasy wyodrębnionej z niego grupy.

### 3.4. Motywacja techniczna – zastosowania

Poznanie zasad sporządzania schematów strukturalnych rozszerza możliwości prowadzenia analizy mechanizmów. Ustalenie ruchliwości i formuły tworzenia mechanizmu pozwala na określanie liczby stopni swobody i kolejności połączeń pomiędzy członami mechanizmu. Analiza strukturalna ułatwia więc tworzenie różnych mechanizmów, a poprzez ujęcie w umownym schemacie strukturalnym przeliczalnego zbioru mechanizmów wskazuje na cały obszar możliwych rozwiązań w projektowaniu maszyn mechatronicznych.

#### 4. Paradygmat<sup>1</sup> mechatroniki

Mechatronika, zaakceptowana jako nowy kierunek studiów, stała się wyzwaniem dla inżynierów w projektowaniu współczesnych zespołów maszynowych. Jest to konsekwencją wysokiej konkurencyjności rynku oraz technicznego i ekonomicznego postępu elektrotechniki oraz nanotechnologii, w szczególności w zakresie nowych generacji mikroprocesorów. Najkrótszą i najczęściej używaną definicją mechatroniki, przyjętą przez International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms, jest określenie mechatroniki jako: *synergicznej kombinacji mechaniki precyzyjnej, elektronicznego sterowania i systemowego myślenia przy projektowaniu produktów i procesów produkcyjnych*.

Można twierdzić, że mechatronika została wykreowana poprzez ewolucję napędów i sterowania maszyn, redukując funkcję układów elektromechanicznych do dostarczania energii, a resztę funkcji pozostawiając technice komputerowej. Historycznie – technika najpierw opanowała przetwarzanie masy, później przysła kolej na tworzenie układów przetwarzania energii, a obecnie skupia się na doskonaleniu przetwarzania informacji drogą elektroniczną i przy wykorzystaniu techniki mikroprocesorowej. O ile w latach 30. ubiegłego stulecia ewolucja układów napędowych maszyn wpłynęła na zastąpienie maszyny parowej napędem elektrycznym, co nie spowodowało zaniku klasycznej budowy maszyn, to w dobie rewolucji mikroelektronicznej i nanotechnologii od początku następuje integracja podukładów mechanicznych oraz elektronicznych w rozumieniu ich synergicznego funkcjonowania. W tym procesie udział wysiłku fizycznego człowieka zmniejsza się radykalnie na korzyść wysiłku umysłowego.

Na rys. 4.1 przedstawiono wpływ wprowadzanej technologii i rozwoju środków technicznych na zmniejszanie się udziału wysiłku fizycznego w relacji jego umysłowych działań twórczych. W konsekwencji tego w ostatnim ćwierćwieczu ubiegłego wieku nastąpiło wytwarzanie maszyn inteligentnych pod nazwą układów mechatronicznych. Było to wynikiem burzliwego postępu technicznego w mikroelektronice, technice komputerowej i teorii sterowania. Wkraczając w XXI wiek obserwujemy i doświadczamy rozwijania interdyscyplinarnych umiejętności w wytwarzaniu nowych wyrobów, a dominującą rolę odgrywa mechatronika jako nowy kierunek studiów.

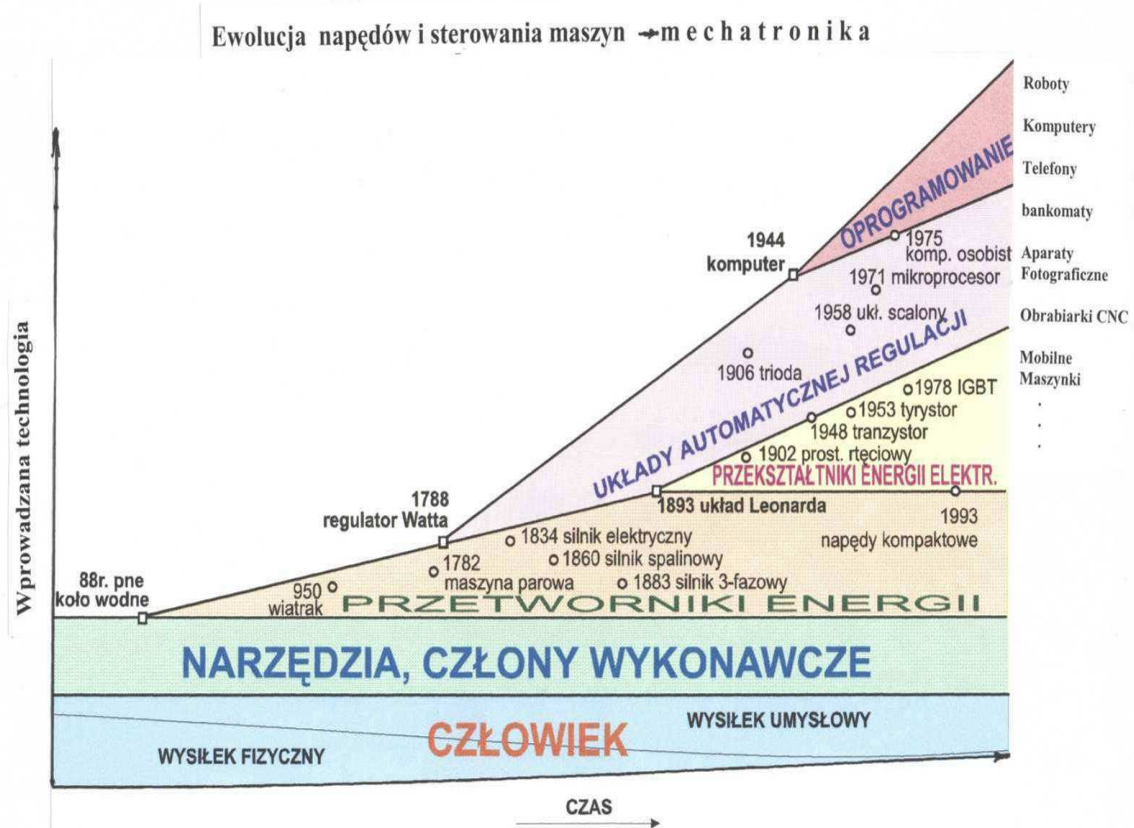
Jeśli mechatronikę zdefiniuje się jako synergiczne współdziałanie mechaniki, elektrotechniki, elektroniki i informatyki, to jej **paradygmat** jest rozszerzonym modelem systemu elektromechanicznego z nałożeniem formalizmu i zasad elektroniki, teorii algorytmów oraz sterowania. W ten sposób **mechatronika** bazuje na paradygmatach mechaniki klasycznej i elektryczności, rozszerzonych przez nałożenie paradygmatów teorii opisujących zintegrowane podukłady sterowania.

Można postawić pytanie, w jakim stopniu mechatronika jest nauką, a w jakim technologią. Wiele spotykanych definicji świadczy o tym, że nie można dać jednoznacznej odpowiedzi, chociażby z uwagi na różnorodność formułowanych definicji. Przytoczymy je również w wersji oryginalnej.

---

<sup>1</sup> Późn. łac. *paradigma* dpn. *paradigmatis* – „przykład, wzór”; z gr. *parádeigma* – „przykład, wzór” od *paradeiknýnai* – „zestawiać; porównywać”; **sposób, wzorzec, model opisowy teorii**.

Rys. 4.1. Wpływ rozwoju technologii na miniaturyzację środków technicznych i na zmniejszanie się udziału wysiłku fizycznego człowieka na rzecz jego działań twórczych.



#### 4.1. Definicje mechatroniki

Spotykane w literaturze różnorodne definicje mechatroniki zależne są od specjalności i potrzeb ich autorów. Różnorodność definicji wyklucza jednoznaczność paradygmatu mechatroniki.

**„A synergistic combination of precision mechanical engineering, electronic control and systems thinking in the design of products and manufacturing processes”.**

A working group of the Commissions of the European Communities IRDAC proposed in 1986

**„Mechatronika to synergiczne współdziałanie mechaniki precyzyjnej, elektronicznego sterowania oraz sposobu myślenia w projektowaniu układów i realizacji procesów wytwarzania”.**

**„A mechatronic system is a system in which advanced motion and advanced control are combined systematically to form a high added value system which can execute advanced purpose functions”.**

Kajitani 1986

**„System mechatroniczny jest systemem zawierającym w sobie cechy zaawansowanego ruchu i zaawansowanego sterowania w taki sposób, że powstaje układ zdolny do realizacji złożonych funkcji celu”.**

**„A synergistic combination of precision mechanical engineering, electronic control and systems thinking in design of products and manufacturing processes”.**

Komisja Społeczności Europejskiej IRDAC 1986

**„Mechatronika to synergiczne współdziałanie technologii mechaniki precyzyjnej, elektronicznego sterowania oraz sposobu myślenia w projektowaniu układów i realizacji procesów wytwarzania”.**

---

**„Combination of mechanics and electronics”.**

Nordisk Industrifond

---

**„Mechatronika jest to kombinacja mechaniki i elektroniki”.**

---

**„Design philosophy which combines electronics and mechanics already at the initial stage of design in order to fully exploit all the possible synergistic advantages in making more efficient, reliable and versatile machines in all fields and application areas”.**

TEKES, Finlandia

---

**„Mechatronika to filozofia, która łączy ze sobą elektronikę i mechanikę w początkowej fazie projektowania w celu pełnego wykorzystania korzyści synergizmu w tworzeniu bardziej wydajnych, niezawodnych i wszechstronnych maszyn we wszystkich dziedzinach zastosowań”.**

---

**„Mechatronics emphasizes a multidiscipline, integrated approach to product and manufacturing system design. It also encompasses the next generation of machines, robots and smart mechanisms necessary for carrying out work in a variety of environments”.**

JTECH Panel Report On Mechatronics in Japan, Science Applications International Corp,  
La Jolla, CA

---

**„Mechatronika jest multidyscypliną, zintegrowaną w celu wyjścia naprzeciw produkcji i systemom projektowania. Zawiera ona również następną generację maszyn, robotów i mechanizmów precyzyjnych potrzebnych do pracy przy różnorodnych elementach”.**

---

**„Mechanical problems in fine mechanisms and electronics devices”.**

Japońskie Stowarzyszenie Inżynierów Mechaników

---

**„Mechatronika jest to zespół zadań mechaniki dotyczących zaawansowanych mechanizmów i urządzeń elektronicznych”.**

---

**„Design and use of electronics and computer systems in mechanical engineering”.**

Uniwersytet Halmstad, Szwecja

---

**„Mechatronika jest to projektowanie i użycie elektroniki oraz systemów komputerowych w inżynierii mechanicznej”.**

---

**„Integrated production systems – synthesis between the machine and computer technologies”.**

Verband Deutscher Maschinen and Anlagenbau

---

**„Mechatronika jest zintegrowanym systemem, synteza pomiędzy technologią maszyny i komputera”.**

---

**„Mechatronics it is area of engineering which integrates electronics software and information technology with mechanical engineering”.**

D. Bradley, A. Brandshaw, D. Seward

---

**„Mechatronika jest dziedziną inżynierii, która integruje elektroniczne oprogramowanie i technologię z mechaniką”.**

Międzynarodowy Journal o nazwie Mechatronics definiował mechatronikę jako:

Mechanics-Electronics Control – Mechanika Elektronika Sterowanie, a obecnie definicje ujmuje zdaniem:

---

**„The science of intelligent Machines – nauka o inteligentnych maszynach”.**

---

**„Mechatronics, its fundamental form can be regarded as the fusion of mechanical and electrical disciplines In modern engineering processes”.**

---

**„Mechatronika to filozofia i technika synergicznego projektowania maszyn i procesów, zdolnych do inteligentnych zachowań, o nierozłącznym powiązaniu mechaniki, elektroniki, informatyki, elektrodynamiki technicznej, myślenia systemowego i ekonomii”.**

Janusz Turowski

---

**„Mechatronika to teoria sterowanego ruchu układów technicznych”.**

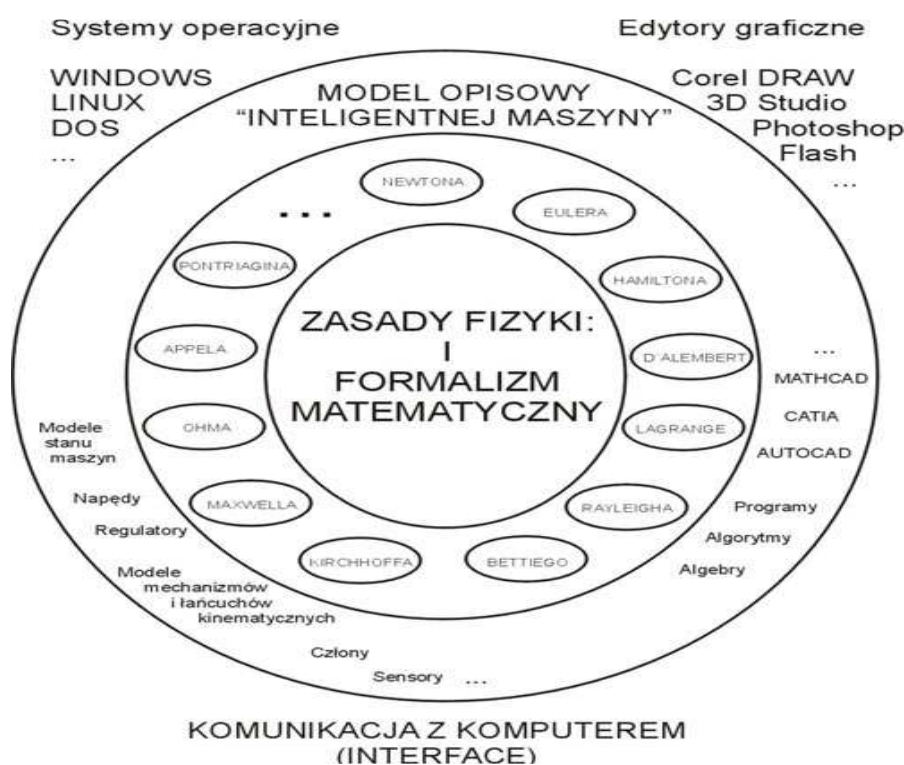
Józef Bolesław Wojnarowski

## 4.2. Zasady dziedzin, które tworzą paradygmat mechatroniki

**Mechatronikę** często definiuje się jako synergiczne współdziałanie mechaniki, elektrotechniki, elektroniki i informatyki. Może być uważana jako **paradygmat**, który jest rozszerzonym modelem systemu elektromechanicznego z nałożeniem formalizmu i zasad elektroniki, teorii algorytmów i sterowania. W ten sposób, w mechatronice paradygmat mechaniki klasycznej i elektryczności został rozszerzony przez nałożenie paradygmatów teorii opisujących zintegrowane podukłady sterowania, schematycznie przedstawiono to na rys. 4.1.

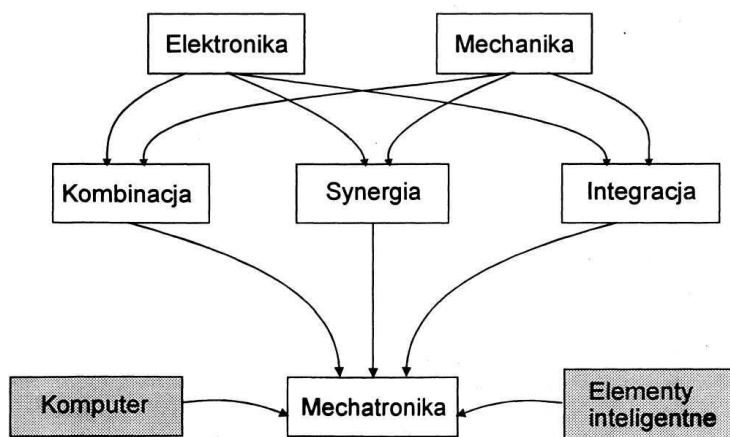
Sieci neuronowe i sztuczna inteligencja, jako wynik naśladowania zjawisk natury, dały asumpt do zastosowań w aktywnym i inteligentnym współdziałaniu podukładów elektrycznych oraz elektronicznych z mechanicznymi. Można twierdzić, że nową dziedziną wiedzy, bogatszą od mechatroniki, będzie neuromechanika, system z inteligentnym synergicznym sterowaniem. Innymi słowy, neuromechanika to dziedzina techniki zajmująca się inteligentnym sterowaniem (neuro), określonym ruchem systemu technicznego – maszyny (mechanika), którego celem jest automatyczne wytwarzanie, przetwarzanie i transmisja energii.

Rys. 4.1. Nałożenie paradygmatów zasad fizyki tworzących model opisowy mechatroniki.



Jeżeli przyjąć, że mechatronika to sposób projektowania i wytwarzania uwzględniający synergiczne relacje podukładów mechanicznych, hydraulicznych, elektrycznych, informatycznych oraz sterowania, to interdyscyplinarność stanowi podstawy konstruowania układów mechatronicznych (rys. 4.2).

Rys. 4.2. Synergiczne relacje podukładów mechatroniki.



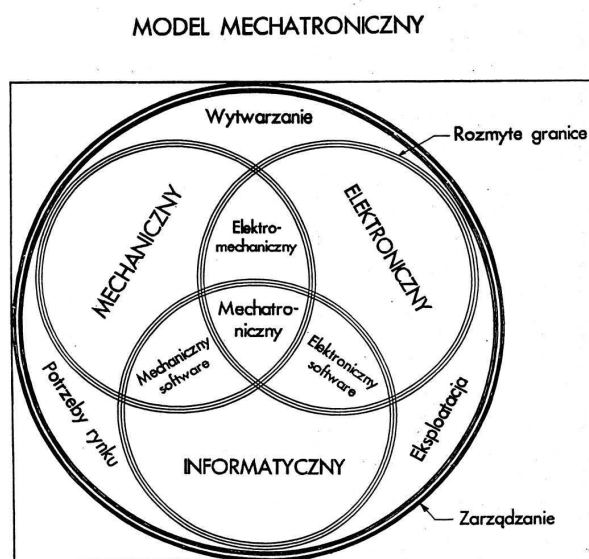
Dzięki temu uzyskujemy inteligentny wytwór – neuromechaniczny, którego własności są skuteczniejsze niż wskazywałaby na to suma cech wynikająca z oddzielnie traktowanych podukładów tworzących układ mechatroniczny – inteligentną maszynę.

Zadaniem mechatroniki jest wytwarzanie multifunkcyjnych wytworów o złożonej strukturze wewnętrznej, ale o jednolitych własnościach funkcjonalnych, a więc wytworów, które działają inteligentnie w zmieniającym się środowisku i które mogą komunikować się z operatorem nawet za pomocą naturalnego języka. Osiąga się to przez fizyczne integrowanie mikroelektroniki i oprogramowania zespołami elektromechanicznymi oraz hydraulicznymi (rys.4.3).

Mechatronika obejmuje więc programowalne urządzenia elektroniczne oraz układy elektromechaniczne o zbudowanej i rozproszonej budowie sensorów przetwarzania sygnałów aktywności i komunikacji.

Rys. 4.3. Modele mechatroniczne w kategoriach zbiorów.

a)



b)

## Mechatronika - TEKSTRONIKA

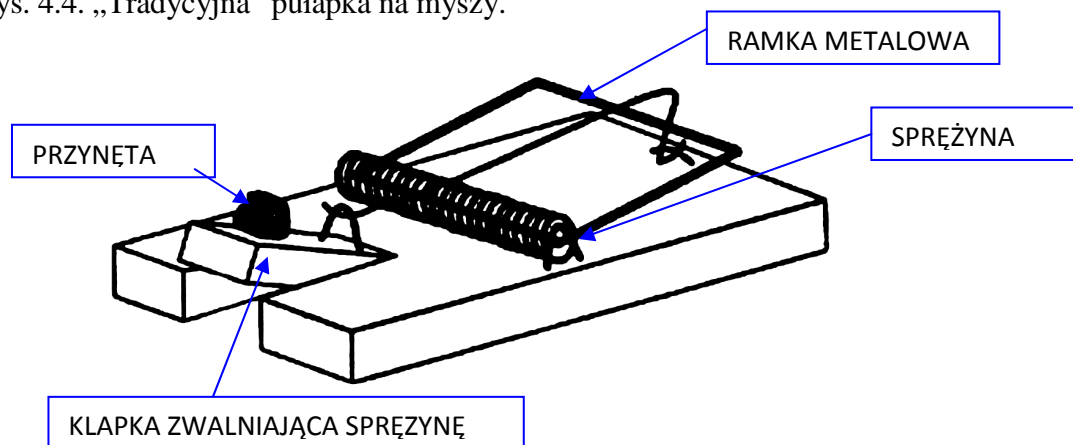


## TEXTile elecTRONICS

### 4.3. Kiedy stosowanie systemów mechatronicznych jest sensowne?

Można przypuszczać, że w każdym przypadku opłaca się zastosować rozwiązanie nowocześniejsze, ale niestety nie zawsze tak jest. Łatwo możemy to zaobserwować na przykładzie zwykłej, doskonale znanej pułapki na myszy. Jest ona bardzo prosto zbudowana i spełnia wszystkie założone funkcje. Po naciśnięciu przez mysz klapki z przynętą zwalniana jest sprężyna i mysz zostaje przygnieciona przez metalową ramkę. Urządzenie jest wielorazowego użytku i nie zużywa energii dostarczanej z zewnątrz. Siłą napędową jest w tym przypadku sprężyna (rys. 4.4).

Rys. 4.4. „Tradycyjna” pułapka na myszy.

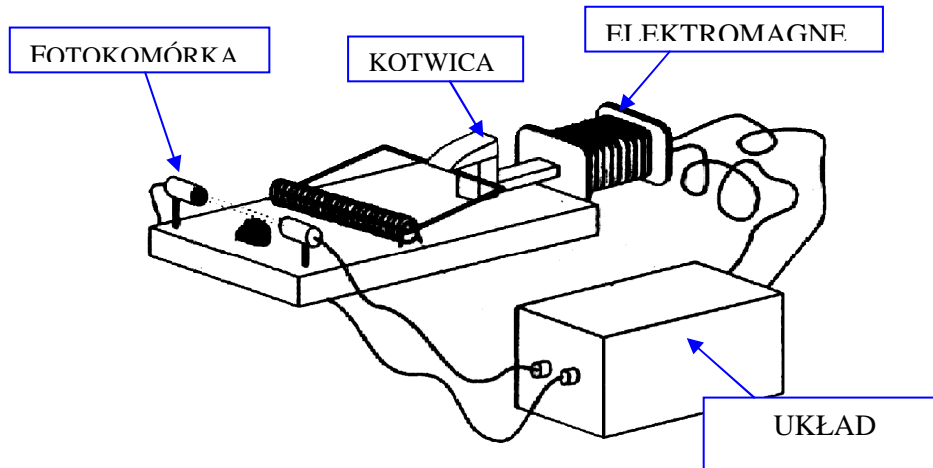


Sterowanie i praca w klasycznej pułapce są wykonywane przez najprostsze mechanizmy. Takie same funkcje może spełniać inny układ, w którym zastosowane zostały elementy mechatroniczne (rys. 4.5). Rolę czujnika spełnia tutaj nie klapka działająca na nacisk, jak miało to miejsce w przypadku zwykłej pułapki, lecz fotokomórka. Gdy mysz podejdzie do przynęty, to znajdzie się w polu pracy czujników, które prześlą sygnał do urządzenia sterującego, które z kolei wygeneruje impuls do elektromagnesu i zostanie wówczas przyciągnięta kotwica uwalniająca metalową



ramkę. Zasada działania jest identyczna w obydwu przypadkach, lecz zmieniło się sterowanie mechanizmem ramki. Rozwiązanie czysto mechaniczne zastąpiono układem czujników, urządzenia sterującego i elektromagnesu. Jak łatwo można się domyślić, wchodzi w to jeszcze bateria zasilająca elektryczne elementy układu, co łącznie sprawia, że rozwiązanie to jest 50 razy droższe od klasycznego.

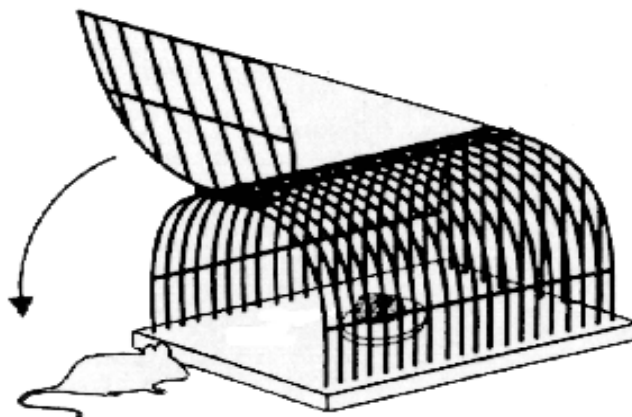
Rys. 4.5. „Mechatroniczna” pułapka na myszy.



Jeśli chodzi o mało skomplikowane rozwiązania konstrukcyjne, to można poprzestać na mechanizmach prostych, które w zadawalający sposób spełniają założone cele. Gdy jednak potrzeba zrealizować bardziej złożone zagadnienia, często nie wystarcza klasyczne podejście do sprawy – trzeba wówczas sięgnąć do rozwiązań synergicznie łączących w sobie elementy kilku dziedzin, czyli mechatroniki.

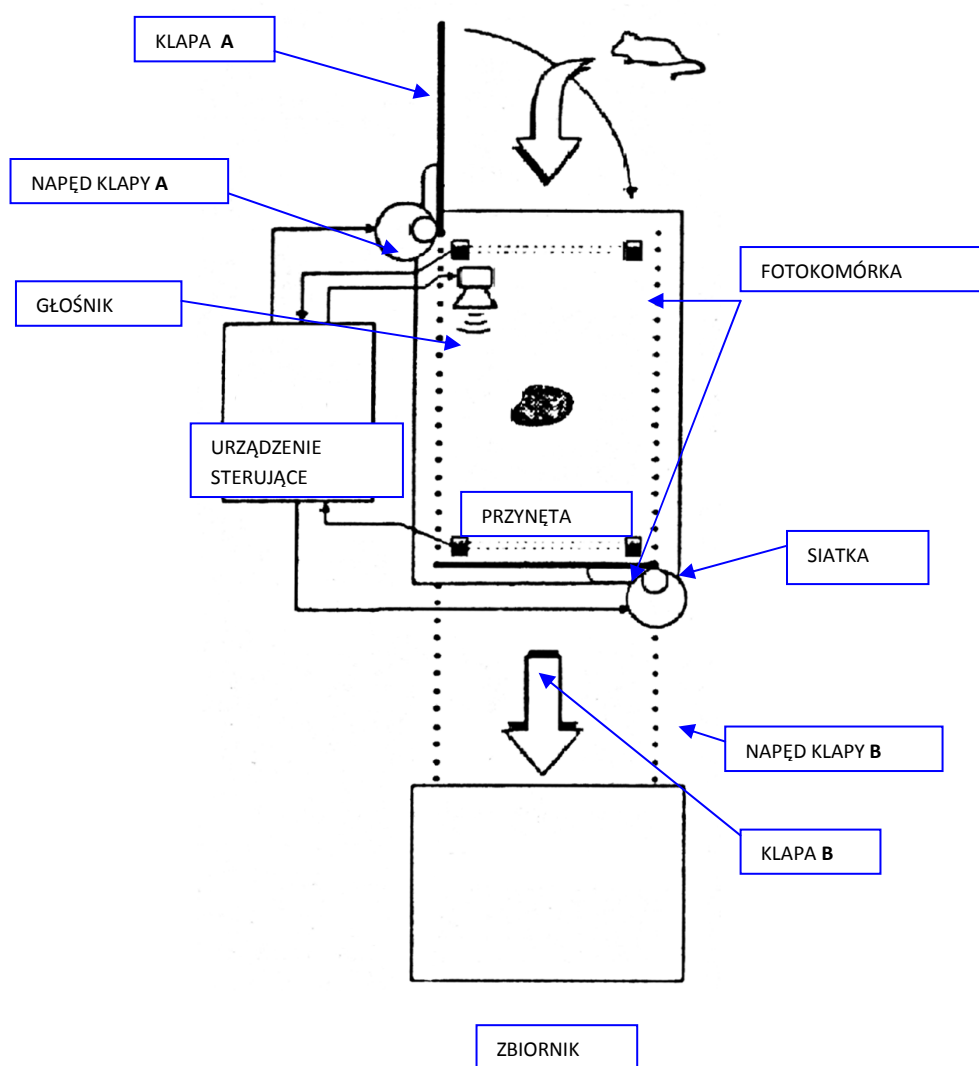
Jak wynika z powyższego przykładu, zastosowanie mechatroniki nie zawsze jest wskazane, lecz gdybyśmy chcieli skonstruować pułapkę, w którą łapałyby się żywe zwierzęta, nie unikniemy zastosowania układów mechatronicznych. Aby złapać zwierzę, wystarczyłaby zwykła klatka z zamkniętym wejściem. Mysz, wchodząc do klatki, porusza przynętę, zwalnia zaczep i wejście się zatrzaskuje (rys. 4.6).

Rys. 4.6. Mechaniczna klatka do łapania myszy.



Rozwiązanie to wymaga jednak częstej kontroli, gdyż pułapka jednorazowo może przyjąć tylko 1 zwierzę i trzeba ją w miarę potrzeb opróżniać.

Rys. 4.7. Mechatroniczna klatka na myszy.



Z tego też względu zastosować tu można inny rodzaj pułapki, którego schemat przedstawiono na rys. 4.7. Zasada jej działania jest bardzo prosta – w ogrodzonej siatką i zamykanej z 2 stron przestrzeni umieszczono przynętę. Mysz, wchodząc do ogrodzenia, przechodzi przez fotokomórkę, z której sygnał jest natychmiast kierowany do urządzenia sterującego, z którego wychodzi impuls uruchamiający napęd kłapy **A**, która, zamykając się, powoduje uwięzienie myszy wewnątrz pułapki. Gdy tylko za myszą zamknie się kłapa **A**, urządzenie sterujące wysyła impuls do napędu kłapy **B** znajdującej się przed myszą, następuje otwarcie tej kłapy i z głośnika umieszczonego za myszą wydobywa się dźwięk mający na celu spłoszenie jej i wymuszenie ruchu w kierunku zbiornika znajdującego się za kłapą **B**. Gdy mysz minie kłapę **B**, zadziała fotokomórka i kłapa się zamknie. Mysz zostaje uwięziona w zbiorniku, a pułapka jest gotowa do ponownego użytku. W tym miejscu wykorzystano system mechatroniczny, gdyż normalne mechaniczne urządzenie potrzebowałoby wielu innych mechanizmów, by spełnić założoną funkcję, co zwiększyłoby koszty i rozmiary tego urządzenia.

## 5. Zasady mechaniki

Zasady zachowania to prawa określające stałość pewnych parametrów charakteryzujących układ fizyczny. Do najważniejszych należą zasady zachowania: energii, pędu, krętu, ładunku elektrycznego, liczby barionowej, liczb leptonowych, parzystości kombinowanej CPT. Zasady zachowania wynikają z niezmienniczości równań opisujących stan układu względem pewnych transformacji. Badanie związku pomiędzy materią a ruchem stanowi przedmiot dynamiki. Bazuje ona na niewielkiej liczbie praw zasadniczych, niedających się sprawdzić bezpośrednio. Sir Izaak Newton odkrywając prawo ciążenia powszechnego, w dziele *Philosophiae naturalis principia mathematica* wydanym w 1687 roku przedstawił fundament zupełny dynamiki w formie praw ruchu.

### 5.1. Prawa Newtona

**Prawo I.** Każde ciało trwa w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego i prostoliniowego dopóty, dopóki siły nań działające tego stanu nie zmienią (p r a w o b e z w ł a d n o ś c i).

**Prawo II.** Zmiana ilości ruchu punktu materialnego (pędu) jest proporcjonalna względem siły działającej i ma kierunek prostej, wzdłuż której ta siła działa:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}. \quad (5.1)$$

**Prawo III.** Wzajemne oddziaływania 2 ciał są zawsze równe i skierowane przeciwnie (p r a w o w z a j e m n o ś c i d z i a ł a n i a).

W ogólności II prawo dynamiki ma postać:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_i. \quad (5.2)$$

przy czym  $\vec{p} = m\vec{v}$  nazywamy pędem punktu materialnego:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i. \quad (5.3)$$

Drugie prawo Newtona można wyrazić równaniem wektorowym:

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} \cdot dt, \quad (5.4)$$

które w formie różniczkowej wyraża zasadę pędu i impulsu: elementarny przyrost wektorowy pędu następuje wskutek elementarnego impulsu siły  $dI = \vec{F} \cdot dt$ .

Zasada (5.4) w formie całkowej ma postać:

$$m \cdot \vec{v}_2 - m \cdot \vec{v}_1 = \int_{t_2}^{t_1} \vec{F} \cdot dt. \quad (5.4a)$$

### 5.2. Pęd i zasada zachowania pędu

**Pęd** układu  $n$  punktów materialnych zdefiniowany jest następująco:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (5.5)$$

#### Zasada zachowania pędu

Jeżeli suma sił zewnętrznych działających na układ równa się 0, to pęd pozostaje niezmienny, a przy stałości masy prędkość środka masy  $\vec{v}_s$  pozostaje niezmienna.

$$\frac{d}{dt} (\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i) = 0. \quad (5.6)$$

Innymi słowy, pęd izolowanego układu punktów materialnych jest wielkością stałą.

### 5.3. Kręt i zasada zachowania krętu

Dla punktu materialnego poruszającego się z prędkością  $\vec{v}$  krętem nazywamy moment wektora pędu  $m\vec{v}$  względem dowolnie wybranego punktu bieguna 0 uczepienia wektora  $\vec{r}$ :

$$\vec{K}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (5.7)$$

Dla układu  $n$  punktów materialnych krętem nazywamy sumę momentów pędu względem dowolnie wybranego punktu 0 uczepienia wektorów  $\vec{r}_i$ :

$$\vec{K}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \quad (5.8)$$

#### Zasada zachowania krętu

W przypadku, gdy momenty wszystkich sił zewnętrznych układu punktów materialnych względem wybranego nieruchomego bieguna 0 są równe 0, wówczas kręt układu względem bieguna nie ulega zmianie.

Wyrażają to równania:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = 0 \quad (5.9)$$

skąd:

$$\vec{K}_0 = const. \quad (5.10)$$

### 5.4. Zasada zachowania energii mechanicznej

Gdy na układ punktów materialnych działają siły zachowawcze, wówczas suma energii kinetycznej  $E$  i potencjalnej  $V$  tego układu jest wielkością stałą:

$$E_m = E + V = const. \quad (5.11)$$

### 5.5. Zasady wariacyjne

Zasady wariacyjne to w mechanice klasycznej twierdzenia określające własności ruchu rzeczywistego, pozwalające wybrać go spośród wszystkich możliwych ruchów układu. Wśród zasad wariacyjnych rozróżnia się zasady różniczkowe (zasada d'Alemberta, zasada Gaussa, zasada Jourdaina, zasada przesunięć wirtualnych) i zasady całkowe (zasada najmniejszego działania).

Po uogólnieniu stosowanych pojęć zasady wariacyjne stosuje się w mechanice ośrodków ciągłych, elektrodynamice, optyce (zasada Fermata), termodynamice i innych działach fizyki.

W definicjach zasad wariacyjnych korzysta się z pojęcia działania. Jest ono (funkcja działania) wielkością fizyczną, mającą wymiar iloczynu energii i czasu lub pędu i położenia (jak kręt). Charakteryzuje ruch układu mechanicznego, ale pojęcie to wykorzystuje się również w elektrodynamice, termodynamice i mechanice kwantowej. Działanie odgrywa znaczną rolę zwłaszcza w tej ostatniej dziedzinie ze względu na stałą Plancka, zwaną też kwantem działania. W mechanice działanie  $S$  jest zdefiniowane jako całka oznaczona z funkcji Lagrange'a  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ :

$$S = \int_{t_0}^t L(q_i, \dot{q}_i, t) dt. \quad (5.12)$$

Sformułowanie mechaniki klasycznej zawierające pojęcie działania miało istotne znaczenie dla rozwoju mechaniki kwantowej.

## 5.6. Zasada d'Alemberta

Zasadę d'Alemberta (1743), dla układu punktów materialnych można sformułować następująco: suma iloczynów skalarnych sum sił zewnętrznych i wewnętrznych, działających na punkty układu, wektorów  $(-m_i \vec{a}_i)$  i przesunięć przygotowanych punktów materialnych jest równa 0. Równanie to, zwane uogólnionym równaniem dynamiki, zapisujemy w postaci:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{W}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot (\delta \vec{r}_i) = 0, \quad (5.13)$$

gdzie:  $\vec{F}_i, \vec{W}_i$  – oznaczają odpowiednio siły zewnętrzne, wewnętrzne i reakcje więzów,  $\delta \vec{r}_i$  – oznacza przemieszczenie przygotowane (wirtualne).

Dla układu swobodnego zasadę d'Alemberta formułuje się następująco: układ sił zewnętrznych działających na punkty układu materialnego swobodnego równowazy się w każdej chwili z układem sił bezwładności.

## 5.7. Zasada prac przygotowanych

Zasada prac przygotowanych wyraża się równaniem:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{W}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (5.14)$$

gdzie:  $\vec{F}_i, \vec{W}_i$  – oznaczają odpowiednio siły zewnętrzne i siły wewnętrzne,  $\vec{R}_i$  – oznacza reakcje więzów.

Można ją wyrazić słowami następująco: w położeniu równowagi układu suma prac przygotowanych wszystkich sił zewnętrznych i reakcji więzów jest równa 0.

We współrzędnych uogólnionych  $q_i$  dla układu o  $s$  stopniach swobody zasadę prac przygotowanych można zapisać następująco:

$$\sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i = 0, \quad (5.15)$$

gdzie:

$Q_i$  – siły uogólnione;  $\delta q_i$  – przemieszczenia wirtualne.

## 5.8. Zasada najmniejszego działania

Zasada najmniejszego działania (zasada Hamiltona) jest podstawową zasadą wariacyjną w mechanice, głoszącą, że spośród wielu możliwych ruchów układu mechanicznego fizycznie realizowany jest ten, w którym działanie  $S$  przyjmuje najmniejszą wartość. Matematycznie zasadę Hamiltona można zapisać równaniem:

$$\delta S(q) = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt. \quad (5.16)$$

Sformułowana została po raz pierwszy przez P.L.M de Maupertuis (1747), a ściśle dowody i zależności podali J.L. Lagrange (1788) oraz W.R. Hamilton (1834).

## 5.9. Zasada Gaussa

Zasada Gaussa to w mechanice teoretycznej zasada najmniejszego wymuszenia (przymusu) lub najmniejszej krzywizny. Dotyczy ona układu  $N$  punktów materialnych poddanych działaniu  $s$  więzów holonomicznych i więzów nieholonomicznych, spełniających ponadto założenia, że w chwili początkowej wszystkie ruchy mają to samo położenie i prędkość początkową. Zasada Gaussa głosi wówczas, że dla ruchu rzeczywistego przymus  $G$  przyjmuje najmniejsze wartości. Definiujemy ją następująco:

$$G = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i)^2, \quad (5.17)$$

gdzie:

$\vec{F}_i$  – działające siły na punkty materialne,  
 $m_i$  – masy punktowe,  
 $\vec{a}_i$  – przyspieszenia punktów.

W przypadku ruchu po gładkiej powierzchni ruch rzeczywisty odbywać się będzie wzdłuż krzywej o najmniejszej krzywiznie. Można wykazać, że zasada Gaussa jest równoważna zasadzie d'Alemberta.

Krzywizna jest miarą stopnia odchylenia danej figury geometrycznej od wzorca

- 1) dla krzywej, krzywizna  $n$  jest definiowana jako:

$$n = \frac{dt^0}{ds}, \quad (5.18)$$

gdzie:  $\mathbf{t}^0$  – jest jednostkowym wektorem stycznym w danym punkcie do krzywej,  
 $s$  – jest elementem łuku tej krzywej

- 2) dla powierzchni krzywizna  $K$  (tzw. Krzywizna Gaussa) wyraża się wzorem:

$$K = \frac{1}{r_1 r_2}, \quad (5.19)$$

gdzie:  $r_1$  i  $r_2$  są tzw. promieniami krzywizny (odwrotnościami krzywizny) w 2 wzajemnie prostopadłych kierunkach, wzdłuż których krzywizna (obliczana jak dla krzywej) przyjmuje wartości ekstremalne.

## 5.10. Wybrane zagadnienia z mechaniki analitycznej

Dla wyznaczenia podstawowych zależności konieczne jest określenie rodzaju więzów działających na układ i określenie liczby stopni swobody układu.

**Więzy.** W mechanice teoretycznej to ograniczenia nałożone na ruch punktu, ciała lub układu ciał (np. kształt powierzchni, po której porusza się ciało, długość ramienia wahadła itp.), które uwzględnia się, wprowadzając do opisu ruchu tzw. reakcje więzów – równanie lub układ równań, które opisują matematycznie warunki ograniczenia ruchu w formie równań lub nierówności ujmujących warunki narzucone układowi przez istnienie więzów.

Więzy mogą być wyrażone w postaci funkcji zależnej od czasu i położenia wszystkich punktów układu – są to tzw. **więzy geometryczne** – oraz dodatkowo od ich prędkości – nazywa się je wówczas więzami kinematycznymi. Jeśli równanie określające więzy kinematyczne daje się scałkować, to można je sprowadzić do więzów geometrycznych. Oba te rodzaje więzów określa się ogólnie mianem holonomicznych. Istnieją też więzy nieholonomiczne, tj. niecałkowane więzy kinematyczne. Więzy stałe w czasie nazywane są **skleronomicznymi** (lub stacjonarnymi), zmienne

natomiast **reonomicznymi** (lub niestacjonarnymi). Gdy więzy opisują zależności w formie równości, to są one więzami dwustronnymi, gdy zaś przedstawiają nierówności – są więzami jednostronnymi.

Więzy nazywa się idealnymi, jeśli reakcje więzów nie są siłami rozpraszającymi energię. Przykładem układu mechanicznego z więzami holonomicznymi może być koło toczące się bez poślizgu po prostej. Przeciwnie, kula tocząca się bez poślizgu po płaszczyźnie jest przykładem układu nieholonomicznego. Układy holonomiczne są klasą układów mechanicznych, dla których istnieją na ogół całki ruchu.

Niezależne współrzędne, których liczba jest najmniejszą potrzebną do określenia położenia układu, nazywamy **współrzędnymi uogólnionymi**. Liczba współrzędnych uogólnionych jest równa liczbie **stopni swobody**.

### 5.11. Równania Lagrange’a I-go rodzaju

Dany jest układ  $n$  punktów materialnych opisany w układzie współrzędnych ortokartezjańskich. Na układ ten nałożono  $s$  równań więzów:

$$f_j(x_i, y_i, z_i, \dots, t) = 0, \quad (5.20)$$

przy czym  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, s$ .

Równanie Lagrange’a I-go rodzaju dla układu z więzami geometrycznymi w zapisie wektorowym ma postać:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^s \lambda_j \text{grad}_i f_j, \quad (5.21)$$

gdzie:  $\vec{a}_i, \vec{F}_i$  – to odpowiednio wektory przyspieszeń i sił działających na  $i$ -ty punkt materialny,  $\lambda_j$  – mnożniki Lagrange’a.

W układzie współrzędnych ortokartezjańskich równania Lagrange’a I-go rodzaju przyjmują postać:

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i = \vec{F}_{ix} + \sum_{j=1}^s \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \\ m_i \ddot{y}_i = \vec{F}_{iy} + \sum_{j=1}^s \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \\ m_i \ddot{z}_i = \vec{F}_{iz} + \sum_{j=1}^s \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}. \end{cases} \quad (5.22)$$

Równania Lagrange’a I-go rodzaju umożliwiają wyznaczenie równań ruchu:  $x(t)$ ,  $y(t)$  i  $z(t)$  oraz funkcję  $f_i$ , za pomocą której opisujemy reakcje więzów.

### 5.12. Równania Lagrange’a II-go rodzaju

Równania Lagrange’a<sup>2</sup> II-go rodzaju umożliwiają wyprowadzenie równań różniczkowych ruchu dla badanego układu w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnymi drugiego rzędu, przy czym liczba równań jest równa  $q$  liczbie stopni swobody. Równania Lagrange’a II-go rodzaju mają następującą postać:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i, \quad (5.23)$$

<sup>2</sup> Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) – matematyk i astronom pochodzenia włoskiego.

gdzie:  $E$  – energia kinematyczna,

$i=1, \dots, s$  – liczba stopni swobody,

$q_i, \dot{q}_i$  – macierz kolumnowa współrzędnych i prędkości uogólnionych,

$Q_i$  – macierz kolumnowa sił uogólnionych

przy czym siłę uogólnioną wyznaczamy z zależności:  $Q_i \cdot \delta q_i = \sum F_j \cdot \delta r_j$ .

Dla układów, w których siły zewnętrzne są siłami potencjalnymi, wprowadza się funkcję Lagrange’a  $L$ , zdefiniowaną następująco:

$$L = E - U \quad (5.24)$$

gdzie:  $U$  – energia potencjalna.

Równanie Lagrange’a II-go rodzaju przyjmuje wówczas postać:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(E-U)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(E-U)}{\partial q_i} = 0 \quad (5.25)$$

albo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (5.26)$$

Równanie Lagrange’a w postaci (5.26) stosujemy w przypadku, gdy siły zewnętrzne są siłami potencjalnymi.

### 5.13. Równanie kanoniczne Hamiltona

Pęd uogólniony w mechanice to wielkość fizyczna określana zależnością:

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.27)$$

przy czym  $L(t, q_i, \dot{q}_i)$  jest funkcją Lagrange’a analizowanego układu.

Pęd uogólniony ma wymiar pędu, gdy sprzężona z nim współrzędna uogólniona ma wymiar długości, lub momentu pędu, gdy współrzędna ta jest kątem.

**Funkcja Hamiltona** (hamiltonian, operator Hamiltona) definiowana jest następująco:

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - E, \quad (5.28)$$

gdzie:

$p_i = p_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$  – macierz pędów uogólnionych,

$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$  – macierz prędkości uogólnionych.

W układach zachowawczych funkcja Hamiltona opisuje energię układu.

Równania kanoniczne Hamiltona mają postać:

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i \end{cases} \quad (5.29)$$



W przypadku, gdy siły zewnętrzne są siłami potencjalnymi funkcja Hamiltona wyraża się zależnością:

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L \quad (5.30)$$

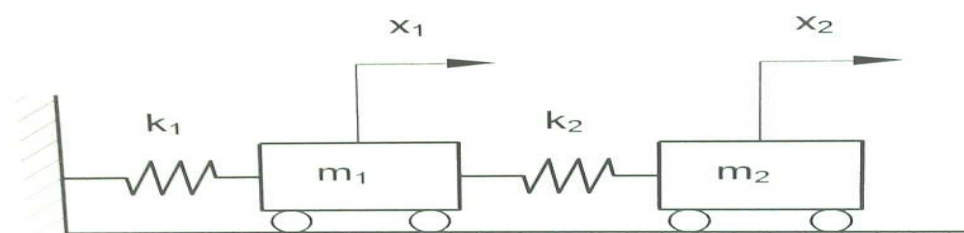
a równanie kanoniczne Hamiltona przyjmują wtedy postać (w przypadku, gdy brak sił dyssypacji):

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{cases} \quad (5.31)$$

### 5.14. Przykład

Na rys. 5.1 przedstawiono układ złożony z dwóch wózków o masach  $m_1$  i  $m_2$ . Wózki są połączone sprężynami o liniowych charakterystykach. Stałe sprężyn wynoszą odpowiednio  $k_1$  i  $k_2$ . Wyznaczyć równania ruchu układu wózków, stosując formalizm równań Łagrange'a II-go rodzaju.

Rys. 5.1. Schemat układu drgającego.



### R o z w i ą z a n i e

Układ ma 2 stopnie swobody ( $s=2$ ), zatem jako zmienne uogólnione przyjmujemy:

$$[q_1, q_2] = [x_1, x_2].$$

Równania Lagrange'a przyjmują postać układu 2 równań:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (5.32)$$

Obliczamy energię kinetyczną układu :

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2. \quad (5.33)$$

Natomiast energia potencjalna wyniesie:

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2. \quad (5.34)$$

Funkcja Lagrange'a  $L = E - U$  jest następująca:

$$L = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1 x_1^2 - \frac{1}{2}k_2 (x_2 - x_1)^2. \quad (5.35)$$

Zgodnie z równaniami (5.32) obliczamy odpowiednie wyrazy równań Lagrange'a II-go rodzaju (5.32):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2, \quad (5.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2, \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1), \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_2 (x_2 - x_1). \quad (5.38)$$

Uwzględniając zależności (5.36-5.38) w równaniach (5.32) i po przekształceniach, otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \end{cases}. \quad (5.39)$$

### Wyznaczanie równań ruchu układu za pomocą równań kanonicznych Hamiltona

Zgodnie z równaniem (5.30) pędy uogólnione wyznaczamy z funkcji Lagrange'a. Otrzymujemy:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1, \quad (5.40)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2. \quad (5.41)$$

Z kolei na podstawie zależności (5.31) wyznaczamy funkcję Hamiltona:

$$H = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L, \quad (5.42)$$

a po uwzględnieniu równania (5.39) otrzymujemy:

$$H = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1 x_1^2 - \frac{1}{2}k_2 (x_2 - x_1)^2. \quad (5.43)$$

Stosując równanie Hamiltona (5.31) :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (5.44)$$

dla  $i = 1, 2$ , otrzymujemy układ 2 równań różniczkowych w postaci:

$$\begin{cases} \frac{d(m_1 \dot{x}_1)}{dt} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1), \\ \frac{d(m_2 \dot{x}_2)}{dt} = -k_2 (x_2 - x_1). \end{cases} \quad (5.45)$$

Po dokonaniu operacji różniczkowania i przeniesieniu wszystkich wyrazów na lewą stronę otrzymujemy:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (5.46)$$

Równania różniczkowe ruchu (5.39) i (5.46) otrzymane obiema metodami są oczywiście identyczne.

### 5.15. Praca, energia, moc i sprawność

**Praca** to jedna z najważniejszych wielkości mechaniki. Definiuje się ją jako iloczyn skalarny wektora siły działającej na ciało i wektora przesunięcia, pod warunkiem, że przesunięcie jest prostoliniowe, a siła stała podczas przesunięcia:

$$L = \vec{F} * \vec{s} = F * s * \cos(\vec{F}, \vec{s}). \quad (5.47)$$

Ponieważ siła  $\vec{F}$  jest zmienna i może być funkcją drogi  $s$ , prędkości i czasu, to w ogólnym przypadku pracę definiujemy jako całkę:

$$L = \int F * ds = \int \vec{F}(\vec{s}, \vec{v}, t) d\vec{s}. \quad (5.48)$$

Jednostką pracy w układzie SI jest dżul ( $J$ ) definiowany jako niuton\*metr:

$$1J = 1N * 1m.$$

Wykonanie pracy może powodować zmianę energii układu.

W termodynamice praca jest obok ciepła jedną z 2 form przekazywania energii między układami lub częściami układu. Jest wielkością makroskopową, czyli związaną z zachowaniem układu jako całości. Równa jest energii, jaką układ oddaje otoczeniu przy jednoczesnej zmianie swoich parametrów makroskopowych (objętość, położenie, natężenie pola itp). Zasadą określającą sposób wymiany energii z otoczeniem (wykonywanie pracy nad układem, wykonywanie pracy przez układ nad otoczeniem, przepływ ciepła) jest pierwsza zasada termodynamiki.

W przypadku pracy wykonanej na skutek procesów niemechanicznych (termodynamicznych, elektrycznych, chemicznych itp.) można ją sobie wyobrazić jako sumę prac przesunięć cząsteczek biorących udział w danym procesie.

Warto pamiętać, że definiowanie pracy jako zmiany energii układu nie ma sensu, gdyż energia to potencjalna możliwość wykonania pracy – energia może zostać wymieniona z otoczeniem także w postaci ciepła.

W innych układach jednostek praca wyrażana jest w kaloriach, ergach.

**Energia** gr. ενεργεια (energeia) – skalarna wielkość fizyczna charakteryzująca stan układu fizycznego (materii) [jako jego zdolność do wykonania pracy]. Energia występuje w różnych postaciach, np: energia kinetyczna, energia sprężystości, energia cieplna, energia jądrowa.

Z punktu widzenia termodynamiki niektóre formy energii są funkcjami stanu i potencjałami termodynamicznymi. Energia i jej zmiany opisują stan oraz wzajemne oddziaływania obiektów fizycznych (ciał, pól, cząstek, układów fizycznych), przemiany fizyczne i chemiczne oraz wszelkiego rodzaju procesy występujące w przyrodzie. Energia jest wielkością addytywną. Energię we wzorach fizycznych zapisuje się najczęściej za pomocą symbolu  $E$ .

**Moc** – skalarna wielkość fizyczna, określająca pracę wykonaną w jednostce czasu przez układ fizyczny. Zgodnie z definicją, moc określamy wzorem:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (5.49)$$

W ruchu ogólnym:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{M} \cdot \vec{\omega}. \quad (5.50)$$

Wzór ten jest prawdziwy, gdy praca wykonywana jest w tym samym tempie (nie zmienia się w czasie). W przeciwnym wypadku powyższy wzór będzie określał moc średnią. Aby obliczyć moc chwilową, należy skorzystać z innego wzoru:

$$P = \frac{dL}{dt}. \quad (5.51)$$

Moc może być również definiowana jako prędkość emisji energii (np. dla źródła światła, anteny, głośnika). Wzór na moc (przy stałym tempie emisji) przybiera wówczas postać:

$$P = \frac{E}{t}, \quad (5.52)$$

gdzie: E jest energią emitowaną w czasie  $t = \text{const}$ .

Jednostką mocy w układzie SI jest wat (W). Moc jest równa 1 wat, jeśli praca 1 dżula wykonywana jest w czasie 1 sekundy:

$$W = \frac{J}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}. \quad (5.53)$$

**Sprawność** oznaczamy przez  $\eta$ . Pod tym pojęciem rozumie się ogólnie iloraz mocy odprowadzonej do mocy dostarczonej. Jeśli obie moce nie zależą od czasu, sprawność można obliczyć jako stosunek odpowiednich prac, czyli:

$$\eta = \frac{L_u}{L_d}, \quad (5.54)$$

gdzie:

$L_u$  – uzyskana praca użyteczna,

$L_d$  – praca dostarczona.

## 5.16. Równanie Lagrange'a dla układów elektro-mechanicznych

Jeżeli energię potencjalną przy dowolnie małym przemieszczeniu z położenia równowagi wyrazić jako funkcję kwadratową współrzędnych uogólnionych  $q_i$ , a energią kinetyczną E jako funkcję kwadratową prędkości uogólnionych  $\dot{q}_i$ , czyli gdy:

$$U = \frac{1}{2}C_{11}q_1^2 + \frac{1}{2}C_{22}q_2^2 + \dots,$$

oraz:

$$E = \frac{1}{2}a_{11}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}a_{22}\dot{q}_2^2 + \dots, \quad (5.55)$$

to równanie różniczkowe ruchu układu można wyprowadzić z równań Lagrange'a (1788):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, \quad (5.56)$$

gdzie:  $Q_i$  – siły uogólnione,

$i = 1, \dots$ , stopnie swobody.

Dla układów elektromechanicznych stosujemy równania Lagrange'a – Maxwell'a w postaci:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_{mi}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = Q_{ejl}, \quad (5.57)$$

gdzie funkcja Lagrange'a dla układów elektromechanicznych przyjmuje postać:

$$L = (q_i, \dot{q}_i, x_j, \dot{x}_j) = \frac{1}{2} \sum \sum (m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - s_{ik} q_i q_k) + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k (L_{jk} \dot{x}_j \dot{x}_k - S_{jk} X_j X_k) + \sum_j \Psi_j \dot{x}_j \quad (5.58)$$

- $q_i, \dot{q}_i$  – uogólnione współrzędne i prędkości,
- $\dot{x}_j = \dot{I}_j$  – ilość elektryczności, ładunek elektryczny w obwodzie,
- $m_{ik}$  – współczynniki bezwładności,
- $s_{ik}$  – parametry mechaniczne,
- $L_{jk}$  – współczynniki indukcji,
- $S_{jk}$  – współczynniki potencjału,
- $\Psi_j$  – sprzężenie magnetyczne,
- $Q_{mi}, Q_{ej} = U - i_j R_j$  – siły uogólnione, napięcie uogólnione.

### 5.17. Równania różniczkowe ruchu Mangerona-Deleanu

Dla więzów wyższego rzędu, Mangerona-Deleanu uogólnili równanie Lagrange'a, w którym w równaniu (5.59) wskaźnik (p) jest rzędem pochodnej. Uwzględniając kolejno wartość parametru: 1, 2 i 3 uzyskujemy odpowiednio postaci równań: (5.60), (5.61) oraz (5.62):

$$\left[ \frac{\partial E^{(p)}}{\partial q_i^{(p)}} - (p + 1) \frac{\partial E}{\partial q_i} \right] = Q_i, \quad (5.59)$$

$$p = 1$$

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial \dot{q}_i} - 2 \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i, \quad (5.60)$$

$$p = 2$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \ddot{E}}{\partial \ddot{q}_i} - 3 \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i, \quad (5.61)$$

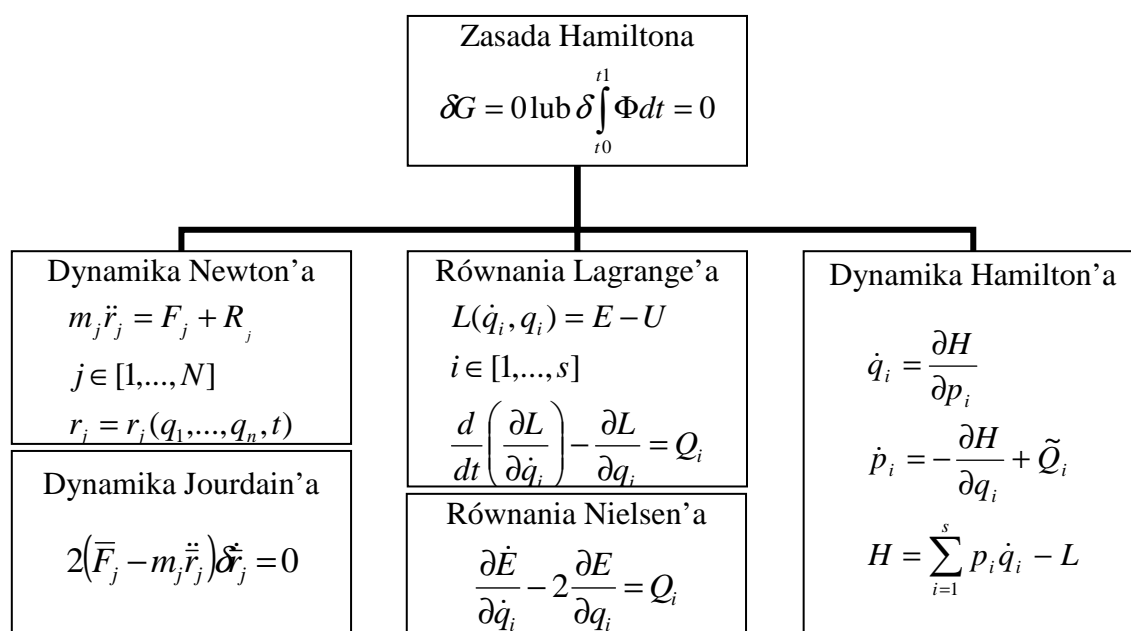
$$p = 3$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \ddot{\ddot{E}}}{\partial \ddot{\ddot{q}}_i} - 4 \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i. \quad (5.62)$$

Zauważmy, że zmiana kolejności różniczkowania prowadzi do innej postaci równań Lagrange'a, dla przypadku  $p = 1$  uzyskujemy równania Nielsena (1935) (w tym przypadku najpierw różniczkujemy energię względem czasu, a następnie względem prędkości uogólnionej). Dla przypadków  $p = 2$  i  $p = 3$  otrzymamy odpowiednio równania 5.61 i 5.62, które zwane są równaniami Cenowa.

## 5.18. Zestawienie formuł (równań) uzyskanych z wariacyjnej zasady Hamiltona

Rys. 5.2. Formalizm i formuły mechaniki analitycznej.



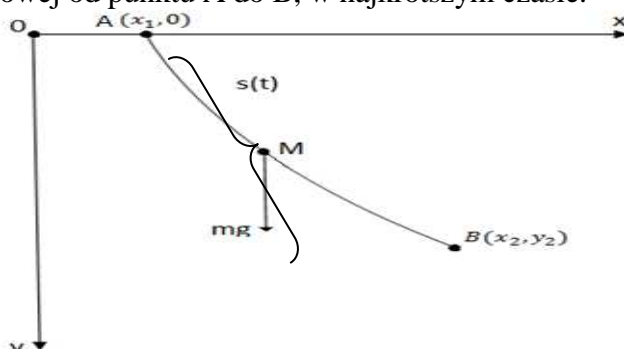
## 5.19. Brachistochrona jako przykład zagadnienia optymalizacji

Zagadnienie brachistochrony dotyczy określenia linii krzywej, po której punkt ruchomy o masie  $m$  w płaszczyźnie pionowej przemieszcza się pod wpływem siły ciężkości w najkrótszym czasie od punktu A do B (rys. 5.3).

R o z w i ą z a n i e

Jeśli punkt  $m$  o masie  $m$  przemieszcza się w płaszczyźnie pionowej pod wpływem sił grawitacji  $\vec{g}$ , to prędkość  $v$  dowolnego punktu M jest funkcją przebytej drogi  $s(t)$ .

Rys. 5.3. Brachistochrona – tor punktu o masie  $m$  w polu grawitacyjnym zaistniałym, w płaszczyźnie pionowej od punktu A do B, w najkrótszym czasie.



Przyjmijmy oś Oy zwróconą w kierunku siły ciężkości. Ustalając oś Ox przez punkt A, wówczas jako wartość prędkości  $v$  w dowolnym punkcie M określamy wzorem:

$$v = \sqrt{2gy} = \frac{ds}{dt}, \quad (5.63)$$

gdzie  $s$  jest długością przebytej drogi w czasie trwania ruchu. Z (5.63) otrzymujemy:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \cdot ds = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx. \quad (5.64)$$

Czas potrzebny do przebycia łuku  $s(t)=AB$  przedstawić możemy wzorem:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx. \quad (5.65)$$

Mamy zatem wyszukać taką funkcję, dla której całka oznaczona:

$$U = \int_{x_1}^{x_2} V dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad (5.66)$$

otrzymuje wartość minimalną. Podstawmy odpowiednio za:

$$V = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}. \quad (5.67)$$

Warunek  $\delta U = 0$  prowadzi tu do równania:

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial x} = 0, \quad (5.68)$$

stąd ze względu na to, że:  $\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial x} = \frac{2yy'' - y'^2 - y'^4}{2[y(1+y'^2)]^{\frac{3}{2}}}$ , otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^{\frac{3}{2}}} - \frac{2yy'' - y'^2 - y'^4}{2[y(1+y'^2)]^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad (5.69)$$

które po uproszczeniu otrzymuje kształt:

$$(1+y'^2)^2 + 2yy'' - y'^2 - y'^4 = 0, \quad \text{czyli: } 1+y'^2 + 2yy'' = 0. \quad (5.70)$$

Otrzymane równanie różniczkowe jest rzędu drugiego i powstaje z różniczki zupełnej:

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right) = 0. \quad (5.71)$$

Różniczka (5.71) ma pierwszą całkę w postaci:

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C, \quad \text{albo} \quad y(1+y'^2) = \frac{1}{C^2}. \quad (5.72)$$

Przyjmując  $\frac{1}{C^2} = 2a$ , otrzymujemy stąd równanie różniczkowe rzędu pierwszego w postaci:

$$y'^2 = \frac{2a-y}{y}, \quad \text{stąd otrzymujemy:} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}. \quad (5.73)$$

Będzie więc: 
$$dx = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2a-y}} dy, \quad (5.74)$$

albo

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}}, \quad (5.75)$$

zatem:

$$x = \int \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}} + b. \quad (5.76)$$

Ze względu na to, że:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}} = a \int \frac{dy}{\sqrt{2ay - y^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{d(2ay - y^2)}{\sqrt{2ay - y^2}}, \quad (5.77)$$

otrzymujemy stąd równanie szukanej krzywej w postaci:

$$x = a \cdot \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} + b. \quad (5.78)$$

Podstawiając:

$$\frac{a - y}{a} = \cos \varphi, \quad (5.79)$$

wtedy:

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}. \quad (5.80)$$

Możemy teraz zastąpić równanie (5.78) dwoma równaniami w postaci:

$$x - b = a(\varphi - \sin \varphi), \quad (5.81)$$

$$y = a(1 - \cos \varphi),$$

określającymi cykloidę zwyczajną, która jest szukaną brachistochroną.

Aby wyznaczyć stałe  $a$  i  $b$  równań (5.81), wystarczy znać współrzędne dwóch punktów  $A$  i  $B$ , przez które ma przechodzić krzywa – brachistochrona (rys. 5.3).

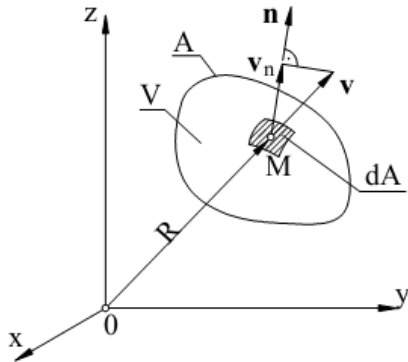


## 6. Zasady mechaniki płynów

### 6.1. Zasada zachowania masy

Zgodnie z zasadą zachowania masy, w żadnym punkcie pola masa nie może się tworzyć ani znikać. W płynie nieściśliwym ( $\rho = \text{const.}$ ) tylko takie pole prędkości będzie spełniało tę zasadę, w którym w każdej chwili do obszaru ograniczonego powierzchnią kontrolną będzie wpływało tyle płynu, ile w tej samej chwili wypływa.

Rys. 6.1. Ilustracja do zasady zachowania masy. Obszar przestrzenny V o brzegu A.



Równanie ciągłości:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho v_n dA = 0. \quad (6.1)$$

Równanie ciągłości ruchu jednowymiarowego:

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + A \frac{\partial(\rho v)}{\partial s} + \rho v \frac{\partial A}{\partial s} = 0. \quad (6.1a)$$

Masowe natężenie przepływu:

$$q_m = \int_A \rho v dA = A \rho_{\dot{s}r} v_{\dot{s}r}. \quad (6.2)$$

Prędkość średnia:

$$v_{\dot{s}r} = \frac{q_v}{A} = \frac{q_m}{A \rho_{\dot{s}r}}. \quad (6.3)$$

### 6.2. Lepkość kinematyczna i dynamiczna

Lepkość dynamiczna  $\mu$ :

$$\tau = -\mu \cdot \frac{dv}{dn}, \quad (6.4)$$

Jednostki lepkości dynamicznej :  $\mu = \left[ \frac{kg}{m \cdot s} \right], \quad 1Pa = \left[ \frac{g}{cm \cdot s} \right].$

Lepkość kinematyczna  $\nu$  :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (6.5)$$

Jednostki lepkości kinematycznej:  $\nu = \left[ \frac{m^2}{s} \right], \quad 1St = \left[ \frac{cm^2}{s} \right].$

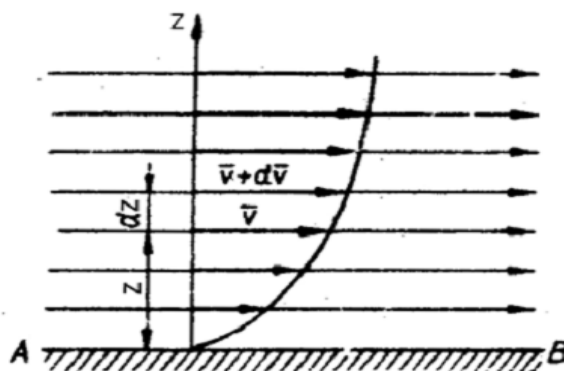
### 6.3. Przepływy laminarne i burzliwe

Ciecz w zależności od panujących warunków przepływu może poruszać się ruchem laminarnym lub turbulentnym. Znajomość charakteru przepływu jest bardzo ważna, gdyż wszystkie zachodzące w przepływie procesy (wymiana masy i ciepła, dyfuzja itp.) są ściśle związane z jego charakterem i zachodzą według różnych mechanizmów.

#### Przepływ laminarny

Przepływ laminarny, inaczej zwany przepływem uwarstwionym, charakteryzuje się znaczną przewagą sił lepkości nad siłami bezwładności. Jeśli wyobrazimy sobie, że płyn płynący w rurze składa się z warstw równoległych do osi rury, to dla przepływu laminarnego występuje brak mieszania między poszczególnymi warstwami. Najogólniej mówiąc, cząsteczki nie wymieniają masy w kierunku prostopadłym do głównego kierunku ruchu płynu. Profil prędkości przyjmuje natomiast rozkład paraboloidalny, z prędkością maksymalną występującą w osi rury.

Rys. 6.2. Uwarstwienie płynu oraz rozkład prędkości w ruchu laminarnym.



#### Przepływ turbulentny

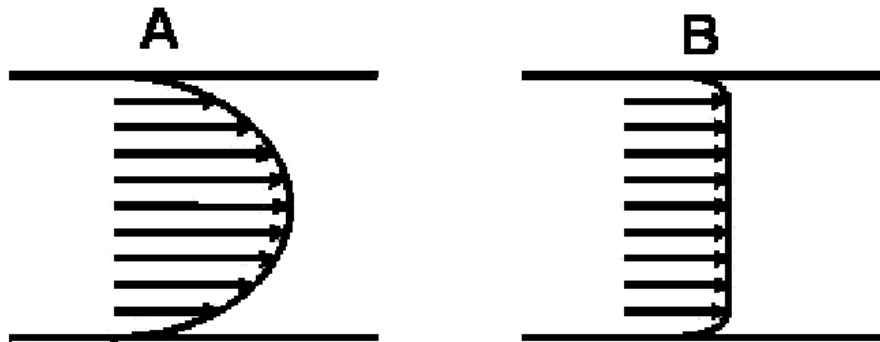
Przepływ turbulentny, inaczej zwany burzliwym, jest zupełnie inny niż przepływ laminarny, gdyż występuje w nim wymiana pędu, masy i ciepła pomiędzy sąsiednimi warstwami płynu. Wymiana ta ma charakter pulsacji mikroskopowych, podczas gdy dla przepływu laminarnego mówi się jedynie o pulsacjach mikroskopowych w postaci ruchów molekularnych. Należy zaznaczyć, że częstość pulsacji w przypadku przepływu turbulentnego waha się w granicach 1-10 000 [1/s], zaś dla zderzeń molekuł powietrza wynosi około  $5 \cdot 10^9$  [1/s]. Widzimy zatem, że pulsacje te mają zupełnie inny charakter.

Zjawisko turbulencji powstaje wtedy, gdy na główny przepływ nakładają się pulsacje. Jest ono bardzo złożone, a co za tym idzie – nie do końca poznane. W danym punkcie przestrzeni prędkość przepływu oscyluje dokoła pewnej wartości, występują tzw. fluktuacje. Znajomość intensywności turbulencji jest ważna, gdyż ich wielkość wpływa wydatnie na opory przepływu. Przykładem tego jest lepkość turbulentna  $\eta_t$ , która zależy wyłącznie od intensywności turbulencji i może przyjmować nieporównywalnie większą wartość niż w przypadku ruchu laminarnego.

Rozkład prędkości w przepływie burzliwym ma bardziej spłaszczony charakter niż w przepływie laminarnym, a mówiąc inaczej – przepływ turbulentny rozkładem prędkości jest bardziej zbliżony do przepływu tłokowego. Spłaszczenie to jest oczywiście wynikiem występowania turbulencji. Ich oddziaływanie zwiększa się wraz ze wzrostem

liczby Reynoldsa. Znajomość rozkładu prędkości jest ważna, ponieważ w technice większość przepływów ma charakter burzliwy. Można go jednak określić wyłącznie na drodze doświadczalnej.

Rys. 6.3. Schematyczne porównanie profilu prędkości w przepływie:  
A) laminarnym, B) turbulentnym.



### Liczba Reynoldsa

Liczba Reynoldsa jest to moduł bezwymiarowy, na podstawie którego można określić rodzaj ruchu płynu. Najbardziej ogólna postać tej liczby kryterialnej to:

$$Re = \frac{U \cdot L}{\nu} = \frac{U \cdot L \cdot \rho}{\eta}, \quad (6.6)$$

gdzie:  $U$  – prędkość charakterystyczna,  
 $L$  – wymiar charakterystyczny,  
 $\nu$  – współczynnik lepkości kinematycznej,  
 $\eta$  – współczynnik lepkości dynamicznej,  
 $\rho$  – gęstość płynu.

Dla przepływu o przekroju kołowym:

$$Re = \frac{v_{sr} \cdot D}{\nu} = \frac{v_{sr} \cdot D \cdot \rho}{\eta}. \quad (6.7)$$

### 6.4. Równanie Eulera

Dla płynu idealnego i nieściśliwego równanie Eulera ma postać:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{q} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

W układzie współrzędnych ortokartezjańskim mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot V_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot V_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot V_z &= X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot V_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot V_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot V_z &= Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot V_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot V_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot V_z &= Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Jeżeli element płynu jest w stanie spoczynku, to w równaniu Eulera dla stanu równowagi płynu przyjmie postać wektorową i współrzędnościową:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}p = 0, \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

lub we współrzędnych cylindrycznych:

$$\begin{aligned} q_r - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ q_\vartheta - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{r \cdot \partial \vartheta} &= 0, \\ q_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Równania (6.10) można przekształcić do innej postaci. Mnożąc je odpowiednio przez:  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , czyli:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} && / \cdot dx, \\ Y &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} && / \cdot dy, \\ Z &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} && / \cdot dz, \end{aligned} \quad (6.12)$$

Uzyskujemy:

$$\begin{aligned} X \cdot dx &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx, \\ Y \cdot dy &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy, \\ Z \cdot dz &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dodając stronami równania (6.13), otrzymamy:

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = \frac{1}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right). \quad (6.14)$$

Ponieważ ciśnienie:

$$p = f(x, y, z),$$

to:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz. \quad (6.15)$$

Możemy więc (6.14) zapisać w postaci:

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = \frac{1}{\rho} \cdot dp. \quad (6.16)$$

Równanie (6.15) stanowi drugą postać równania hydrodynamiki Eulera. Dla powierzchni ekwipotencjalnej  $dp=0$  i wówczas otrzymujemy:

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = 0. \quad (6.17)$$

## 6.5. Równanie Bernoulli'ego

Dla cieczy idealnej:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{\rho}{\gamma} + z = \text{const.} \quad (6.18)$$

Dla cieczy nieidealnej (rzeczywistej):

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{\rho_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{\rho_2}{\gamma} + z_2 + h_{str}, \quad (6.19)$$

przy czym straty energii dla rur o przekroju kołowym dla laminarnego przepływu są opisane wzorem Darcy'ego:

$$h_{str} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad (6.20)$$

gdzie:  $\lambda$  jest współczynnikiem strat ciągłych zależnych od liczby Reynoldsa. Współczynnik strat  $\lambda$  określa się wzorem:

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (6.21)$$

W przypadku przepływu turbulentnego współczynnik strat  $\lambda$  określa się na podstawie wzoru Blasiusa.

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}}. \quad (6.22)$$

Wzór (6.22) daje wartości zgodne z doświadczalnymi dla przepływów turbulentnych w zakresie liczb Reynoldsa  $2300 \leq Re \leq 80000$ .

## 7. Zasady elektromechaniki

### 7.1. Prawo Coulomba, zasada zachowania ładunku i prawo Ohma

**Prawo Coulomba** głosi, że siła wzajemnego oddziaływania 2 punktowych ładunków elektrycznych jest wprost proporcjonalna do iloczynu tych ładunków i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między ich środkami. Jest to podstawowe prawo elektrostatyki. Zostało ono opublikowane w 1785 roku przez francuskiego fizyka Charlesa Coulomba. Prawo to można przedstawić za pomocą wzoru:

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, \quad (7.1)$$

w którym oznaczono:

F – siła wzajemnego oddziaływania dwóch punktowych ładunków elektrycznych,  
 $q_1, q_2$  – punktowe ładunki elektryczne,  
r – odległość między ładunkami,  
k – współczynnik proporcjonalności:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0}, \quad (7.2)$$

gdzie:

$\epsilon$  – względna przenikalność elektryczna ośrodka,  
 $\epsilon_0$  – przenikalność elektryczna próżni.

Kierunek działania siły oddziaływania ładunków wyznaczony jest przez prostą łączącą oba te ładunki, natomiast o zwrocie decydują znaki ładunków. Jeżeli są one jednoimiennie, oddziaływanie jest odpychaniem (rys. 7.1) W przypadku ładunków różnoimiennych ładunki przyciągają się.

Rys. 7.1. Oddziaływanie ładunków.



Siłę oddziaływania ładunku B na ładunek A można przedstawić wzorem wektorowym:

$$\vec{F}_{AB} = -\frac{q_A \cdot q_B}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{AB}^3} \vec{r}_{AB}, \quad (7.3)$$

gdzie poszczególne wielkości pokazane są na rysunku 7.1.

Jednostka ładunku elektrycznego C – kulomb, została nazwana od nazwiska Charlesa Coulomba.  $3600C = 1Ah$  (amperogodzina).

#### Zasada zachowania ładunku elektrycznego

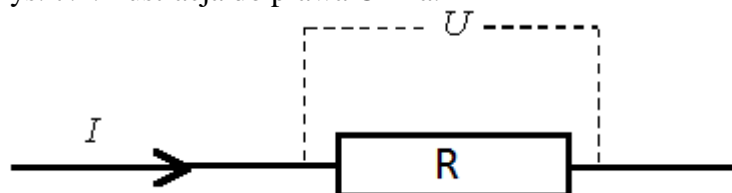
W izolowanym układzie ciał całkowity ładunek elektryczny, czyli suma algebraiczna ładunków dodatnich i ujemnych, nie ulega zmianie:

$$(\sum q_i)_{UI} = const. \quad (7.4)$$

Zmiana ładunku układu może zachodzić tylko na drodze przepływu ładunku.

**Prawo Ohma** opisuje sytuację najprostszego przypadku związku między napięciem przyłożonym do przewodnika (opornika) a natężeniem prądu płynącego przez ten przewodnik (rys. 7.2).

Rys. 7.2. Ilustracja do prawa Ohma.



Sformułowanie prawa Ohma:

**Iloraz natężenia prądu płynącego przez przewodnik do napięcia pomiędzy jego końcami jest stały.**

$$\frac{I}{U} = \text{const.} \quad (7.5)$$

Wzór na prawo Ohma – postać pierwsza:

$$U = I \cdot R, \quad (7.6)$$

gdzie:  $I$  – natężenie prądu (w układzie SI w amperach – A)

$U$  – napięcie między końcami przewodnika (w układzie SI w woltach – V)

Wzór na prawo Ohma – postać druga:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (7.7)$$

Natężenie prądu płynącego przez przewodnik jest proporcjonalne do przyłożonego napięcia.

Charakterystyka prądowo-napięciowa przewodnika spełniającego prawo Ohma jest linią prostą.

### Interpretacja prawa Ohma

Prawo Ohma określa, że natężenie płynącego przez przewodnik prądu dokładnie „nadąża” za zmianami napięcia. Gdy napięcie wzrasta 2-krotnie, wtedy wywołany tym napięciem przepływ prądu też osiągnie natężenie 2 razy większe.

### Kiedy prawo Ohma jest spełnione?

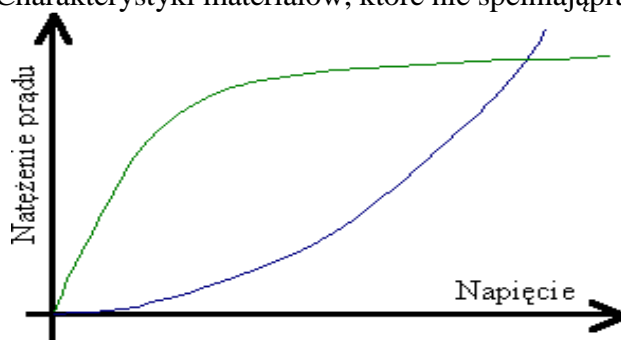
Prawo Ohma jest prawem materiałowym (nie uniwersalnym), co oznacza, że sprawdza się tylko dla niektórych materiałów – substancji. Poza tym prawo to jest słuszne tylko w określonych napięciach i przy ustalonych warunkach zewnętrznych (np. stała powinna być temperatura).

Prawo Ohma jest spełniane przez część materiałów – głównie przez metale i materiały ceramiczne. Istnieje jednak dużo substancji, które prawa Ohma nie spełniają, czyli natężenie przepływającego przez nie prądu zmienia się w sposób nieproporcjonalny do napięcia.

Poza tym stosowalność prawa Ohma może istotnie zależeć od zakresu napięć – np. w typowych sytuacjach przy małych napięciach natężenie jest proporcjonalne do napięcia, ale po przejściu w zakres dużych napięć proporcjonalność się załamuje.

Na rys. 7.3 przedstawione są charakterystyki materiałów, które nie spełniają prawa Ohma.

Rys. 7.3. Charakterystyki materiałów, które nie spełniają prawa Ohma.



### Materiały spełniające i niespełniające prawa Ohma

Do materiałów spełniających prawo Ohma należą przewodniki:

- metale (np. miedź, złoto, srebro, żelazo),
- grafit,
- niektóre materiały ceramiczne,
- większość elektrolitów.

Prawa Ohma nie spełniają:

- półprzewodniki,
- gazy (choć w pewnych zakresach napięć mogą być one zgodne z tym prawem).

## 7.2. Prawa Kirchhoffa

### I prawo Kirchhoffa

I prawo Kirchhoffa odnosi się do sytuacji, gdy prąd płynący w jakimś układzie ulega rozgałęzieniu, czyli gdy przewody z prądem łączą się w jakimś punkcie.

Ponieważ ładunki elektryczne nie mogą zniknąć ani powstawać z niczego, a standardowy przewodnik właściwie nie potrafi ich gromadzić (wyjątkiem są kondensatory), to jasne jest, że jeśli w jakimś czasie do rozgałęzienia dopłynął ładunek  $q$ , to w tym samym czasie z tego rozgałęzienia musiał również taki sam ładunek  $q$  odpłynąć.

Wiedząc, że ładunek wpływający czy wypływający w jednostce czasu można wyrazić przez natężenie prądu  $I$ , więc prawo to można sformułować, odwołując się do natężenia prądu:

### Sformułowanie I prawa Kirchhoffa

*Suma natężeń prądów wpływających do węzła,  
równa jest sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła.*

W ogólnym przypadku prawo to można zapisać wzorem:

$$\sum_{\alpha=1,2,\dots} I_{\alpha} = 0, \quad (7.8)$$

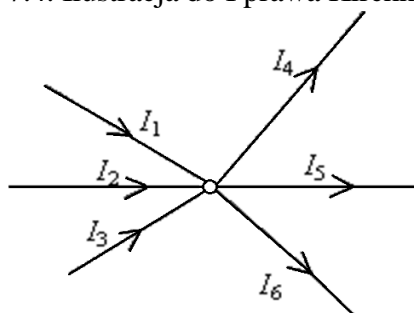
albo w postaci:

$$\sum I_{\text{wpływające}} = \sum I_{\text{wypływające}}. \quad (7.8a)$$



## Przykład

Rys. 7.4. Ilustracja do I prawa Kirchhoffa.



Dla sytuacji na rysunku 7.4 zgodnie z I prawem Kirchhoffa mamy:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5 + I_6. \quad (7.8b)$$

Z zaznaczeń na krawędziach strzałkami (rys. 7.4.) wynika, że prądy  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  wpływają do węzła, a prądy  $I_4$ ,  $I_5$ ,  $I_6$  z niego wypływają.

## II prawo Kirchhoffa

II prawo Kirchhoffa jest uzupełnieniem I. Oba te prawa łącznie pozwalają na tzw. „Rozwiązywanie obwodów”, czyli na obliczanie natężeń prądów płynących w różnych gałęziach obwodu, dzięki znajomości oporów i sił elektromotorycznych źródeł.

II prawo Kirchhoffa odnosi się do spadków napięć na elementach obwodu. Wynika ono ze zrozumienia faktu, że napięcia w obwodzie nie biorą się znikąd. Jeżeli gdzieś na oporniku jest jakieś napięcie, to znaczy, że musi też gdzieś istnieć źródło, które generuje prąd przepływający przez opornik. I wszystkie napięcia pochodzące od źródeł muszą sumować się z napięciami doznającymi spadku na opornikach.

## Sformułowanie II prawa Kirchhoffa

II prawo Kirchhoffa można sformułować na kilka sposobów. Oto jeden z nich:

*W obwodzie zamkniętym suma spadków napięć na wszystkich odbiornikach prądu musi być równa sumie sił elektromotorycznych występujących w tym obwodzie.*

$$\sum_{\alpha=1,2,\dots} U_{\alpha} = \sum_{k=1,2,\dots} E_k \quad (7.9)$$

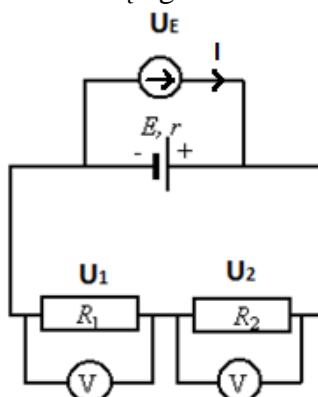
gdzie:  $E_k$  – siła elektromotoryczna źródła napięcia  $k$ ,

$U_{\alpha}$  – spadek napięcia na elemencie  $\alpha$ .

## Przykład 1

Dla przykładowego obwodu zamkniętego podłączono 2 odbiorniki prądu (rys. 7.5). Jaki związek zachodzi między napięciami przez nie wskazywanymi?

Rys. 7.5. Schemat obwodu zamkniętego z dwoma odbiornikami o oporach  $R_1, R_2$ .



Jeśli napięcie źródła oznaczymy przez  $U_E$ , a napięcia na opornikach odpowiednio przez  $U_1$  i  $U_2$ , to prawdziwa będzie zależność:

$$U_E = U_1 + U_2. \quad (7.10)$$

### 7.3. Równanie Maxwella

Podstawowe równania elektrodynamiki klasycznej zostały zebrane i rozwinięte przez J.C. Maxwell – opisują one zależności między polami elektrycznym i magnetycznym.

1) Prawo Gaussa dla elektryczności – źródłem pola elektrycznego są ładunki, a strumień tego pola przez dowolną powierzchnię zamkniętą zależy tylko od ładunku zamkniętego przez tę powierzchnię:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (7.11)$$

2) Prawo Faradaya – zmiana strumienia indukcji magnetycznej przez powierzchnię zamkniętej pętli powoduje powstanie w tej pętli siły elektromotorycznej indukcji (SEM), a kierunek płynącego prądu jest taki, żeby przeciwdziałać zmianom powodującym indukcję (reguła Lenza):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (7.12)$$

3) Prawo Gaussa dla magnetyzmu – nie istnieją ładunki magnetyczne, a strumień pola magnetycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy 0:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (7.13)$$

4) Prawo Ampere'a – źródłem pola magnetycznego może być zmienne pole elektryczne i płynący prąd elektryczny:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (7.14)$$

W postaci całkowej podstawowe równania elektrodynamiki klasycznej mają postać:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q}{\epsilon}, \\ \oint_\tau \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}, \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0, \\ \oint_\tau \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu I + \mu \epsilon \frac{\partial \Phi_q}{\partial t}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

gdzie:  $q$  – gęstość ładunku,  
 $\varepsilon$  – przenikalność dielektryczna,  
 $\mu$  – przenikalność magnetyczna,  
 $\vec{j}$  – gęstość prądu,  
 $\Phi_E$  – strumień indukcji magnetycznej,  
 $E$  – strumień natężenia pola elektrycznego,  
 $B$  – indukcja pola magnetycznego,  
 $\nabla(\ ) = \frac{\partial(\ )}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(\ )}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(\ )}{\partial z} \vec{k}$  – operator gradientu,  
 $\nabla \times$  – operator rotacji (iloczyn wektorowy operatora gradientu przez funkcje).

W tabl. 7.1. zestawiono prawa elektryczności i magnetyzmu w postaci różniczkowej. W ostatniej kolumnie tablicy podano interpretację fizyczną sformułowanych praw.

Tab. 7.1. Zestawienie praw elektryczności i magnetyzmu w postaci różniczkowej.

<b>Prawo:</b>	<b>Postać różniczkowa</b>	<b>Interpretacja fizyczna</b>
indukcji elektromagnetycznej Faradaya	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Pole magnetyczne $\vec{B}$ wytwarza pole elektryczne $\vec{E}$
uogólnione Ampera	$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Przepływający prąd o gęstości $\vec{j}$ i pole elektryczne wytwarzają pole elektryczne $\vec{B}$
Gaussa dla elektryczności	$\nabla \times \vec{E} = \frac{q}{\varepsilon}$	Ładunki $q$ są źródłem pola elektrycznego $\vec{E}$
Gaussa dla magnetyzmu	$\nabla \times \vec{B} = 0$	Pole magnetyczne $\vec{B}$ jest bezźródłowe

## 8. Charakterystyczne przykłady

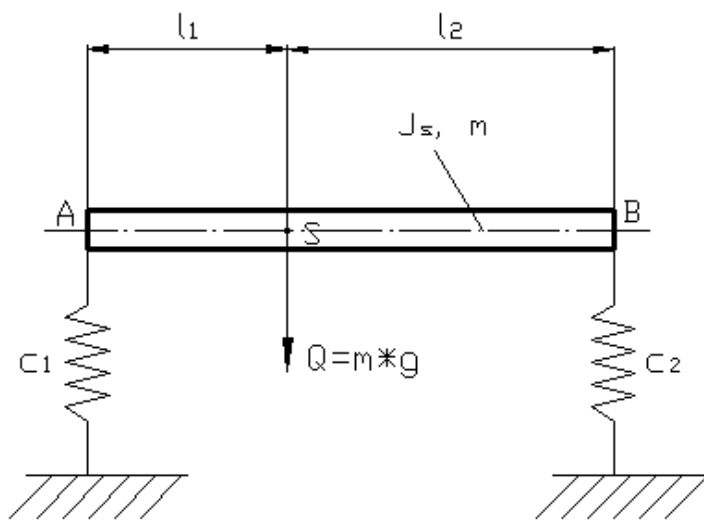
### 8.1. Wyznaczyć częstotliwości drgań układu o 2 stopniach swobody

Układ w postaci belki o masie  $m$  i masowym momencie bezwładności  $I_s$  podparty jest na sprężynach o stałych  $c_1$  i  $c_2$  (rys. 8.1.). Wyznaczyć częstotliwości drgań własnych układu.

Dane:

$$m=1500\text{kg}, \quad l_1=1.4\text{m}, \quad l_2=1.6\text{m}, \quad c_1=44145 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad c_2=41202 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad I_s = 3500\text{kgm}^2$$

Rys. 8.1. Model belki drgającej w płaszczyźnie pionowej.



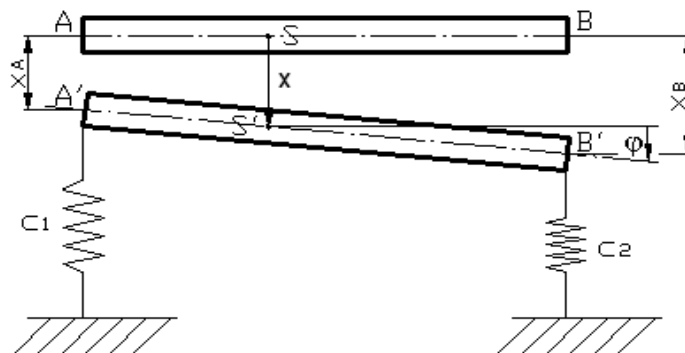
### Rozwiązanie

Stwierdzamy, że układ posiada 2 stopnie swobody i dla zapisu ruchu układu przyjmuje się 2 współrzędne uogólnione (rys. 8.2):

$x$  – przemieszczenie środka masy,

$\varphi$  – kąt obrotu belki dokoła osi przechodzącej przez środek masy i prostopadłej do płaszczyzny ruchu drgającego.

Rys. 8.2. Model belki po przemieszczeniu, w płaszczyźnie pionowej.



Zgodnie z rys. 8.2 przemieszczenia górnych końców sprężyn wynoszą:

$$\begin{aligned}x_A &= x - l_1\varphi, \\x_B &= x + l_2\varphi.\end{aligned}\tag{8.1.1}$$

Stosując formalizm Newtona-Eulera, równania różniczkowe ruchu układu można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= mg - c_1(x - l_1\varphi) - c_2(x + l_2\varphi), \\J_s\ddot{\varphi} &= -c_2(x + l_2\varphi)l_2 + c_1(x + l_1\varphi)l_1.\end{aligned}\tag{8.1.2}$$

Po hierarchicznym uporządkowaniu składników układu równań mamy:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + (c_1 + c_2)x - (c_1l_1 - c_2l_2)\varphi &= mg, \\-(c_1l_1 - c_2l_2)x + J_s\ddot{\varphi} + (c_1l_1^2 + c_2l_2^2)\varphi &= 0.\end{aligned}\tag{8.1.3}$$

Dla wyznaczenia częstości drgań własnych zbadamy rozwiązanie jednorodnego układu równań:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + (c_1 + c_2)x - (c_1l_1 - c_2l_2)\varphi &= 0, \\-(c_1l_1 - c_2l_2)x + J_s\ddot{\varphi} + (c_1l_1^2 + c_2l_2^2)\varphi &= 0.\end{aligned}\tag{8.1.4}$$

Rozwiązanie równań (8.1.4) przewidujemy w postaci:

$$\begin{aligned}x &= X\sin(\alpha t + \varphi), \\ \varphi &= \Phi\sin(\alpha t + \gamma).\end{aligned}\tag{8.1.5}$$

Równania (8.1.5) oraz ich drugie pochodne względem czasu podstawiamy do układu równań (8.1.4). Żądając spełnienia tych równań w każdej chwili czasu, otrzymuje się układ równań algebraicznych ze względu na poszukiwane amplitudy  $X$  i  $\Phi$ . Mamy:

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2 - m\alpha^2)X - (c_1l_1 - c_2l_2)\Phi &= 0, \\-(c_1l_1 - c_2l_2)X + (c_1l_1^2 + c_2l_2^2 - J_s\alpha^2)\Phi &= 0.\end{aligned}\tag{8.1.6}$$

Przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny układu równań (8.1.6), otrzymujemy w formie wyznacznika równanie częstości:

$$\begin{vmatrix}c_1 + c_2 - m\alpha^2 & c_2l_2 - c_1l_1 \\c_2l_2 - c_1l_1 & c_1l_1^2 + c_2l_2^2 - J_s\alpha^2\end{vmatrix} = 0.\tag{8.1.7}$$

Będzie tu wygodnie podstawić w miejsce oznaczeń literowych wartości liczbowe:

$$\begin{vmatrix}44145 + 41202 - 1600 \cdot \alpha^2 & 41202 \cdot 1,6 - 44145 \cdot 1,4 \\41202 \cdot 1,6 - 44145 \cdot 1,4 & 44145 \cdot 1,4^2 + 41202 \cdot 1,6^2 - 3500_s \alpha^2\end{vmatrix} = 0.\tag{8.1.8}$$

Po rozwiązaniu wyznacznika i uporządkowaniu otrzymuje się następujące równanie częstości:

$$5600000\alpha^4 - 605916612\alpha^2 + 16369760610 = 0, \quad (8.1.9)$$

Jest to równanie dwukwadratowe względem  $\alpha$  i jego rozwiązaniem będą 2 częstości własne:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 = 52,20; \quad \alpha_1 = 7,22s^{-1}, \\ \alpha_2^2 = 56,00; \quad \alpha_2 = 7,48s^{-1}. \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

Znając częstości drgań własnych  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , rozwiązanie ogólne układu równań (8.1.5) otrzymujemy w postaci:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{11}(t) + x_{12}(t), \\ \varphi(t) &= \phi_{21}(t) + \phi_{22}(t), \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

Albo:

$$\begin{aligned} x(t) &= X_{11} \sin(\alpha_1 t + \varphi_1) + X_{12} \sin(\alpha_2 t + \varphi_2), \\ \varphi(t) &= \phi_{21} \sin(\alpha_1 t + \varphi_1) + \phi_{22} \sin(\alpha_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (8.1.12)$$

Z równań (8.1.11) i (8.1.12) wynika, że drgania układu są sumą 2 składowych harmonicznym o częstościach  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Mniejszą częstość nazywamy podstawową (pierwszą) harmoniką, a większą – drugą harmoniką. Częstości  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  są najbardziej istotnymi parametrami układu. Zauważmy, że rozwiązanie (8.1.12) zawiera 4 stałe dowolne  $X_{11}$ ,  $X_{12}$ ,  $\phi_{21}$ ,  $\phi_{22}$ , które wyznaczamy na podstawie warunków początkowych:

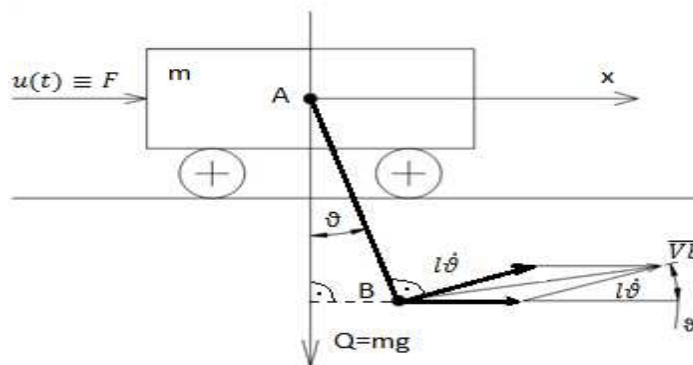
$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, & \dot{x}(0) &= v_0, \\ \varphi(0) &= \varphi_0, & \dot{\varphi}(0) &= \omega_0. \end{aligned} \quad (8.1.13)$$

## 8.2. Analiza ruchu modelu wózka suwnicy z uwzględnieniem doboru regulatora

Przedstawiając ruch wózka suwnicy o masie  $m$ , który jest wzbudzany siłą  $F = u(t)$  i podnoszący ciężar  $Q$ , napisać równania różniczkowe ruchu i podać schemat blokowy uwzględniający dobór regulatora.

Dane:  $m = 120 \text{ kg}$ ,  $Q = 5000 \text{ N}$ ,  $AB = l = 5 \text{ m}$ ,  $F = 50 \text{ N}$ , masa ciężaru  $m_1 = \frac{Q}{g}$ .

Rys. 8.3. Model wózka suwnicy wzbudzanego siłą  $\vec{F}$ .



## Rozwiązanie

Dla opisanego pozycjonowania ładunku  $Q$  przewożonego przez suwnicę określamy kolejno:

- Liczbę stopni swobody:  $s = 2$ ;
- Opisowe współrzędne i macierz współrzędnych uogólnionych;
 
$$q_1 = x(t), \quad q_2 = \vartheta(t), \quad q = [x \ \vartheta]^T \quad (8.2.1)$$

- Energię kinetyczną układu:
 
$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1V_b^2, \quad \text{gdzie: } V_b^2 = \dot{x}^2 + (l\dot{\vartheta})^2 + 2\dot{x}l\dot{\vartheta}\cos\vartheta \quad (8.2.2)$$

- Energię potencjalną układu:
 
$$U = m_1gl(1 - \cos\vartheta), \quad (8.2.3)$$

- Potencjał Lagrange'a:
 
$$L(x, \dot{x}, \vartheta, \dot{\vartheta}) = E - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\vartheta}\cos\vartheta) - m_1gl(1 - \cos\vartheta); \quad (8.2.4)$$

- Składniki równań Lagrange'a:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m_1l^2\dot{\vartheta} + m_1\dot{x}l\cos\vartheta, \quad (8.2.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = m_1l\sin\vartheta. \quad (8.2.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + m_1\dot{x} + m_1l\dot{\vartheta}\cos\vartheta, \quad (8.2.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (8.2.8)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + m_1\ddot{x} + m_1l\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - m_1l\dot{\vartheta}\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}, \quad (8.2.9)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = m_1l\ddot{\vartheta} + m_1l\ddot{x}\cos\vartheta - m_1l\dot{x}\sin\vartheta\dot{\vartheta}. \quad (8.2.10)$$

- Siły uogólnione:

$$Q_x\delta x + Q_\vartheta\delta\vartheta = u\delta x + 0\delta\vartheta, \quad (8.2.11)$$

$$Q_x = u(t) \equiv F, \quad Q_\vartheta = 0.$$

Po podstawieniu wyznaczonych składników do równania Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad (8.2.12)$$

otrzymujemy układ równań różniczkowych ruchu wózka suwnicy w postaci:

$$(m + m_1)\ddot{x} + m_1l\cos\vartheta\ddot{\vartheta} - m_1l\sin\vartheta\dot{\vartheta}^2 = u(t), \quad (8.2.13)$$

$$m_1l\cos\vartheta\ddot{x} + l^2\ddot{\vartheta} - l_1gl\sin\vartheta = 0, \quad (8.2.14)$$

albo w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} m + m_1 & m_1 l \cos \vartheta \\ m_1 l \cos \vartheta & m_1 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\vartheta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m_1 l \sin \vartheta \dot{\vartheta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\vartheta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g l \sin \vartheta \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (8.2.15)$$

Równanie to w symbolicznej postaci można zapisać:

$$M(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q})\dot{q} + K(q) = Q, \quad (8.2.16)$$

gdzie:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m + m_1 & m_1 l \cos \vartheta \\ m_1 l \cos \vartheta & m_1 l^2 \end{bmatrix}, \quad (8.2.17)$$

$$B(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -m_1 l \sin \vartheta \dot{\vartheta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.2.18)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g l \sin \vartheta \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (8.2.19)$$

Przy badaniu stabilności (stateczności) posługujemy się wyrażeniem:

$$\dot{M}(q) - 2B(q, \dot{q}). \quad (8.2.20)$$

Łatwo wykazać, że w rozważanym przypadku wyrażenie (8.2.20) ma postać:

$$\dot{M}(q) - 2B(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & m_1 l \sin \vartheta \dot{\vartheta} \\ -m_1 l \sin \vartheta \dot{\vartheta} & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.2.21)$$

Zauważmy, że macierz bezwładności  $M(q)$  jest macierzą symetryczną, a macierz pomocnicza  $\dot{M} - 2B$  macierzą skośnie symetryczną.

Jeżeli za  $\vartheta$  podstawimy  $\vartheta + \pi$ , to w macierzy bezwładności pojawią się znaki ujemne w elementach symetryzujących, podobnie zmienią się znaki, gdzie występują funkcje  $\sin(180^\circ + \vartheta)$  i równania różniczkowe ruchu będą opisywać tzw. wahadło odwrócone.

W celu wyznaczenia parametrów dynamicznych regulatora, który będzie oddziaływał na układ w ten sposób, że na obiekt będzie zadawał wartościujące wymuszenie  $u$ , to procedura ta wymaga zapisu równania różniczkowego ruchu w następującej postaci macierzowej.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\vartheta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\vartheta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g l \sin \vartheta \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (8.2.22)$$

Dalej należy wyznaczyć sygnał  $\dot{s}$  na wejściu do regulatora. Przyjmiemy go np. w postaci:

$$\dot{s} = \begin{bmatrix} \dot{s}_x \\ \dot{s}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x + k_1 \dot{e}_x \\ e_\vartheta + k_2 \dot{e}_\vartheta \end{bmatrix}, \quad (8.2.23)$$



czyli takiej, która posiada 2 składniki; proporcjonalny i różniczkowy (PD),  
gdzie:  $k_1, k_2$  – stałe dodatnie.

Wartość wektora  $\bar{e}$  ( $e_x, e_y$ ) – czyli tzw. wektor błędu, przedstawimy jako:

$$e = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_d \\ \vartheta - \vartheta_d \end{bmatrix}. \quad (8.2.24)$$

Uwzględniając wektor  $\bar{s}$ , równanie dla sygnału na wejściu do regulatora przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}_x \\ \ddot{s}_\vartheta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_x \\ \dot{s}_\vartheta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3 & 0 \\ 0 & k_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_\vartheta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m + u + k_3 s_x \\ F_a + k_u s_\vartheta \end{bmatrix}. \quad (8.2.25)$$

przy czym: 
$$u = -F_m - F_f - k_3 s_x, \quad (8.2.26)$$

gdzie:

$$F_f = \frac{(1+k)s_x}{s_x^2 + \varepsilon} (s_\vartheta F_a + k_4 s_\vartheta^2), \quad (8.2.27)$$

natomiast:

$$k(t) = \sqrt{Z(t)}. \quad (8.2.28)$$

Przy czym funkcja  $Z(t)$  jest dodatnio określona.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_x \\ \dot{s}_\vartheta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_\vartheta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3 & 0 \\ 0 & k_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_\vartheta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_f \\ F_a + k_u s_x \end{bmatrix}, \quad (8.2.29)$$

albo w bardziej zwartej formie:

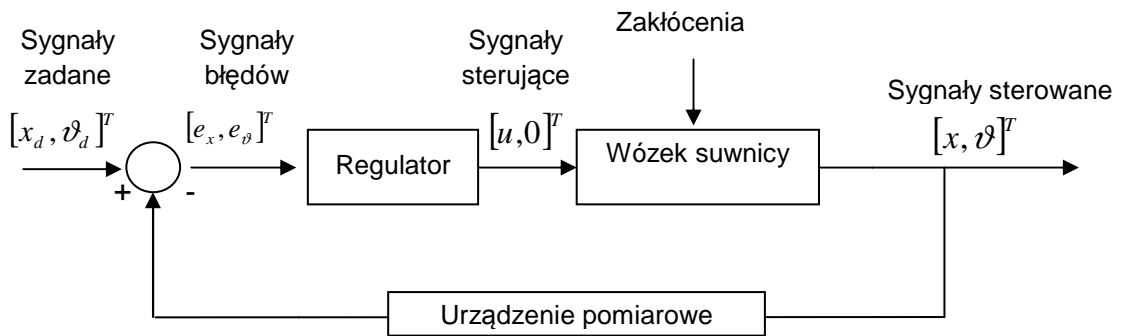
$$M(q)\ddot{s} + B(q\dot{q})\dot{s} + Ks = \begin{bmatrix} -F_f \\ F_a + k_u s_x \end{bmatrix}. \quad (8.2.30)$$

Można wykazać, że błąd dynamiczny w tym równaniu, który wynika z prawa sterowania, jest asymptotycznie stabilny w sensie Lapunowa, czyli mamy dodatnią funkcję:

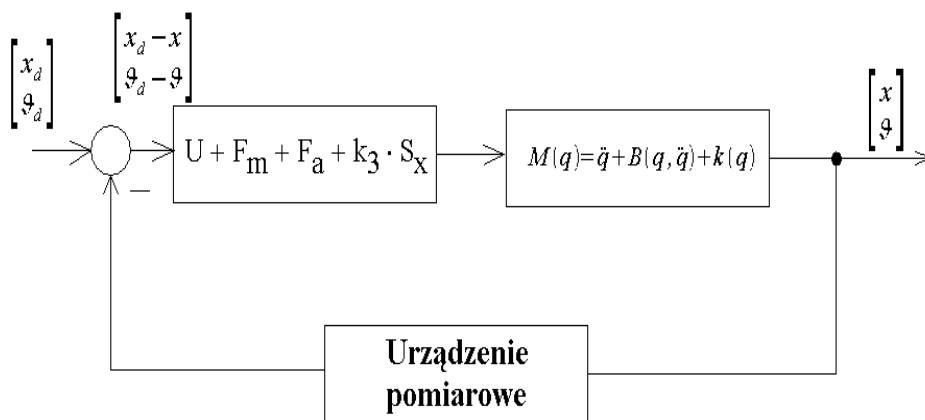
$$V(t) = -\dot{s}^T K \dot{s}. \quad (8.2.31)$$

Na rys.8.4 przedstawiono schemat blokowy układu sterowania, a na rys. 8.5 schemat blokowy regulatora.

Rys. 8.4. Schemat blokowy układu sterowania pozycjonowania wózka suwnicy.

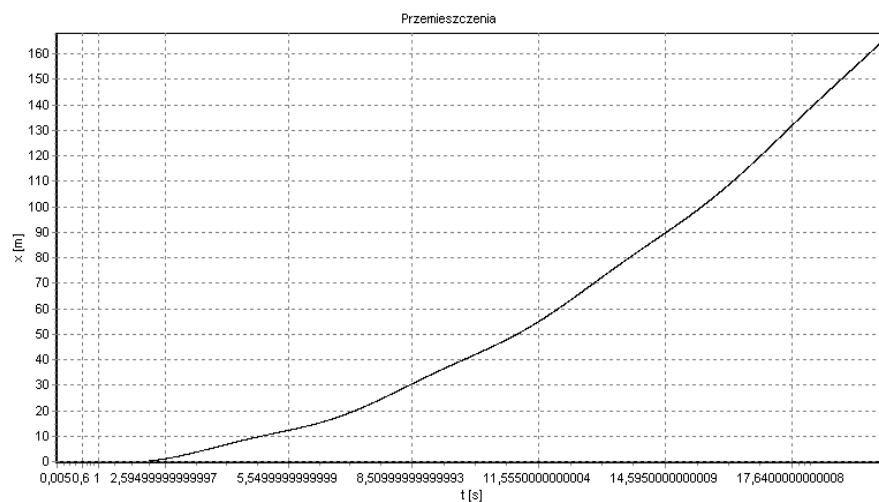


Rys. 8.5. Schemat blokowy regulatora.

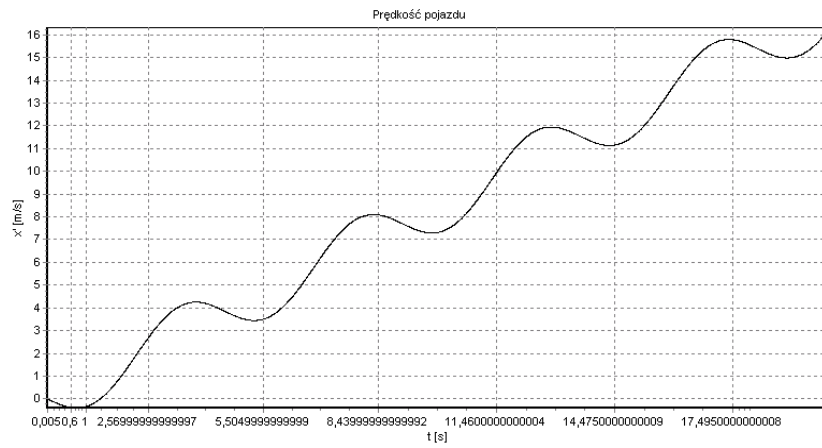


Wykorzystując równania ruchu, można wyznaczyć przebiegi przemieszczeń, prędkości, przyspieszeń w czasie.

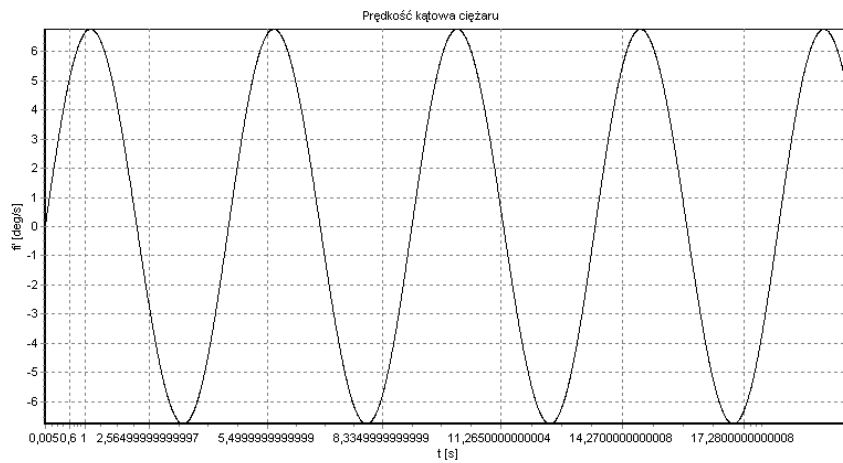
Rys. 8.6. Wykres przemieszczeń  $x(t)$ .



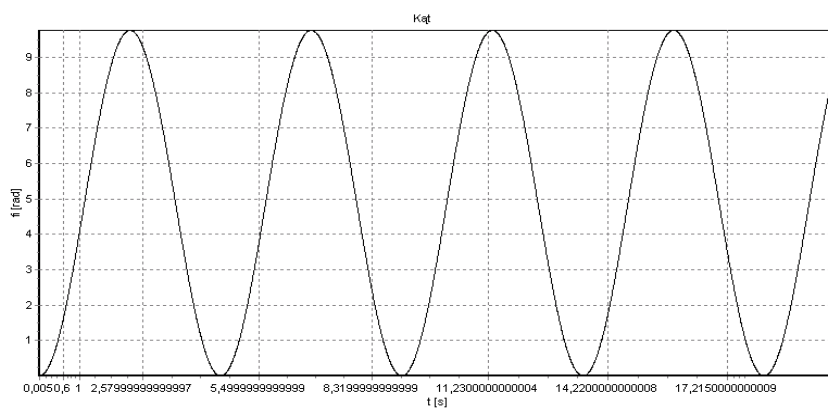
Rys. 8.7. Wykres prędkości wózka  $v(t)$  czyli  $\dot{x}$ .



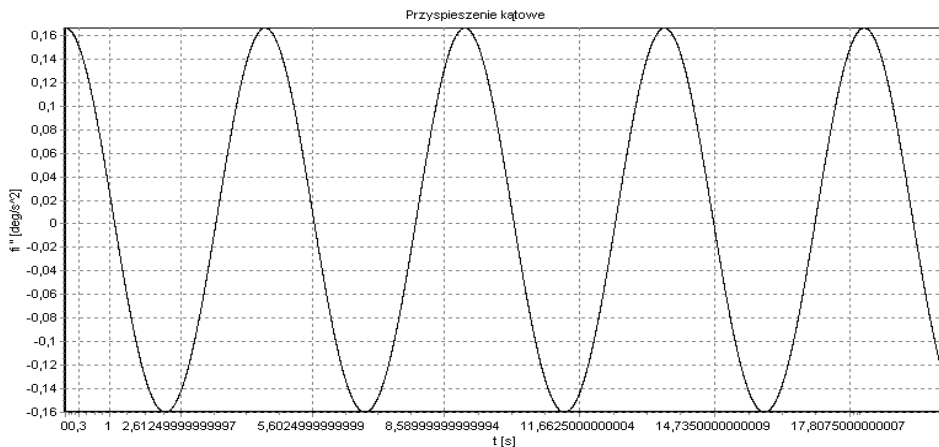
Rys. 8.8. Wykres zmiany kąta  $\vartheta(t)$  czyli  $\vartheta$ .



Rys. 8.9. Wykres prędkości kątowej  $\omega(t)$  czyli  $\dot{\vartheta}$ .



Rys. 8.10. Wykres przyspieszenia kąowego  $\varepsilon(t)$ , czyli  $\ddot{\vartheta}$ .



### 8.3. Wyznaczanie równań ruchu oraz częstości drgań własnych

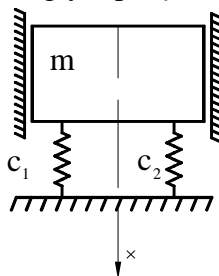
Dla układów o jednym stopniu swobody, przedstawionych na rysunku, wyznaczyć równania ruchu oraz częstości drgań własnych dla przypadków, gdy:

- sprężyny są równoległe,
- sprężyny są połączone szeregowo.

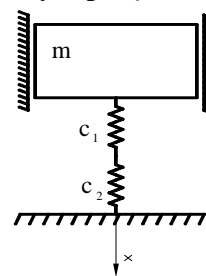
Dane:

$$m = 1500 \text{ kg}, \quad c_1 = 4500 \frac{\text{kG}}{\text{m}} = 44130 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad c_2 = 4200 \frac{\text{kG}}{\text{m}} = 41188 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Rys. 8.11. Układ z równoległym połączeniem sprężyn.



Rys. 8.12. Układ z szeregowym połączeniem sprężyn.



#### R o z w i ą z a n i e

Sztywności zastępcze dla podanych układów wynoszą:

a) Dla równoległego układu sprężyn:

$$c_{z1} = c_1 + c_2,$$

$$c_{z1} = 85328 \frac{\text{N}}{\text{m}},$$

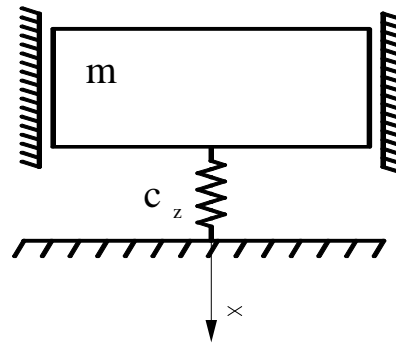
b) Dla szeregowego układu sprężyn:

$$c_{z2} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2},$$

$$c_{z2} = 21304.14 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Oba układy można przedstawić jako oscylator harmoniczny ze sztywnością zastępczą  $c_z$  w następujący sposób:

Rys. 8.13. Układ zastępczy.



Równanie różniczkowe ruchu dla zastępczego układu przyjmuje postać:

$$m\ddot{x} + c_z \dot{x} = 0,$$

$$\ddot{x} - \frac{c_z}{m} \dot{x} = 0,$$

$$\ddot{x} - \omega_n^2 x = 0,$$

gdzie:  $\omega_n = \sqrt{\frac{c_z}{m}}$  – częstość drgań własnych.

Dla naszych układów częstości drgań własnych wynoszą zatem:

a) dla podparcia równoległego:

$$\omega_{n1} = 7.542 \frac{1}{s},$$

b) dla podparcia szeregowego:

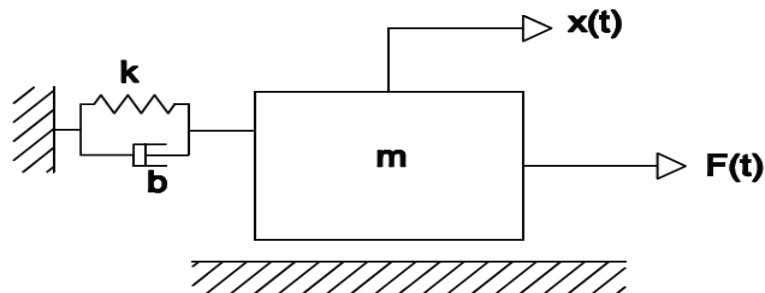
$$\omega_{n2} = 3.769 \frac{1}{s}.$$

#### 8.4. Analogie elektromechaniczne

Wszystkie pola fizyczne, mechaniczne, elektryczne, elektromagnetyczne, hydrauliczne i inne podlegają tym samym prawom przyrody oraz mają podobny opis matematyczny. W postaci ciągłej są to zwykle równania różniczkowe II rzędu. Analogia to odpowiedniość, podobieństwo pewnych cech między odmiennymi, skądinąd przedmiotami, zjawiskami. Przykładowo, analogowa maszyna matematyczna to urządzenie, w którym wielkości i działania są modelowane za pomocą zjawisk fizycznych, np. przez prąd i odpowiednie układy elektroniczne. Analizując drgający układ mechaniczny o jednym stopniu swobody i dyskretne obwody elektryczne, przedstawimy analogię napięciową i prądową tych układów. Prekursorami tych zagadnień byli: Lord Kelvin (W. Thomson 1824-1907) i M. Faraday (1791-1867).

### 8.4.1. Układ o 1 stopniu swobody

Rys. 8.14. Układ drgający o jednym stopniu swobody.



Równanie różniczkowe ruchu ma postać:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t), \quad (8.4.1)$$

gdzie:  $m$  – masa (parametr bezwładności),

$b$  – współczynnik oporu blisko tycznego (parametr oporu),

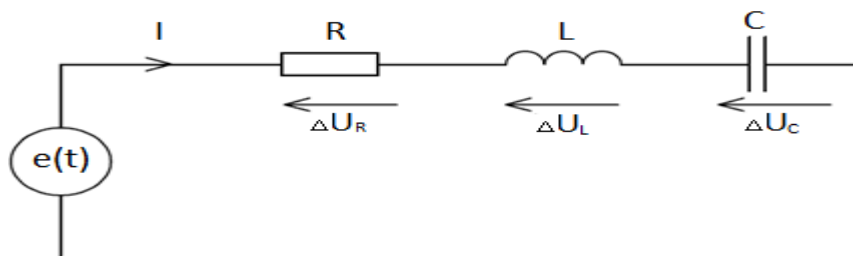
$k$  – sztywność sprężyny (parametr sprężystości),

$F(t)$  – wymuszenie siłowe.

### 8.4.2. Obwody elektryczne

#### I. Analogia napięciowa

Rys. 8.15. Schemat obwodu elektrycznego przedstawiający spadki napięć na poszczególnych elementach.



Do opisu obwodu elektrycznego (rys. 8.15) korzystamy z II prawa Kirchoffa, które mówi o tym, że w zamkniętym obwodzie suma napięć jest równa 0. Wynika z tego, że:

$$\sum U_i = e(t). \quad (8.4.2)$$

Zgodnie z rys. 8.15 mamy:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t), \quad (8.4.3)$$

gdzie:  $L$  – indukcyjność,  $R$  – opór elektryczny,

$C$  – pojemność elektryczna.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t). \quad (8.4.4)$$

Korzystając z praw elektryczności, wiemy że:

$$U_L = L \frac{di}{dt}, \quad (8.4.5)$$

$$U_R = Ri, \quad (8.4.6)$$

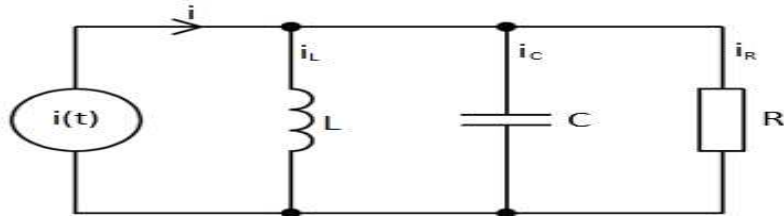
$$U_C = \frac{1}{C} \int idt. \quad (8.4.7)$$

## II. Analogia prądowa

Do opisu układu elektrycznego (rys. 8.16) zastosujemy I prawo Kirchhoffa, zgodnie z którym suma natężeń prądów wchodzących do węzła jest równa sumie natężeń prądów wychodzących z węzła. Można to zapisać w następującej postaci:

$$\sum i_k = i(t). \quad (8.4.8)$$

Rys. 8.16. Schemat obwodu elektrycznego do przedstawienia analogii prądowej.



Uwzględniając dane z rys. 8.16, otrzymujemy:

$$C\ddot{\phi} + \frac{1}{R}\dot{\phi} + \frac{1}{L}\phi = i(t), \quad (8.4.9)$$

gdzie: C – pojemność elektryczna,  
R – opór elektryczny,  
L – indukcja.

Korzystając z praw elektryczności, wiemy że:

$$i_L = \frac{1}{L} \int U dt, \quad (8.4.10)$$

$$i_R = \frac{1}{R} U, \quad (8.4.11)$$

$$i_C = C \frac{dU_C}{dt}, \quad (8.4.12)$$

Wprowadzając strumień magnetyczny  $\phi$  w postaci:

$$\phi = \int U dt, \quad (8.4.13)$$

możemy zapisać zależności (8.4.11), (8.4.12), (8.4.13) w poniższej formie:

$$i_L = \frac{1}{L} \phi, \quad (8.4.14)$$

$$i_R = \frac{1}{R} \dot{\phi}, \quad (8.4.15)$$

$$i_C = C \ddot{\phi}. \quad (8.4.16)$$

Postaci równań obwodów I i II są analogiczne do postaci równania drgań o jednym stopniu swobody (8.4.1). W tab. 8.1 przedstawiono porównanie parametrów analogii napięciowej i prądowej z masową.

Tab. 8.1. Tabela porównawcza parametrów omawianych analogii.

Analogia	Parametry			
	bezwładność	opór	sprężystość	wymuszenie
napięciowa	L	R	$\frac{1}{C}$	e(t)
prądowa	C	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{L}$	i(t)
masowa	m	b	k	F(t)

Na podstawie zestawionych parametrów (tab. 8.1.) można zauważyć, że w przypadku analogii napięciowej opór R modeluje współczynnik tłumienia b. W analogii prądowej współczynnikowi tłumienia b analogii masowej odpowiada z kolei odwrotność oporu  $1/R$ , czyli przewodność zwana konduktancją. Wnioskujemy, że różne analogie nie zawsze prowadzą do zgodnej odpowiedniości modelowanych parametrów.



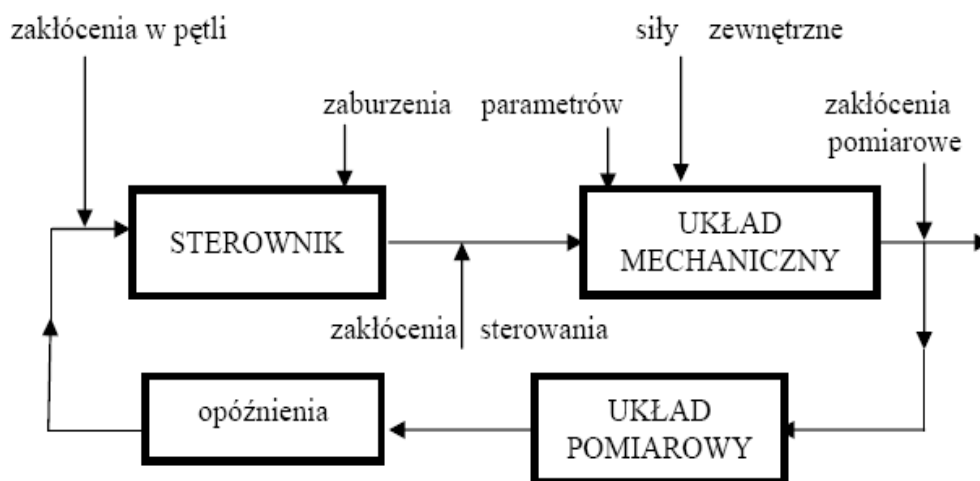
## 9. Sterowanie w mechatronice

### 9.1. Struktura układu mechatronicznego

Układy mechatroniczne z zasady powinny w pewnym stopniu rozpoznać własny stan oraz stan zewnętrznych oddziaływań i na tej podstawie dostosowywać czy modyfikować swoje własności mechaniczne, tak aby w optymalny sposób realizować określone cele. Z tego względu układ mechatroniczny, jako układ sterowania, składa się na ogół z układu mechanicznego (obiektu) i sprzężonego z nim bloku pomiarowego (złożonego z czujników pomiarowych monitorujących stan układu lub tylko pewne funkcje stanu), a także sterownika zawierającego przetworniki A/C, system (np. komputer) do gromadzenia i przetwarzania informacji oraz blok wykonawczy złożony z tłumików, siłowników lub innych elementów sterowanych. Układ mechaniczny może być w ogólności narażony na zaburzenia pod postacią wahań parametrów oraz wpływów sił zewnętrznych, jak zaznaczono na rys. 9.1. Oprócz takich zaburzeń w realizacji praktycznej układu mechatronicznego mogą pojawić się jednak również zaburzenia parametrów samego sterownika. Co więcej, ponieważ w układzie mechatronicznym sterowanie jest zwykle realizowane za pomocą sprzężenia zwrotnego, mogą też wystąpić szkodliwe zaburzenia procesu pomiaru stanu oraz zakłócenia na drodze przekazu do sterownika informacji zwrotnej o aktualnym stanie obiektu. Tego rodzaju oddziaływania są określane jako zakłócenia występujące w pętli sprzężenia zwrotnego. Ponadto, w wielu przypadkach, gdy dynamika układu mechanicznego jest „szybka” w stosunku do dynamiki elementów wykonawczych układu sterowania, trzeba się też liczyć z wpływem opóźnienia przekazu informacji zwrotnej, co może znacznie utrudnić realizację założonego celu sterowania lub obniżyć efektywność zastosowanych sterowań.

Schemat typowego układu mechatronicznego z zaburzeniami, zakłóceniami i opóźnieniami jest przedstawiony na rysunku.

Rys. 9.1. Schemat blokowy układu mechatronicznego.

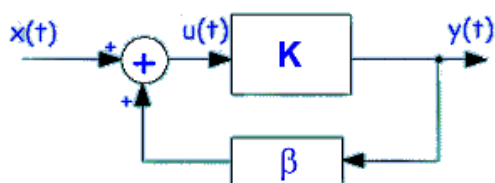


## 9.2. Układy sterowania

Sterowanie (regulacja) polega na takim oddziaływaniu na obiekt sterowania, za pomocą sygnałów wejściowych, aby jego sygnały wyjściowe osiągnęły pożądaną wartość. Sterowanie może być realizowane przy pomocy człowieka – sterowanie ręczne, lub za pomocą specjalnie skonstruowanego urządzenia (regulatora) – sterowanie automatyczne. Sterowanie może odbywać się w układzie otwartym lub zamkniętym. Sterowanie w układzie otwartym (ręczne lub automatyczne) polega na takim nastawie wielkości wejściowej, aby znając charakterystykę obiektu i przewidując możliwość działania nań zakłóceń, otrzymać na wyjściu pożądaną wartość. Sterowanie w układzie zamkniętym (ręczne lub automatyczne) różni się od sterowania w układzie otwartym tym, że człowiek lub regulator otrzymują dodatkowo poprzez sprzężenie zwrotne informacje o stanie wielkości wyjściowej. Informacja ta (odczytana z miernika lub podana w postaci np. napięcia do regulatora) jest używana do korygowania nastawu wielkości wejściowej. Z reguły jeśli oddziaływanie na obiekt jest niepożądane lub nieplanowane, to zjawisko to nazywamy zakłóceniem.

**Sprzężenie zwrotne** – oddziaływanie sygnałów wyjściowych układu (obiektu sterowania) na jego sygnały wejściowe. Polega na otrzymywaniu przez układ (urządzenie sterujące w układzie) informacji o własnym działaniu (o sygnale wyjściowym).

Rys. 9.2. Schemat blokowy układu ze sprzężeniem zwrotnym.



**Sprzężenie zwrotne ujemne** stanowi podstawowy mechanizm samoregulacyjny. Ma ono za zadanie utrzymanie wartości jakiegoś parametru na zadanym poziomie. Zachodzi ono wtedy, gdy jakiegokolwiek zakłócenia powodujące odchylenie wartości parametru od zadanej wartości w którąkolwiek stronę wytwarzają działania prowadzące do zmiany wartości parametru w stronę przeciwną (stąd nazwa „ujemne”), a więc do niwelacji (kompensacji) efektu tego odchylenia. W przypadku sprzężenia zwrotnego ujemnego wartość parametru oscyluje więc wokół wartości zadanej. Sprzężenia zwrotne ujemne występują powszechnie w organizmach żywych i urządzeniach technicznych jako mechanizmy samoregulacji.

**Sprzężenie zwrotne dodatnie** polega na tym, że w sytuacji zakłócenia jakiegoś parametru w układzie, układ ten dąży do zmiany wartości parametru w kierunku zgodnym (stąd – „dodatnie”) z kierunkiem, w którym nastąpiło odchylenie od „zadanej” wartości. Sprzężenie zwrotne dodatnie powoduje zatem narastanie odchylenia. W sprzężeniu zwrotnym dodatnim wartość parametru odchyła się więc od wartości „zadanej” tym szybciej, im dalej już się od niej znajduje. Sprzężenie zwrotne dodatnie stosuje się w generatorach drgań.

**Układ automatyki** – zespół elementów biorących udział bezpośrednio w kierowaniu procesem automatyzacji (sterowaniu obiektem) oraz elementów pomocniczych, który jest uporządkowany na zasadzie ich wzajemnej współpracy, tzn. zgodnie

z kierunkiem przepływu sygnału. Układ automatyki, ze względu na ilość informacji dostarczanych na wejście układu, dzielimy na układ otwarty i zamknięty.

**Układ otwarty** – w układzie tym urządzenie sterujące nie otrzymuje informacji o aktualnej wartości wielkości sterowanej  $y$ .

Rys. 9.3. Schemat blokowy otwartego układu sterowania.

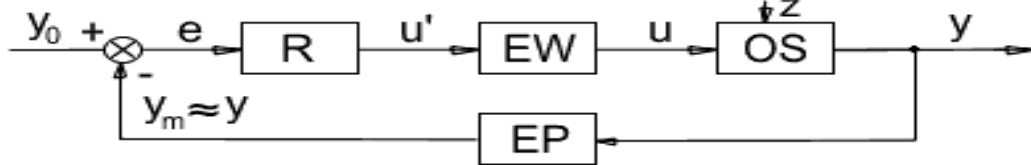


US – urządzenie sterujące  
OS – obiekt sterowania  
 $y_0$  – wielkość zadana  
 $u$  – sygnał sterujący  
 $y$  – wielkość sterowana

EW – element wykonawczy  
EP – element pomiarowy  
 $u'$  – sygnał sterujący na wyjściu US  
 $z$  – zakłócenia.

**Układ zamknięty**, czyli układ automatycznej regulacji (UAR) – układ z ujemnym sprzężeniem zwrotnym.

Rys. 9.4. Schemat blokowy zamkniętego układu sterowania.



R – regulator  
OS – obiekt sterowania  
 $y_0$  – wielkość zadana  
 $u$  – sygnał sterujący  
 $y$  – wielkość regulowana  
 $y_m$  – wielkość regulowana pomierzona przez EP.

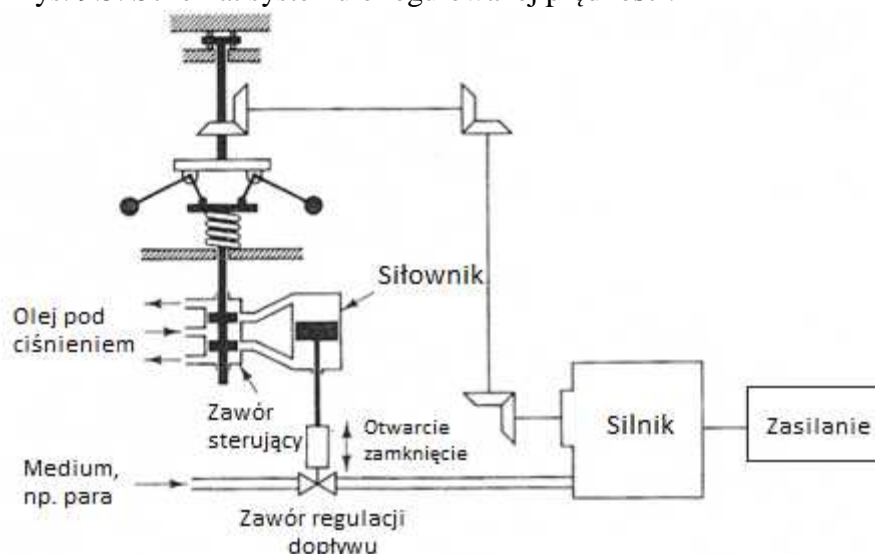
EW – element wykonawczy  
EP – element pomiarowy  
 $u'$  – sygnał sterujący na wyjściu R  
 $z$  – zakłócenia  
 $e$  – uchyb regulacji  $e = y_0 - y_m$ .

W zamkniętym układzie sterowania urządzenie sterujące (regulator) otrzymuje aktualne informacje o bieżących wartościach wielkości sterowanych, przy czym informacje te wpływają na przebieg sterowania. Regulator oddziałuje na obiekt sterowania, ale też obiekt sterowania (sygnał wyjściowy) oddziałuje na regulator. To wzajemne oddziaływanie nazywa się sprzężeniem zwrotnym.

### 9.3. Przykłady sterowania systemów mechatronicznych

**System regulacji prędkości.** Podstawowa zasada regulatora prędkości Watta dla maszyny parowej zilustrowanej na schemacie (rys. 9.5). Suma paliwa dostarczonego do maszyny jest dostosowywana według różnicy między zapotrzebowaniem i rozwijaną prędkością maszyny.

Rys. 9.5. Schemat systemu o regulowanej prędkości.



Kolejność działań może być następująca: szybkość sterownika jest dostosowywana w taki sposób, że w prędkości przepływu niewymuszonego olej będzie płynął do obu stron cylindra. Jeśli faktyczna szybkość przepływu będzie wynosić poniżej wartości wymaganej z powodu zaburzenia, wtedy spadek siły odśrodkowej spowoduje opuszczenie zaworu kontrolnego który dostarczy dodatkową ilość paliwa, co spowoduje wzrost prędkości silnika do osiągnięcia prędkości wymaganej. W innej sytuacji, jeśli prędkość silnika wzrośnie ponad wartość wymaganą, wzrost siły odśrodkowej spowoduje uniesienie zaworu kontrolnego w górę, który zmniejszy zapas paliwa, a szybkość silnika zmniejszy się aż wartość wymagana jest osiągnięta.

W tym systemie regulacji prędkości maszyny, zastosowano siłownik, regulator odśrodkowy i silnik o zmiennej prędkości. Różnica między prędkością pożądaną a faktyczną jest odchyłką sygnału. Regulator sygnału dostosowuje dopływ medium do sterowania silnika (maszyny).

**Automatyczny system sterowania.** Przemysłowe roboty często są używane w przemyśle w celu ulepszenia produktywności. Roboty mogą bez problemu wykonywać zarówno monotonne proste zadania, jak również te bardzo złożone bez błędnych działań, a także pracować w środowisku szkodliwym dla człowieka. Dla przykładu, mogą pracować w ekstremalnych temperaturach (wysokich i niskich), w wysokim lub niskim ciśnieniu, pod wodą lub w kosmosie. Są niezbędne w walce z ogniem, przy wykonywaniu podwodnych operacji, w badaniu kosmosu itd.

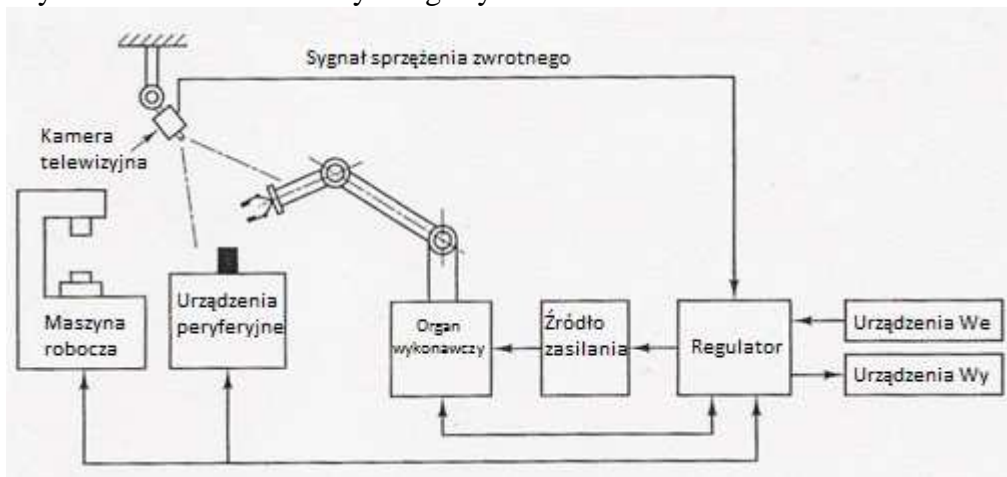
Przemysłowe roboty muszą wykonywać różne operacje przy przedmiotach, które mają rozmaite kształty i wagi. Stąd muszą mieć przynajmniej jedno ramię przegub chwytny. Muszą mieć one dostateczną moc, aby miały zdolność przynajmniej do

ograniczonej mobilności. Dzisiejsze roboty mogą swobodnie przemieszczać się, aby ograniczyć przestrzeń w fabryce.

Przemysłowe roboty mają czujniki, np. mikroprzełączniki, które są umieszczone w ramieniu. Po dotknięciu przedmiotu uruchamia się mikroprzełącznik, potwierdzając pojawienie się przedmiotu, daje sygnał do robota, aby w następnym kroku mógł go chwycić.

Niektóre roboty posiadają systemy optyczne, za pomocą których można przeglądać przestrzeń wokół przedmiotu, rozpoznając wzór, a także określając obecność i orientację przedmiotu. Komputer jest konieczny, aby możliwe było przetworzenie sygnału z systemu optycznego (rys. 9.6). W kilku zastosowaniach skomputeryzowany robot rozpoznaje obecność i orientację każdej mechanicznej części przez proces dopasowania ze wzorem, który polega na odczytaniu kodu liczby przyporządkowanej do niego. Robot podnosi część i rusza na odpowiednie miejsce, gdzie gromadzi poszczególne części w komputerze. Odpowiednie oprogramowanie dopasowuje kontroler.

Rys. 9.6. Schemat automatycznego systemu sterowania w działaniu robota.

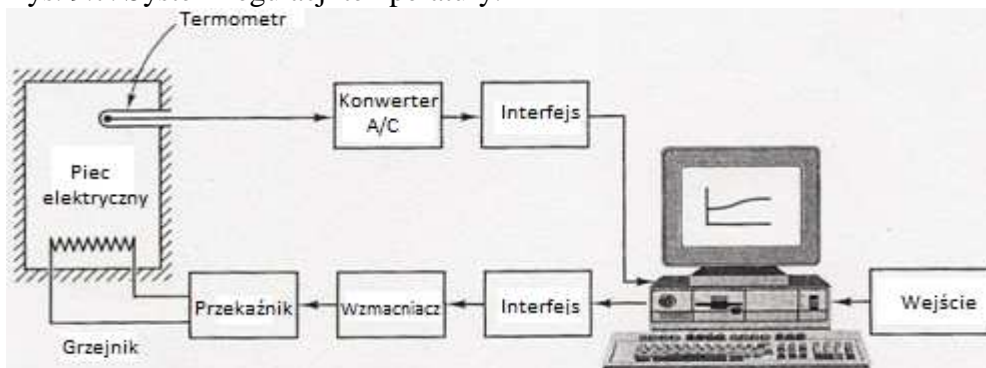


**System kontroli temperatury.** Rys. 9.7 pokazuje schematyczny wykres kontroli temperatury w piecu elektrycznym. Temperatura w piecu elektrycznym jest mierzona za pomocą stalowego termometru. Analogowy sygnał temperatury jest zmieniany do cyfrowej postaci przez A/D konwerter, po czym przekazywany jest do bezpośredniego regulatora interfejsu. Temperatura porównywana jest z programowaną wejściową temperaturą i jeśli znajdzie jakakolwiek niezgodność, regulator wysyła sygnał bezpośrednio do interfejsu i wzmacniacza, gdzie następuje zmiana temperatury pieca do wartości wymaganej.

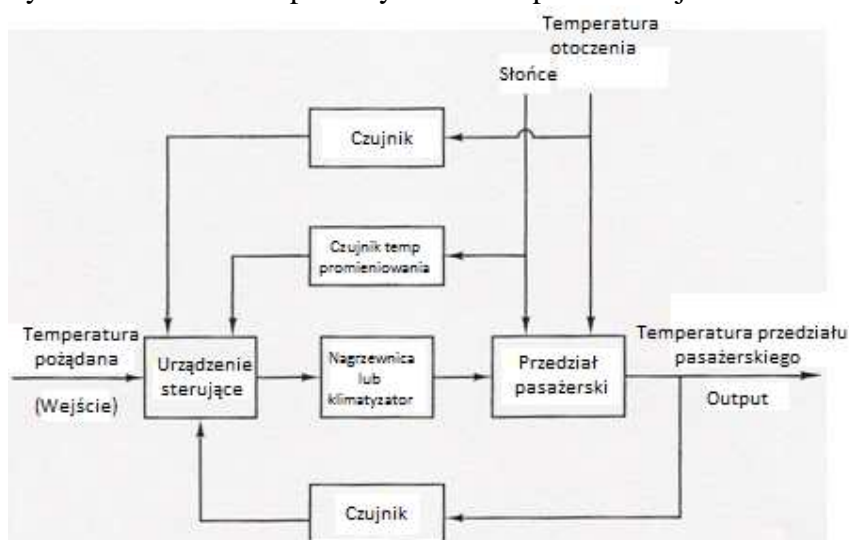
**Regulacja temperatury w kabinie pasażerskiej samochodu.** Rys. 9.8 pokazuje ideę działania kontroli temperatury w kabinie pasażerskiej samochodu. Żądana temperatura zmieniana jest do postaci impulsów napięcia i przekazywana do regulatora. Aktualna temperatura kabiny pasażerskiej przetwarzana jest na impulsy elektryczne przez czujnik, po czym przekazywana do regulatora w celu porównania z temperaturą wejściową. W czasie ruchu samochodu temperatura otoczenia i promieniowanie słoneczne rozpoznawane są jako zaburzenia pomiaru temperatury kabiny.

Temperatura w kabinie pasażerskiej samochodu różni się znacznie – w zależności od tego, gdzie dokonywany jest pomiar. Zamiast używania wielu czujników do pomiaru temperatury bierze się wartość średnią. Ekonomiczniejsze jest montowanie małej dmuchawy i kierowanie mniejszego strumienia powietrza w miejsce, gdzie pasażerowie zazwyczaj odczuwają temperaturę.

Rys. 9.7. System regulacji temperatury.



Rys. 9.8. Kontrola temperatury w kabinie pasażerskiej samochodu.



Regulator otrzymuje sygnały: wejściowy, wyjściowy i sygnały z czujników z różnych źródeł. Regulator wysyła sygnał do klimatyzatora lub grzejnika, aby zbadać temperaturę chłodzonego lub ciepłego powietrza w taki sposób, że kabina w samochodzie posiada żądaną temperaturę.

**System zarządzania biznesem.** System zarządzania biznesem dzieli się na kilka grup. Każde zadanie wyznaczone danej grupie będzie reprezentował dynamiczny element systemu. Metoda sprzężenia zwrotnego dla każdej grupy musi być przyjęta w takim systemie dla właściwej operacji. Krzyżowanie łączy między funkcjonalnymi grupami musi być ograniczone do minimum, aby zmniejszyć niepożądane opóźnienie w systemie.

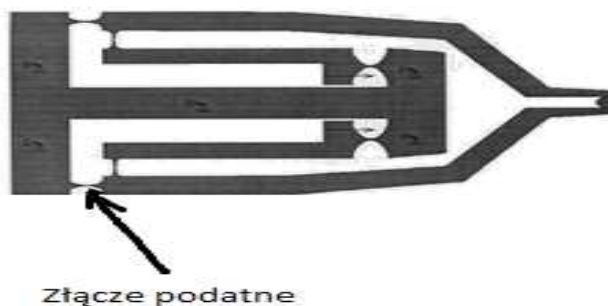
System zarządzania biznesem jest systemem zamkniętym. Dobrze zaprojektowany system redukuje kontrolę i dlatego pozbawiony jest błędów ludzkich, a tym samym przerw w komunikacji.

Chociaż przedstawienie w sposób matematyczny składnika grup z pewnością jest trudnym problemem, to jednak stosowanie optymalizacji technik systemu zarządzania biznesem znacząco ulepsza wydajność tego systemu.

#### 9.4. Chwytki jako urządzenia mechatroniczne

Ciągły rozwój nowoczesnych technologii, okiełznanie natury, tworzenie korelacji między światem techniki a światem biologii i co najważniejsze – nieograniczona wyobraźnia naukowców pozwalają na tworzenie coraz doskonalszych i dziwniejszych maszyn oraz mechanizmów znajdujących powszechne zastosowanie w medycynie, przemyśle czy nauce. Jednym z takich tworów nowoczesnej techniki są chwytki wykorzystywane w maszynach manipulacyjnych. Mogą być wykonane w skali mikro lub nano. Nie posiadają one żadnych przekładni, przegubów czy połączeń rozłącznych. Ich działanie można porównać do pracy ludzkich mięśni, które odpowiednio się kurczą lub rozkurczają pod wpływem właściwych impulsów. Konsekwencją tego jest ruch odpowiednich elementów wykonawczych.

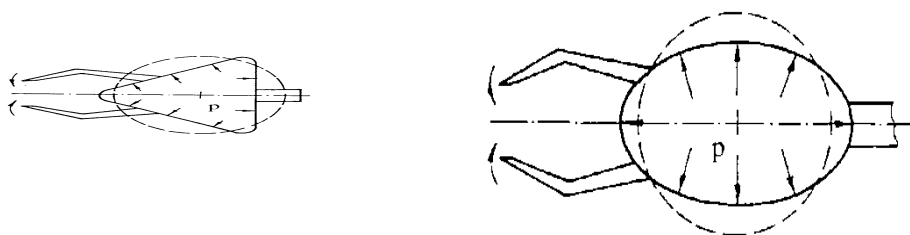
Rys. 9.9. Elastyczny mechanizm mikrochwytaka.



Na rys. 9.9. został przedstawiony schemat prostego mechanizmu mikrochwytaka. Sterowanie tego chwytaka odbywa się przy pomocy wykorzystania zjawiska piezoelektrycznego, elektromagnetycznego lub termicznego. Zadany bodziec powoduje wydłużenie lub skrócenie odpowiedniej części wykonawczej, która tworzy parę kinematyczną, a co za tym idzie – otwarcie lub zamknięcie części odpowiedzialnej za chwytanie przedmiotu.

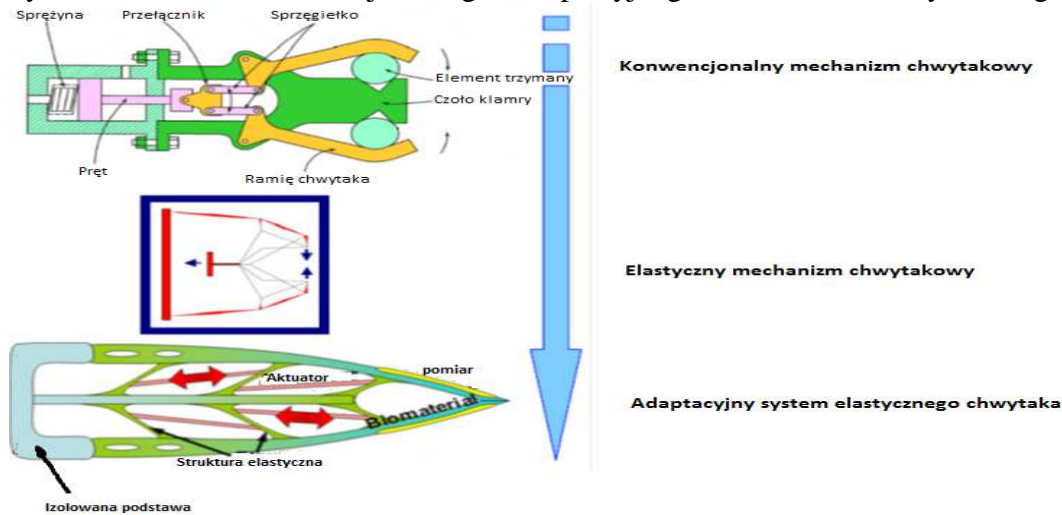
Na kolejnym przykładzie (rys. 9.10) przedstawiono strukturę chwytaka. W tym przypadku zamknięta struktura jest wykonana z elastycznego materiału, który pod wpływem bodźców rozszerza się do określonego pola czy objętości, powodując w ten sposób zaciśnięcie efektora w postaci chwytaka.

Rys. 9.10. Mikrochwytki o ramowej strukturze z elastycznym materiałem.

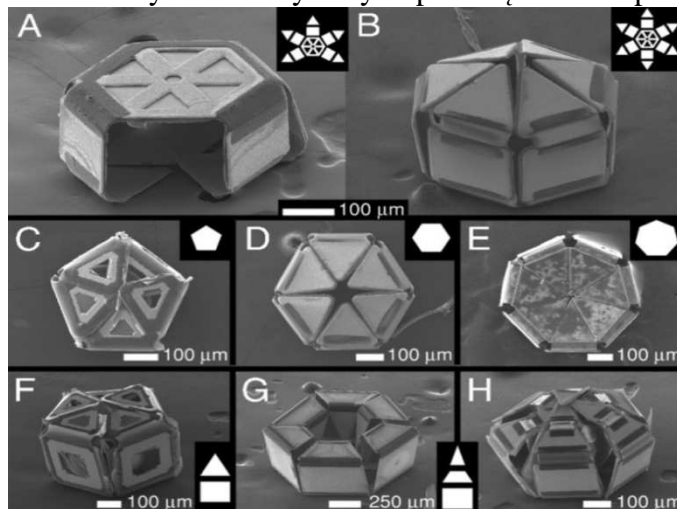


Następnym przykładem jest adaptacyjny system elastycznego chwytaka. Polega on na tym, że część robocza chwytaka odpowiedzialna za złapanie i późniejsze przytrzymanie obiektu potrafi w pewnym stopniu zaadaptować się do jego kształtów. Na rys. 9.11. przedstawione zostało porównanie nowatorskiego rozwiązania w stosunku do konwencjonalnego.

Rys. 9.11. Schemat konwencjonalnego i adaptacyjnego mechanizmu chwytakowego.



Rys. 9.12. Obraz kilku mikrochwytaków otrzymany za pomocą mikroskopu skaningowego.



Źródło: National Academy of Science 2009, Leong T.

Rozwijane obecnie nanotechnologie umożliwiają konstruowanie mikrochwytaków. Na rys. 9.12 – pochodzącym „ze szkiełka” mikroskopu skaningowego – zostały przedstawione różnego rodzaju chwytaki w skali mikro. Ich całkowity rozmiar nie przekracza jednego milimetra, a praca opiera się na zjawiskach fizycznych takich jak: piezoelektryka, termoelektryka czy elektromagnetyka.

W tym momencie możnaby zadać sobie prozaiczne pytanie: Po co nam to wszystko? Odpowiedź na nie jest równie prosta. Można śmiało przytoczyć futurystyczny przykład z medycyny. Nowoczesne, inteligentne chwytaki reagujące na konkretne substancje chemiczne będą mogły przemieszczać się w ludzkim ciele w celu wyłapywania i późniejszej eliminacji drobnoustrojów chorobotwórczych.



## 10. Modelowanie układów mechatronicznych

### 10.1. Zadania modelowania w mechatronice

Trzeba sobie uświadomić, że symulacja (czy obliczenia) są metodą analizy istniejącego obiektu: istniejącego materialnie lub w postaci projektu. Oczywiście analiza z określoną dokładnością jest możliwa tylko wówczas, gdy istnieje dostatecznie dokładna informacja o tym obiekcie. Przykładowo, jeśli samochód przedstawimy jako klocek z 2 (czy nawet 4) sztywnymi kołami, to nie ma mowy o analizie układu tłumienia drgań tego samochodu. I podobnie: jeśli w łożysku pominiemy zjawisko tarcia, nie będzie możliwa analiza cieplna. Choć jest to oczywiste, jednak często nie jest zauważane przez autorów modeli. Zatem: obiekt modelowania musi być jak najlepiej znany.

Należy jednoznacznie określić, co jest celem analizy, tzn. jakie wielkości wyjściowe (zależne) chcemy znaleźć. Jeśli badamy stan ustalony, mogą to być liczby, np. największa wartość naprężenia lub rozkłady (np. naprężenie w funkcji współrzędnych przestrzennych). Jeśli analizuje się stany nieustalone, szuka się przebiegów w czasie (np. zmian temperatury w funkcji czasu, w określonym punkcie lub we wszystkich punktach – a więc rozkładów w czasie), albo funkcjonałów (np. całki odchylenia od punktu równowagi w czasie). Zatem: należy jednoznacznie określić zmienne wyjściowe.

Należy określić, jaki jest pożądaný zakres badań, tzn. w jakich przedziałach będą zmieniane wartości pobudzenia (zmienne wejściowe).

Należy określić, jakie jest przeznaczenie wyników analizy, z czego wynika potrzebna dokładność.

### 10.2. Kryteria podobieństwa i liczby znamienne

#### Modelowanie i liczby znamienne na podstawie równania Naviera-Stokesa

Podobieństwa hydrodynamicznego można użyć do:

1. Modelowania hydrodynamicznego,
2. Badania w tunelu hydrodynamicznym.

W przypadku modelowania hydrodynamicznego punktem wyjścia jest równanie Naviera-Stokesa. Rozpatrywać będziemy model liniowy, który zachodzi w osi x.

Równanie Naviera-Stokesa w zapisie wektorowym:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \bar{v} + \frac{\nu}{3} \text{grad} \text{div} \bar{v}, \quad (10.1)$$

gdzie:  $\bar{F}$  – wektor sił masowych,

$\rho$  – gęstość płynu,

$p$  – ciśnienie,

$\nu$  – współczynnik lepkości kinematycznej,

$v$  – prędkość płynu,

$t$  – współrzędna czasu.

W ortokartezjańskim układzie współrzędnych równanie Naviera-Stokesa ma postać:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= X_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 x} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial^2 y} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial^2 z} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right).\end{aligned}\quad (10.2)$$

Zagadnienie rozpatrujemy dla przepływu jednowymiarowego wzdłuż osi  $x$ , weźmiemy pod uwagę równanie 10.2.1:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial X} v_x = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 X}.\quad (10.3)$$

Przyjmujemy oznaczenie „l” zamiast „x”.

Oznaczając wskaźnikiem 1 parametry opisowe na podstawie (10.3), otrzymujemy:

$$X_1 - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial l_1} + \nu_1 \frac{\partial v_1}{\partial l_1} = \frac{\partial v_1}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial t_1},\quad (10.4)$$

Przyjmując wskaźnik 2 dla obiektu, mamy:

$$X_2 - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial l_2} + \nu_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial l_2^2} = \frac{\partial v_2}{\partial l_2} v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial t_2}.\quad (10.5)$$

gdzie:

$t$  – współrzędna czasowa

$$\begin{aligned}X_2 &= k_x X_1, \quad \rho_2 = k_\rho \rho_1, \quad l_2 = k_l l_1, \quad p_2 = k_p p_1, \\ t_2 &= k_t t_1, \quad \nu_2 = k_\nu \nu_1, \quad \nu_2 = k_\nu \nu_1.\end{aligned}\quad (10.6)$$

Podstawiając zależność (10.6) do równania (10.5), uzyskujemy:

$$k_x X_1 - \frac{1}{k_\rho \rho_1} \frac{k_p \partial p_1}{k_l \partial l_1} + k_\nu \nu_1 \frac{k_\nu \partial^2 v_1}{k_l^2 \partial l_1^2} = \frac{\partial v_1 k_\nu^2}{\partial l_1 k_l} v_1 + \frac{k_\nu \partial v_1}{k_t \partial t_1}.\quad (10.7)$$

Jeśli ma zachodzić podobieństwo hydrodynamiczne między modelem i obiektem, to równania (10.4) i (10.6), a zarazem (10.7) muszą być identyczne. Taka możliwość zajdzie tylko wtedy, gdy czynniki równania (10.7) będą sobie równe. Mamy:

$$k_x = \frac{1}{k_\rho} \frac{k_p}{k_l} = k_\nu \frac{k_\nu}{k_l^2} = \frac{k_\nu^2}{k_l} = \frac{k_\nu}{k_t} = \text{const}.\quad (10.8)$$

(a)                      (b)                      (c)                      (d)                      (e)

Analizując odpowiednie pary z równania (10.8), np. (c) z (d), czyli  $k_v \frac{k_v}{k_l^2} = \frac{k_v}{k_l} k_v$  otrzymamy:

$$k_v \frac{k_v}{k_l^2} = \frac{k_v}{k_l} k_v \rightarrow \frac{k_v}{k_l} = k_v \rightarrow \frac{k_v k_l}{k_v} = 1. \quad (10.9)$$

Uwzględniając w równaniu (10.9) odpowiednie wyrażenia z równania (10.5), otrzymamy:

$$\frac{l_1 v_1}{v_1} = \frac{l_2 v_2}{v_2} = \text{Re}. \quad (10.10)$$

W ten sposób otrzymaliśmy jedną z liczb kryterialnych, zwaną **liczbą Reynoldsa**, która ustala kryterium podobieństwa sił bezwładności i lepkości. Podobnie postępując z innymi parami równania (10.8), otrzymamy inne liczby kryterialne:

- **Liczba kryterialna Froude'a**, wykażemy, że jest ona ilorazem siły bezwładności do siły grawitacji. Liczba ta stanowi kryterium podobieństwa częściowego sił i zjawisk wynikających z grawitacji. Typowym zjawiskiem tego rodzaju jest tworzenie się fal na swobodnej powierzchni cieczy.

Porównując (a) z (d) z równania (10.8), otrzymamy:

$$k_x = \frac{k_v^2}{k_l} \rightarrow \frac{k_v^2}{k_x k_l} = 1. \quad (10.11)$$

Jeżeli jedynymi siłami objętościowymi są siły grawitacyjne ( $g$  – przyspieszenie ziemskie), to dla zachowania podobieństwa przepływów powinna być spełniona równość:

$$\frac{v_1^2}{l_1} = \frac{v_2^2}{l_2}. \quad (10.12)$$

Stąd mamy liczbę Froude'a:

$$Fr = \frac{v^2}{gl}, \quad (10.13)$$

gdzie:

$v$  – prędkość przepływu.

- **Liczba kryterialna Eulera**. Liczba ta opisuje podobieństwo sił bezwładności i ciśnienia.

Biorąc pod uwagę (b) i (d) z równania (10.8), otrzymamy:

$$\frac{k_p}{k_\rho k_l} = \frac{k_v^2}{k_l} \rightarrow \frac{k_p}{k_\rho k_v^2} = 1. \quad (10.14)$$

Uwzględniając odpowiednie zależności z (10.6), mamy:

$$\frac{p_1}{\rho_1 v_1^2} = \frac{p_2}{\rho_2 v_2^2}. \quad (10.15)$$

Stąd otrzymujemy wielkość bezwymiarową, zwaną liczbą kryterialną Eulera (10.16):

$$E_u = \frac{P}{\rho v^2}. \quad (10.16)$$

Liczba  $E_u$  wyraża stosunek sił ciśnieniowych do sił bezwładności w przepływach nieściśliwych. Równość (10.15) jest warunkiem podobieństwa sił ciśnieniowych występujących podczas przepływów cieczy.

- **Liczba kryterialna Webbera.** Liczbę tę stosuje się podczas badania napięcia powierzchniowego:

$$We = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}, \quad (10.17)$$

gdzie:  $L$  – wymiar charakterystyczny (np. średnica kropli),  
 $\sigma$  – napięcie powierzchniowe.

- **Liczba kryterialna Strouhala.** Liczba ta decyduje o zachowaniu podobieństwa przepływów niestacjonarnych pulsacyjnych. Dwa pulsacyjne przepływy niestacjonarne są podobne, jeśli charakteryzują się takimi samymi liczbami Reynoldsa i Strouhala.

Biorąc pod uwagę (d) i (e) z równania (10.8), otrzymamy:

$$\frac{k_v^2}{k_l} = \frac{k_v}{k_t} \rightarrow \frac{k_l}{k_v k_t} = 1. \quad (10.18)$$

Wynika stąd:

$$\frac{l_1}{v_1 t_1} = \frac{l_2}{v_2 t_2}. \quad (10.19)$$

Z wyrażenia (10.19) po uwzględnieniu (10.6) otrzymujemy wielkość bezwymiarową, w postaci liczby kryterialnej Strouhala. Mamy:

$$Str = \frac{l}{vt^*}, \quad (10.20)$$

gdzie:  $v$  – prędkość płynu,

$l$  – wymiar charakterystyczny,

$t^*$  – charakterystyczny czas dla danego zagadnienia; może to być pewna częstotliwość określająca zmienność ruchu płynu w czasie. Np. dla opływu ciała stałego wykonującego drgania (lub obroty) przyjmuje się  $f$  jako częstotliwość tych drgań.

- **Liczba kryterialna Womersley'a.** Liczbę tę stosuje się w modelowaniu układów krwionośnych – odpowiada za podobieństwo lepkości i taktu (częstości). Definiujemy ją jako:

$$Wo = \sqrt{Str \cdot Re}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$Wo = d \sqrt{\frac{f}{\nu}}, \quad (10.21)$$

gdzie:  $d$  – średnica,

$\nu$  – lepkość kinematyczna płynu,

$f$  – częstość.

- **Liczba kryterialna Macha.** Liczba ta dotyczy kryterium podobieństwa przepływów płynów ściśliwych (gazów).

Skorzystajmy jeszcze raz z poprzednio wyprowadzonej równości (10.14):

$$\frac{k_p}{k_\rho k_v^2} = 1, \quad (10.22)$$

która odnosi się do płynów ściśliwych. W płynach takich zmiana ciśnienia powoduje zmianę gęstości, przy czym w przepływach barotropowych zależność  $\rho(p)$  jest jednoznaczna. W gazie doskonałym zależność ta związana jest z lokalną prędkością dźwięku „a” za pomocą wzoru:

$$a^2 = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{ad}. \quad (10.23)$$

Ponieważ dla procesu adiabatycznego (jakim jest propagacja dźwięku w gazie) obowiązuje zależność  $p/\rho^\kappa = \text{const}$  ( $\kappa$  – wykładnik adiabaty), mamy:

$$a^2 = \kappa \frac{p}{\rho}. \quad (10.24)$$

Prędkość dźwięku jest więc miarą ściśliwości ośrodka, w którym dźwięk się rozchodzi. Równanie (10.24) dla dwóch przepływów:

$$a_1 = \kappa \frac{p_1}{\rho_1}, \quad (10.25)$$

oraz :

$$a_2^2 = \kappa \frac{p_2}{\rho_2} \quad \text{lub} \quad k_a^2 a_a^2 = \kappa \frac{k_p p_1}{k_\rho \rho_1}, \quad (10.26)$$

gdzie:

$k_a = a_2/a_1$  jest skalą prędkości dźwięku.

Dzieląc stronami (10.26) przez (10.25), otrzymujemy:

$$k_a^2 = \frac{k_p}{k_\rho}. \quad (10.27)$$

Podstawienie tej równości w równaniu (10.22) daje:

$$\frac{k_v^2}{k_a^2} = 1 \quad \text{lub} \quad \frac{k_v}{k_a} = 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{v_1}{a_1} = \frac{v_2}{a_2}. \quad (10.28)$$

Stosunek prędkości „v” do lokalnej prędkości dźwięku „a” (tzn. występującej w danym punkcie), czyli:

$$\frac{v}{a} = M, \quad (10.29)$$

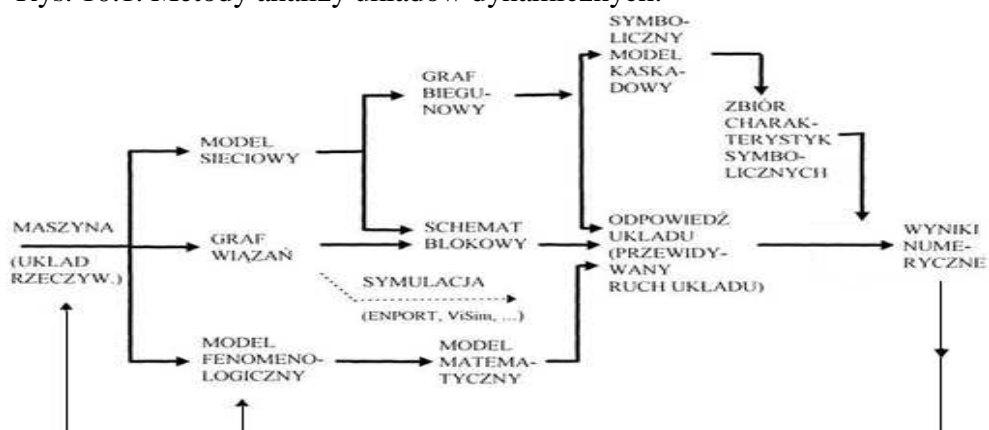
nazywamy kryterialną **liczbą Macha**.

Liczby kryterialne, zwane także znamionymi, odgrywają znaczącą rolę w prowadzeniu badań modelowych. Jednym ze sposobów badania obiektów przy zastosowaniu kryteriów podobieństwa jest stosowanie tuneli aerodynamicznych.

### 10.3. Analiza i synteza układu mechatronicznego

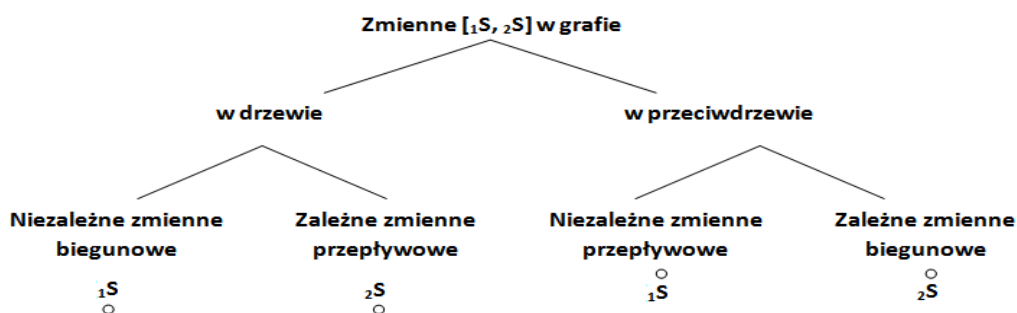
W formułowaniu modelu matematycznego układów dynamicznych stosowane są inne nieklasyczne metody analizy aż do uzyskania pożądanych wyników numerycznych. Na rys. 10.1 przedstawiono *ścieżki* od otwartego problemu, np. maszyny do zbiorów charakterystyk dynamicznych i wyników numerycznych. Szczególne znaczenie w konstruowaniu modeli matematycznych układów mechatronicznych mają grafy wiązań (bond grafy).

Rys. 10.1. Metody analizy układów dynamicznych.



Modelowanie za pomocą grafów wiązań nabiera w mechatronice szczególnego znaczenia m.in. dlatego, że grafy bazują na systematycznym podziale zmiennych na przepływowe i biegunowe, reprezentowane zarówno w drzewie grafu, jak również w przeciwdrzewie (rys. 10.2).

Rys. 10.2. Zmienne stanu w drzewie i przeciwdrzewie.



Związki pomiędzy zmiennymi biegunowymi i przepływowymi tworzą równania stanu, w formalizmie grafów zwane równaniami biegunowymi (rys. 10.3).

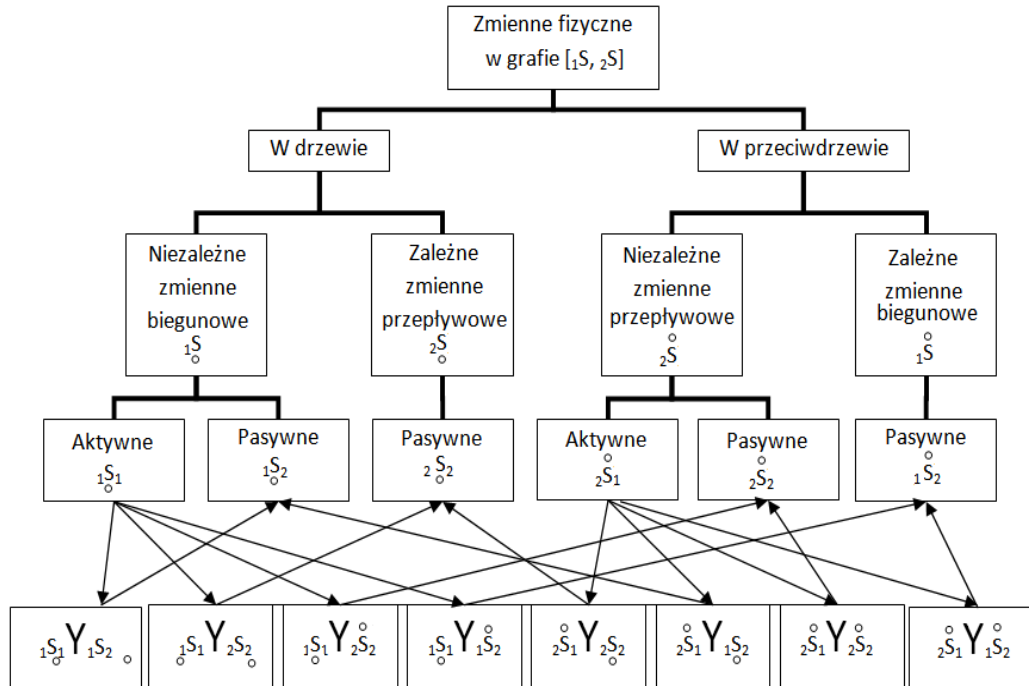
Rys. 10.3. Relacje pomiędzy zmiennymi biegunowymi i przepływowymi.



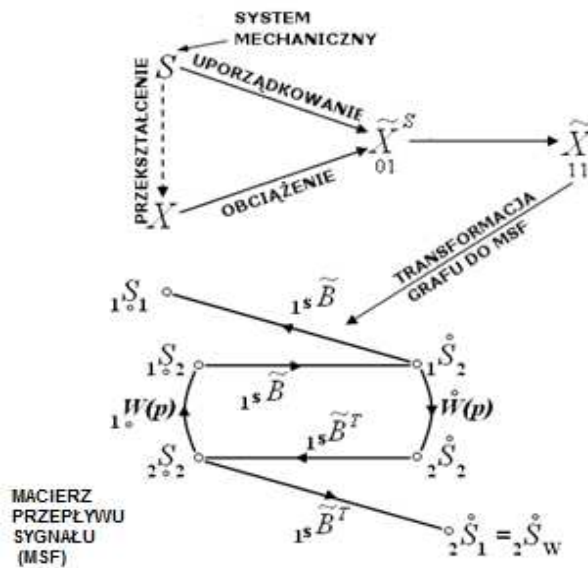
Bazując na podziale zmiennych fizycznych, które mogą wystąpić w drzewie grafu lub w jego przeciwdrzewie, można ustalić 8 charakterystyk modelowanego układu w formalizmie grafów. Na rys. 10.5 przedstawiono zbiór możliwych charakterystyk – transmitancji wynikających z przyporządkowania zmiennych fizycznych drzewu i przeciwdrzewu grafu.

Na rys. 10.6 przedstawiono formalizm przejścia od systemu mechanicznego do macierzowego grafu przepływu sygnałów.

Rys. 10.4. Zbiór możliwych transmitancji jako konsekwencja wyodrębnienia drzewa i przeciwdrzewia w grafie.



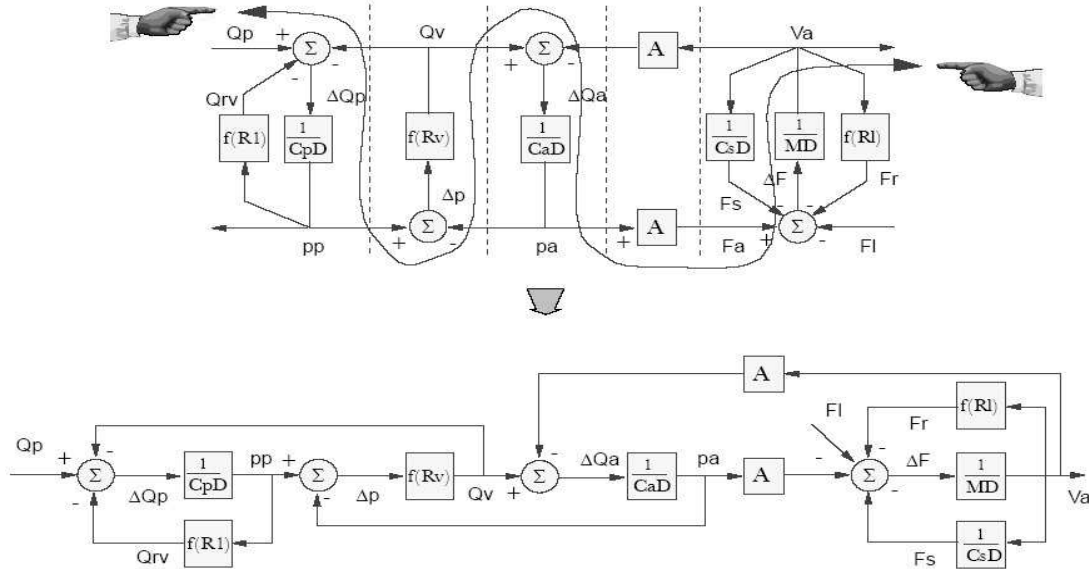
Rys. 10.5. Macierzowy graf przepływu sygnałów jako reprezentacja dynamicznej charakterystyki układu mechanicznego.



## 10.4. Schematy blokowe układu mechatycznego

Na rys. 10.6. przedstawiono sposób przekształcania grafu wiązań w postaci schematu blokowego

Rys. 10.6. Przekształcenie grafu wiązań w schemat blokowy.



## 10.5. Funkcja przejścia i charakterystyki dynamiczne

Funkcja przejścia, nazywana również transmitancją operatorową lub przepustowością, jest stosunkiem transformat wielkości wyjściowej (odpowiedzi) i wejściowej (wymuszenia) układu (lub członu) posiadającego własności dynamiczne.

Znajomość transmitancji pozwala na poznanie ogólnych własności układu, niezależnych od wymuszenia. Funkcji przejścia używa się również dla uproszczenia obliczeń związanych z projektowaniem układu złożonego z wielu członów. Wykorzystywana jest głównie w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów, elektronice i automatyce, a więc także w mechatronice.

W układach mechanicznych stosuje się dwojakię pojęcie sztywności dynamicznej:

$$V(p) = \frac{\text{wartość siły}}{\text{wartość prędkości}} = \frac{F}{V}, \quad (10.30)$$

$$Z(p) = \frac{\text{wartość siły}}{\text{wartość przemieszczenia}} = \frac{F}{s}. \quad (10.31)$$

gdzie:

operator  $p = i\omega$ ,  $i = \sqrt{-1}$  - jednostka urojona,  
 $\omega$  - częstość drgań wymuszonych.

Sztywność dynamiczną  $V(p)$  nazywamy ruchliwością dynamiczną.



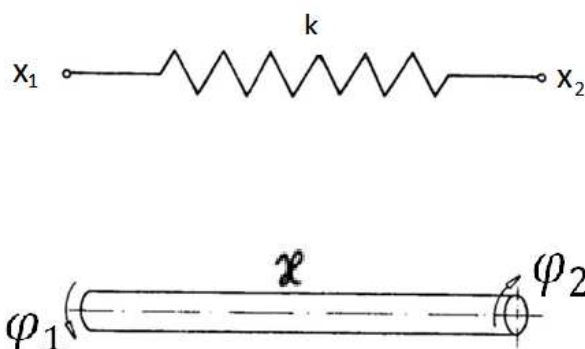
## 11. Modelowanie dyskretnych układów mechanicznych metodą grafów

### 11.1. Wprowadzenie teoretyczne

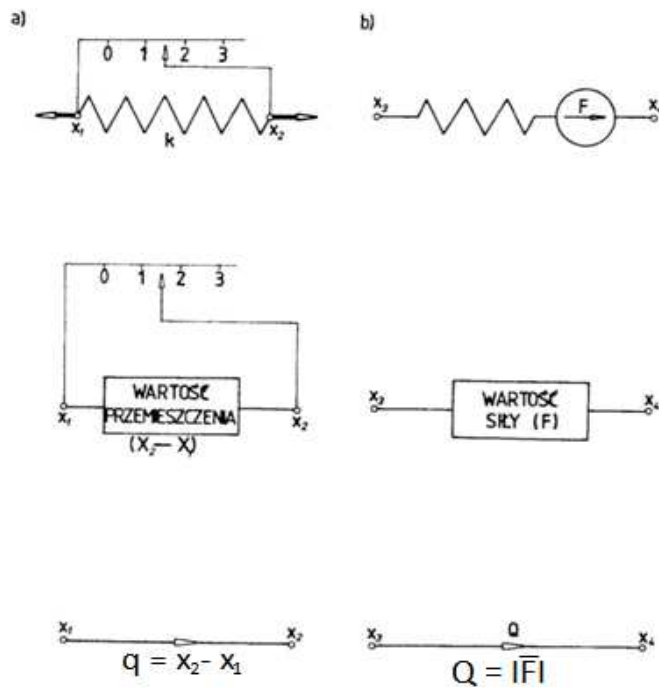
Badanie procesów dynamicznych w obiekcie wymaga ustalenia odpowiedniego modelu fizycznego i modelu matematycznego. Procedura taka jest równoznaczna z wyprowadzeniem odpowiednich równań opisujących badane zjawiska dynamiczne. Metoda grafów pozwala na opuszczanie tego etapu, umożliwiając prowadzenie analizy bezpośrednio drogą przekształceń grafu. Model topologiczny układu mechanicznego w postaci grafu można także wykorzystać wprost jako schemat modelujący na maszynie analogową.

Topologiczne przedstawienie w grafie podstawowych składowych oparte jest o jednowymiarowy sympleks zorientowany, czyli o odcinek z wagą  $T$  (dwójnik), łączący parę punktów zwanych wierzchołkami albo biegunami. Graf układu mechanicznego to zdeterminowana struktura sympleksów jednowymiarowych  $s_r$ , których bieguny  $x_r, y_r$  są reprezentowane przez punkty – grafy zerowe, pomiędzy którymi można dokonać pomiaru przyjętych zmiennych. Zmienne opisujące układy mechaniczne wyrażamy ilościowo przez pomiar, czyli przez porównanie z wielkością przyjętą za wzorzec. Każdy pomiar jest związany z istnieniem 2 punktów zwanych biegunami, które mogą być obiektami fizycznymi, np. końce sprężyny (rys. 11.1). Każdy pomiar determinują więc co najmniej 2 grafy zerowe, czyli wierzchołki  $x_r, y_r$ , i może być wyrażony dodatnią lub ujemną liczbą zależnie od sposobu włączenia przyrządu. Wszystkie możliwe pomiary i odpowiadające im zmienne dzielą się na 2 grupy. Zmienne, podczas pomiaru, których miernik włączony jest do biegunów równoległe, nazywamy zmiennymi biegunowymi lub równoległymi (intensywnymi) i oznaczamy przez  $q$  (rys. 11.2a). Do zmiennych biegunowych zaliczamy liniowe lub kątowe przemieszczenie oraz odpowiadające im prędkości i przyspieszenia. Zmienne, które wyznacza miernik włączony bezpośrednio do układu będziemy nazywać zmiennymi przepływowymi lub szeregowymi (ekstensywnymi) i oznaczać przez  $Q$ . Zalicza się do nich wartość siły  $\bar{F}$  lub moment obrotowy  $\bar{M}$  (rys. 11.2b.).

Rys. 11.1. Modele sprężyn działających na rozciąganie lub na skręcanie.

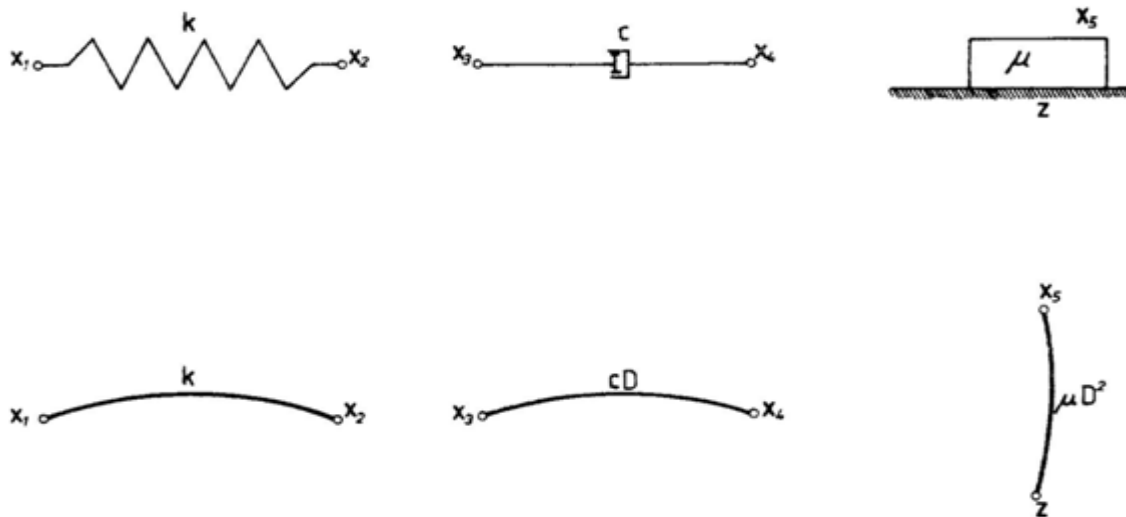


Rys. 11.2. Topologia pomiaru zmiennych opisowych.



Do typowych mechanicznych elementów dwubiegunowych należą: sprężyna tłumik oraz pary złożone ze środka masy poruszającego się ciała lub osi ciała w ruchu obrotowym i środka masy ziemi, który będziemy oznaczać przez  $z$ . Biegun  $z$  – jako generujący siły bezwładności – przyjmujemy za ogólny biegun dwójników (rys. 11.3).

Rys. 11.3. Mechaniczne elementy dwubiegunowe i ich dwójniki.



Na rys. 11.4 pokazano układ mechaniczny i jako graf biegunowy. Rysunek 11.4c przedstawia drzewo  $X$  szkielet, czyli graf spójny, bez cykli, a zawierający wszystkie wierzchołki grafu wyjściowego. Jeśli przez  $Q=Q_{n1}(Q_i, Q_d, Q_s)$  oznaczyć macierz jednokolumnową składowych przepływowych inercji, dysypacji i sprężystości, zaś przez  $q=q_{n1}$  macierz kolumnową składowych biegunowych, to związki fizyczne zwane równaniami biegunowymi przyjmą postać

$$Q = Bq, \quad (11.1)$$

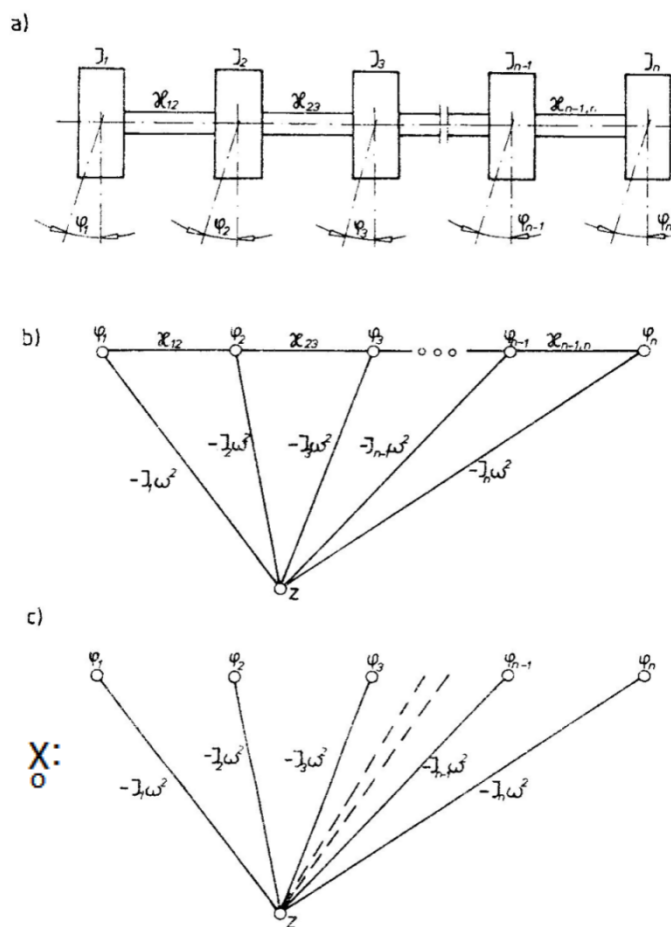
gdzie:

$$B = \|b_{ij}\| = \begin{vmatrix} \mu D^2 & 0 & 0 \\ 0 & cD & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}, \quad (11.2)$$

jest macierzą kwadratową współczynników równań biegunowych, gdzie  $\mu$  – miara inercji,  $c$  – współczynnik tłumienia,  $k$  – sztywność sprężyny,  $D = \frac{d}{dt}$ .

Wykorzystując własności zmiennych przepływowych i biegunowych, w oparciu o graf możemy opisać konfigurację układu mechanicznego. Stosujemy wówczas postulaty analogiczne do praw Kirchhoffa.

Rys. 11.4. Schemat układu mechanicznego (a), jego graf biegunowy (b) i drzewo grafu (c).



### I. Postulat wierzchołkowy

Algebraiczna suma zmiennych przepływowych (szeregowych) w każdym wierzchołku grafu układu jest równa 0.

Postulat wierzchołkowy przyjmuje zwięzłą postać macierzową

$$H \cdot Q = 0, \quad (11.3)$$

gdzie:  $H$  – macierz zbieżności (incydencji) grafu,

$Q = \|Qn1\|$  – macierz kolumnowa zmiennych przepływowych wraz z siłowym wymuszeniem.

Wyodrębniając z równania (11.3) liniowo niezależną część:

$$S \cdot Q = 0, \quad (11.4)$$

gdzie  $S$  – macierz odcięć grafu z elementami  $s_{ij}$  wyraża strukturę układu i nazywamy ją macierzą struktury układu.

Zero – jedynekowe elementy tej samej macierzy są:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } j\text{-ty łuk } i\text{-tego odcięcia posiada orientację względem tego odcięcia} \\ & \text{zgodną z gałęzią drzewa napinającego graf,} \\ -1, & \text{jeśli } j\text{-ty łuk } i\text{-tego odcięcia posiada orientację względem tego odcięcia} \\ & \text{przeciwnie do gałęzi drzewa napinającego graf,} \\ 0, & \text{jeśli } j\text{-ty łuk nie wchodzi w } i\text{-te odcięcie.} \end{cases}$$

## II. Postulat dla zamkniętych ścieżek grafu

Algebraiczna suma zmiennych biegunowych (równoległych), przyporządkowanym gałęziom w każdym wyodrębnionym konturze grafu, układu jest równa 0. Postulat ten w zapisie macierzowym przyjmuje postać:

$$C \cdot q = 0, \quad (11.5)$$

gdzie:

$C$  – macierz cyklomatyczna grafu z elementami  $c_{ij}$ ,

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } j\text{-ta gałąź jest zgodnie skierowana w } i\text{-tym konturze,} \\ -1, & \text{jeśli } j\text{-ta gałąź jest niegodnie skierowana w } i\text{-tym konturze,} \\ 0, & \text{jeśli } j\text{-ta gałąź nie wchodzi w } i\text{-ty kontur;} \end{cases}$$

$q = \|q_n 1\|$  – macierz kolumnowa zmiennych biegunowych wraz z kinematycznymi źródłami wymuszenia.

Wyodrębiając z grafu drzewo szkielet  $D_0$ , można wyodrębnić gałęzie  $\gamma$  i cięciwy  $v$  tworzące jego dopełnienie. W takim przypadku macierze odcięć i cyklomatyczną można zapisać w postaci:

$$S = \left\| \begin{array}{cc|cc} E & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & E & S_{21} & S_{22} \end{array} \right\|, \quad (11.6)$$

oraz

$$C = \left\| \begin{array}{cc|cc} C_{11} & C_{12} & E & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & E \end{array} \right\|, \quad (11.7)$$

gdzie:  $E$  – macierz jednostkowa,

$0$  – macierz zerowa.

Zauważmy, że analiza układów mechanicznych w oparciu o metodę grafów sprowadza się do spełnienia równań węzłowych dla zmiennych przepływowych oraz równań oczkowych dla zmiennych biegunowych. Równania te wyrażają odpowiednio zasadę d' Alemberta i równania węzłów nałożonych na układ.

Z założeń analizy układów mechanicznych interesujące jest wyznaczanie reakcji dowolnego członu na przyłożone siłowe  $Q_{v2}$  bądź kinematyczne wymuszenie  $q_{\gamma1}$ . Przyjmując za współrzędne uogólnione  $q_{\gamma2}$ , równanie różniczkowe można zapisać metodą gałęzi w oparciu o równanie (11.4).

Podstawiając do równania (11.4) zależność (11.6) oraz za  $Q = Q_{n1} = (Q_{\gamma1}, Q_{\gamma2}, Q_{v1}, Q_{v2})$ , otrzymujemy

$$\begin{vmatrix} E & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & E & S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_{\gamma 1} \\ Q_{\gamma 2} \\ Q_{v 1} \\ Q_{v 2} \end{vmatrix} = 0. \quad (11.8)$$

Analogicznie z równań (11.5) uzyskujemy:

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & E & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_{\gamma 1} \\ q_{\gamma 2} \\ q_{v 1} \\ q_{v 2} \end{vmatrix} = 0. \quad (11.9)$$

Uwzględniając zależności (11.8) równania biegunowe:

$$\begin{vmatrix} Q_{\gamma 2} \\ Q_{v 1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_{\gamma 2} \\ q_{v 1} \end{vmatrix} = B \begin{vmatrix} q_{\gamma 2} \\ q_{v 1} \end{vmatrix}, \quad (11.10)$$

możemy ją po przekształceniu zapisać w postaci:

$$\begin{vmatrix} E \\ 0 \end{vmatrix} Q_{\gamma 1} + \begin{vmatrix} 0 & S_{11} \\ E & S_{21} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_{\gamma 2} \\ q_{v 1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{12} \\ S_{22} \end{vmatrix} Q_{v 2} = 0. \quad (11.11)$$

Wyrażając natomiast zmienne:  $q_{\gamma 2}$  i  $q_{v 1}$  poprzez:  $q_{\gamma 1}$  i  $q_{\gamma 2}$

$$\begin{vmatrix} q_{\gamma 2} \\ q_{v 1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & E \\ S_{11} T & S_{21} T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_{\gamma 1} \\ q_{\gamma 2} \end{vmatrix}, \quad (11.12)$$

otrzymujemy równanie gałęzi w postaci:

$$\begin{vmatrix} E \\ 0 \end{vmatrix} Q_{\gamma 1} + \begin{vmatrix} 0 & S_{11} \\ E & S_{21} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & E \\ S_{11} T & S_{21} T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_{\gamma 1} \\ q_{\gamma 2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{12} \\ S_{22} \end{vmatrix} Q_{v 2} = 0. \quad (11.13)$$

Równanie (11.13) jest wyjściowym do napisania równań ruchu układu metodą gałęzi.

W celu lepszego poznania omawianej metody gałęzi oraz drogi prowadzącej do programu na maszynę cyfrową rozpatrzmy następujący przykład. Dla układu mechanicznego przedstawionego na rysunku (11.5a) napiszemy równania ruchu, wykorzystując metodę gałęzi.

#### Metodyka postępowania

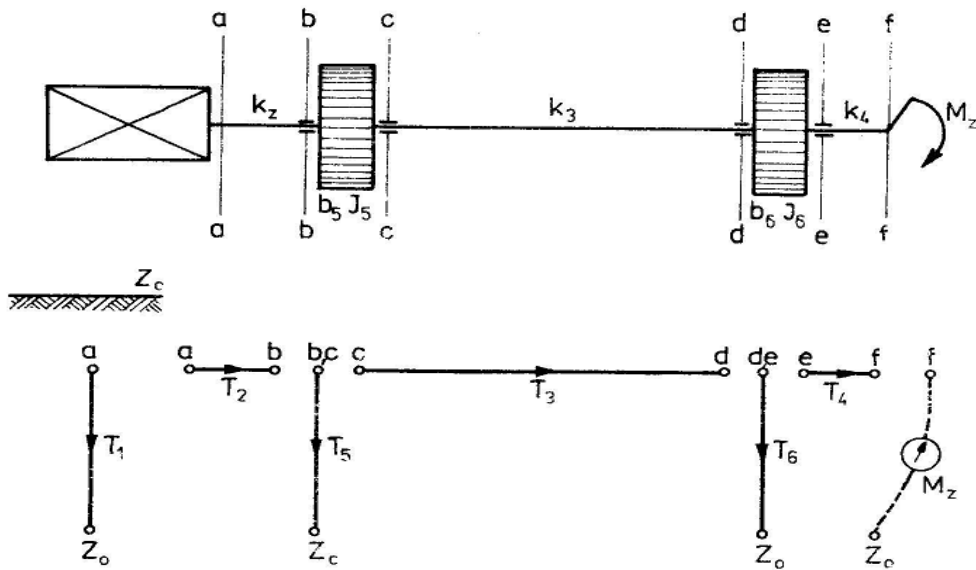
1<sup>0</sup> Rozbicie układu na elementy (rys. 11.5b) i napisanie równań biegunowych tych elementów.

2<sup>0</sup> Zbudowanie grafu układu (rys. 11.6a).

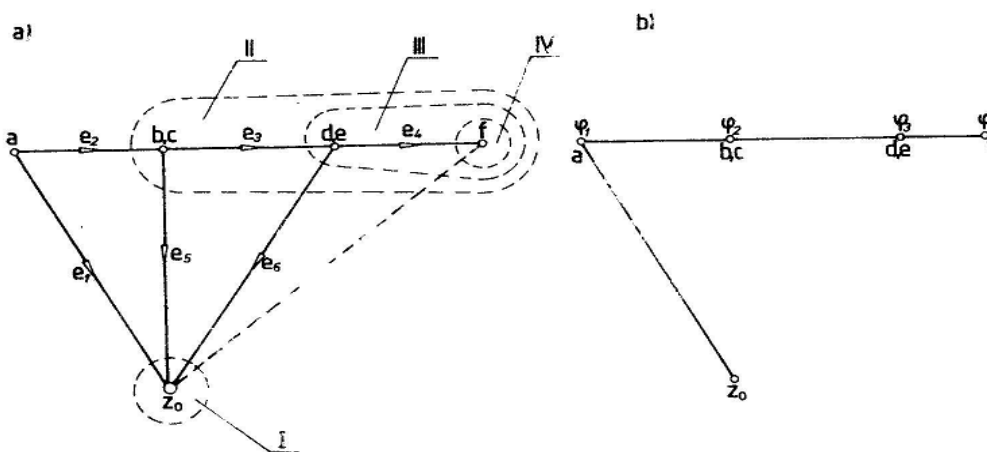
3<sup>0</sup> Wybór drzewa (rys. 11.6b) w ten sposób, że poszukiwane zmienne biegunowe  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  wchodzi w drzewo grafu.

4<sup>0</sup> Napisanie równań odcięć dla wybranego drzewa grafu. Liczba odcięć I, II, III i IV (rys. 11.6a) równa jest liczbie gałęzi drzewa.

Rys. 11.5. Układ mechaniczny i dwójniki przyporządkowane odpowiednim elementom.



Rys. 11.6. Graf biegunowy (a) i jedno z jego drzew (b).



5<sup>0</sup> Napisanie równań odcięć dla wybranego drzewa grafu.

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$M_1$	$Q_{\psi_1}$
I	1	0	0	0	1	1	1	$M_2$	$Q_{\psi_2} = 0$
II	0	1	0	0	-1	-1	-1	$M_2$	
III	0	0	1	0	0	-1	-1	$M_4$	
IV	0	0	0	1	0	0	-1	$M_5$	
	gałęzie				cięciwy			$M_6$	$Q_{\psi_1}$
								$M_7$	$Q_{\psi_2}$ (wymuszenie)

6<sup>o</sup> Napisanie równania odcień (11.8) oraz równania biegunowego układu (11.10)  
Równania odcień

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} M_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_E \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot M_7 = 0,$$

Równania biegunowe

$$\begin{matrix} q\gamma_2 \\ \\ \\ \\ q\gamma_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 \frac{d}{dt} + J_5 \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 \frac{d}{dt} + J_6 \frac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} \begin{matrix} q\gamma_2 \\ \\ \\ \\ q\gamma_1 \end{matrix}$$

7<sup>o</sup> Podstawienie równań biegunowych do równań odcień oraz wykorzystanie (11.7) prowadzi do równania gałęzi:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} M_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E'} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \kappa_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix}}_F \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{E''} + \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} M_7 = 0.$$

Po wykonaniu mnożenia macierzy uzyskamy równania ruchu układu w postaci:

$$\begin{pmatrix} M_1(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_5 + a_6 & -a_6 & -a_5 & -a_6 & 0 \\ -a_5 - a_6 & \kappa_2 + a_5 + a_6 & a_6 & 0 & 0 \\ -a_6 & a_6 & \kappa_3 + a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot M_7 = 0.$$

gdzie:

$$a_5 = b_5 \frac{d}{dt} + I_5 \frac{d^2}{dt^2},$$

$$a_6 = b_6 \frac{d}{dt} + I_6 \frac{d^2}{dt^2}.$$

Macierz E wprowadzamy do maszyny cyfrowej w postaci przedstawionej w przykładzie, a w macierzy F w miejsce współczynników równań biegunowych wprowadzamy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} a_2 = 2, & \quad a_3 = 3, & \quad a_4 = 4, \\ a_5 = 5, & \quad a_6 = 6. \end{aligned}$$

Program wyznaczający równania ruchu nazwano „Równania ruchu”.

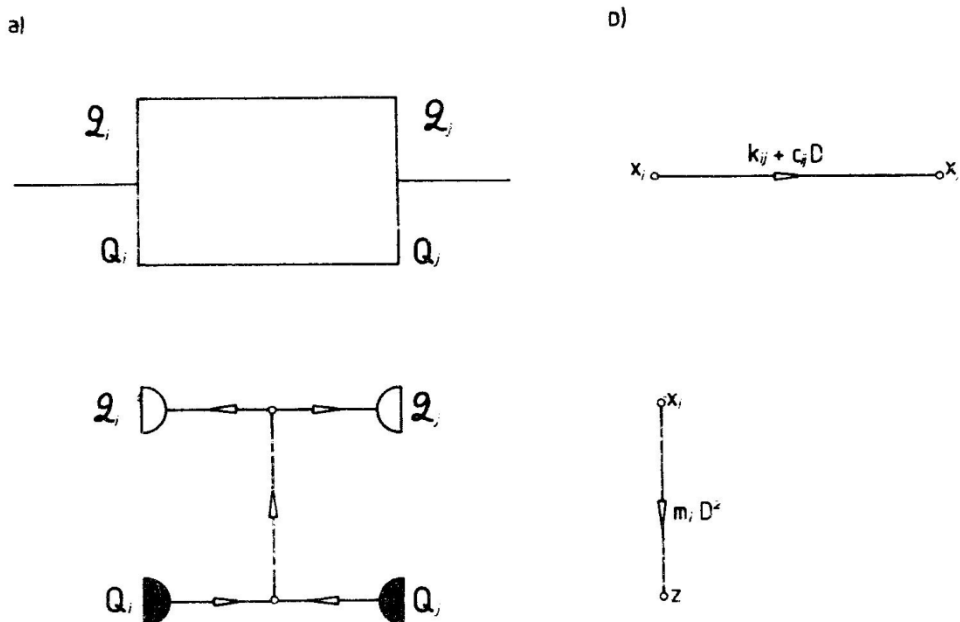
## 11.2. Motywacja techniczna – zastosowania

Badanie dyskretnych układów mechanicznych zajmuje w technice poczesne miejsce. Inżynier przedstawia te układy w postaci schematów, które są modelami obiektów fizycznych. Jednym z bardzo wygodnych sposobów jest metoda grafów, która umożliwia algorytmizację obliczeń w zakresie zarówno układania równań różniczkowych ruchu, jak też prowadzenia analizy częstotliwościowej układów fizycznych. W tym ostatnim przypadku można ominąć uciążliwy etap układania równań różniczkowych, co znacznie skraca proces prowadzenia analizy.

## 11.3. Graf jako schemat analogowy na elektroniczne maszyny analogowe (EMA)

Graf – jako model układu – opisuje zarówno jego strukturę, jak również związki między zmiennymi biegunowymi i przepływowymi. Stanowi więc reprezentację równań różniczkowych ruchu układu, w sensie teorii grafów analizujemy model układu, który może być albo strukturą czwórników (rys. 11.7a), albo grafów biegunowych, czyli tzw. dwójników (rys. 11.7b).

Rys. 11.7. Schematy czwórników (a) i grafów biegunowych (b).



Zauważmy, że zgodnie z równaniami (11.1) w dowolnej chwili czasowej iloraz zmiennej przepływowej i biegunowej jest stały, a wyraża transmitancję mechaniczną sympleksu gałęzi grafu.

Transmitancja ta w układzie zmiennych: siła uogólniona  $Q$  i przemieszczenie uogólnione  $q$ , wynosi odpowiednio:



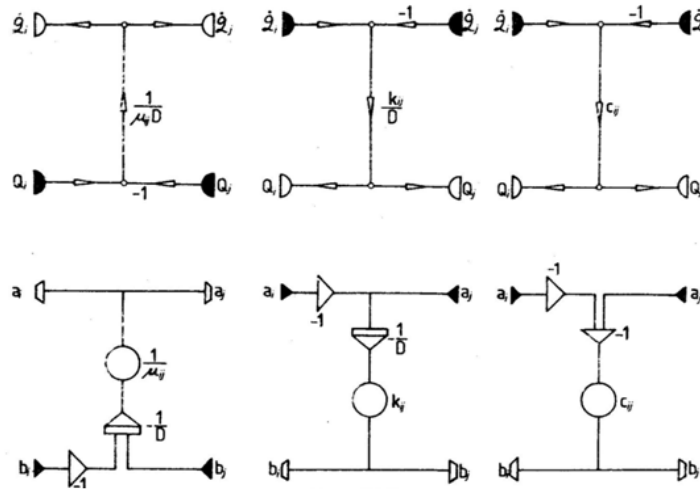
- dla masy o inercji  $\mu: (j\omega)^2$ ,
- dla sprężyny o sztywności  $k: k$ ,
- dla tłumika wiskotycznego o współczynniku tłumienia  $c: j\omega c$ .

Odwrotność transmitancji krawędzi nazywamy impedancją mechaniczną. Na rys. 11.8 pokazano tylko 1 z możliwych grafów czwórników dla masy, sprężyny i tłumika. Droga inwersji ścieżek można uzyskać inne kombinacje czwórników. Na rysunku tym węzły-źródła zaciemniono w przeciwieństwie do węzłów-upustów.

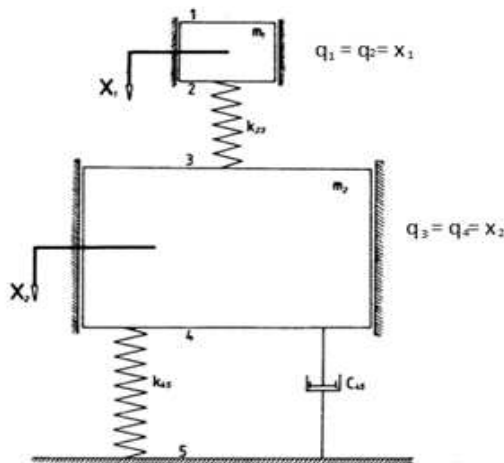
Na przykładzie układu drgającego (rys. 11.9) pokazano sposób praktyczny konstruowania grafów przepływu sygnału (rys. 11.10a) i na jego podstawie modelu analogowego (rys. 11.10b).

Na rys. 11.11 pokazano graf biegunowy tego układu i drzewo napinające graf. Tworząc graf, jako strukturę połączonych dwójników, zakodowanych elementów  $b_{ij}$  macierzy równań biegunowych, można wyznaczyć równanie charakterystyczne.

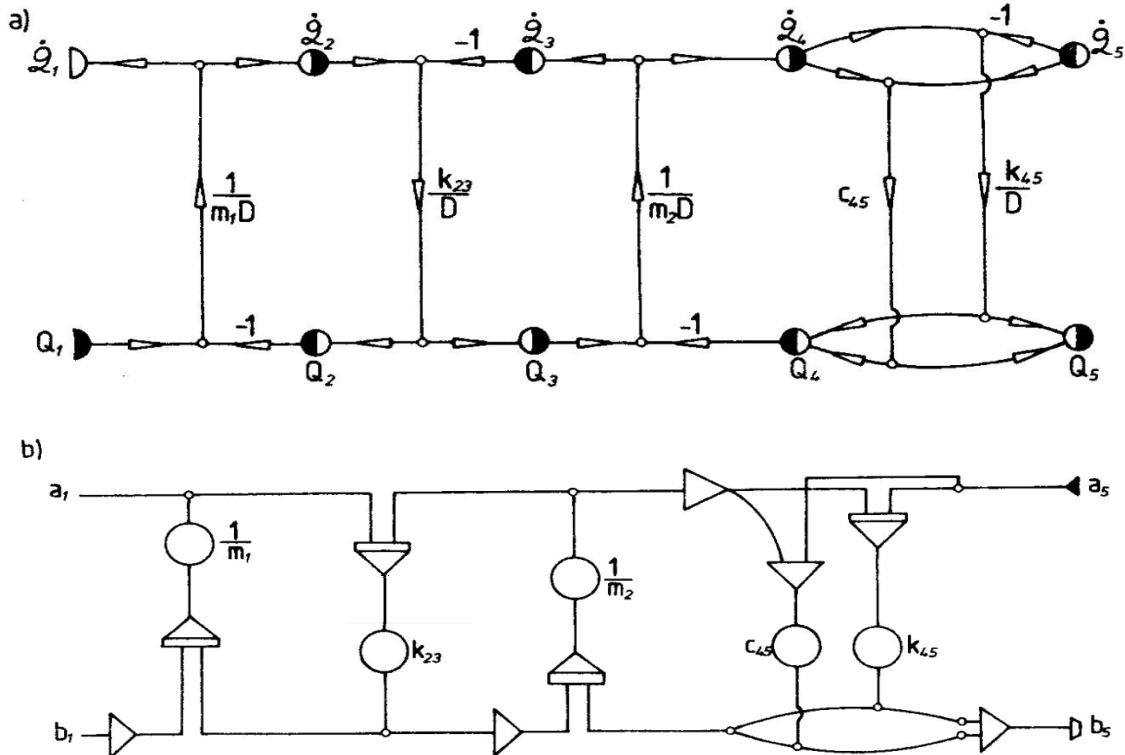
Rys. 11.8. Grafy czwórników odpowiednio dla masy, sprężyny i tłumika.



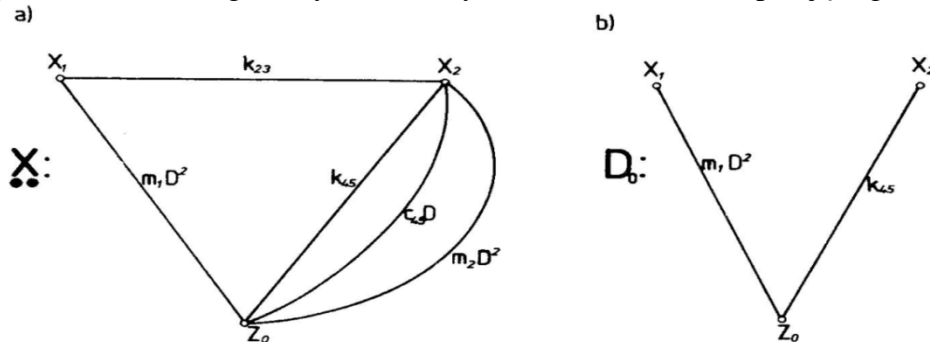
Rys. 11.9. Model układu drgającego o 2 stopniach swobody.



Rys. 11.10. Graf przepływu sygnału modelu układu z rys. 11.9.



Rys. 11.11. Graf biegunowy układu z rys. 11.9 (a) i drzewo napinające graf (b).



#### 11.4. Wykorzystanie grafu biegunowego do wyznaczania równania charakterystycznego układu

Znane metody wyznaczania równań charakterystycznych, względnie częstości, związane są z ustaleniem różniczkowych równań ruchu.

Zastosowanie metody grafów nie wymaga spełnienia tego warunku; mało tego – właściwy wybór kolejności redukcji zabezpiecza automatycznie uzyskanie równania częstości według kolejności potęg. Metoda topologiczna wyznaczania równania charakterystycznego oparta jest na zasadzie Maxwella.

**ZASADA MAXWELLA.** Wyznacznik grafu  $\Delta G$  jest równoważny wyznacznikowi charakterystycznemu układu równań różniczkowych reprezentowanych przez graf.

$$\Delta(s^2) = \Delta G = 0. \quad (11.14)$$

Dla otrzymania równania charakterystycznego wystarczy wyznaczyć wyznacznik zdegenerowanego grafu układu, który jest równy sumie wielkości wszystkich  $t$  możliwych drzew grafu:

$$\Delta G = \sum_{k=1}^t T_k, \quad (11.15)$$

gdzie:

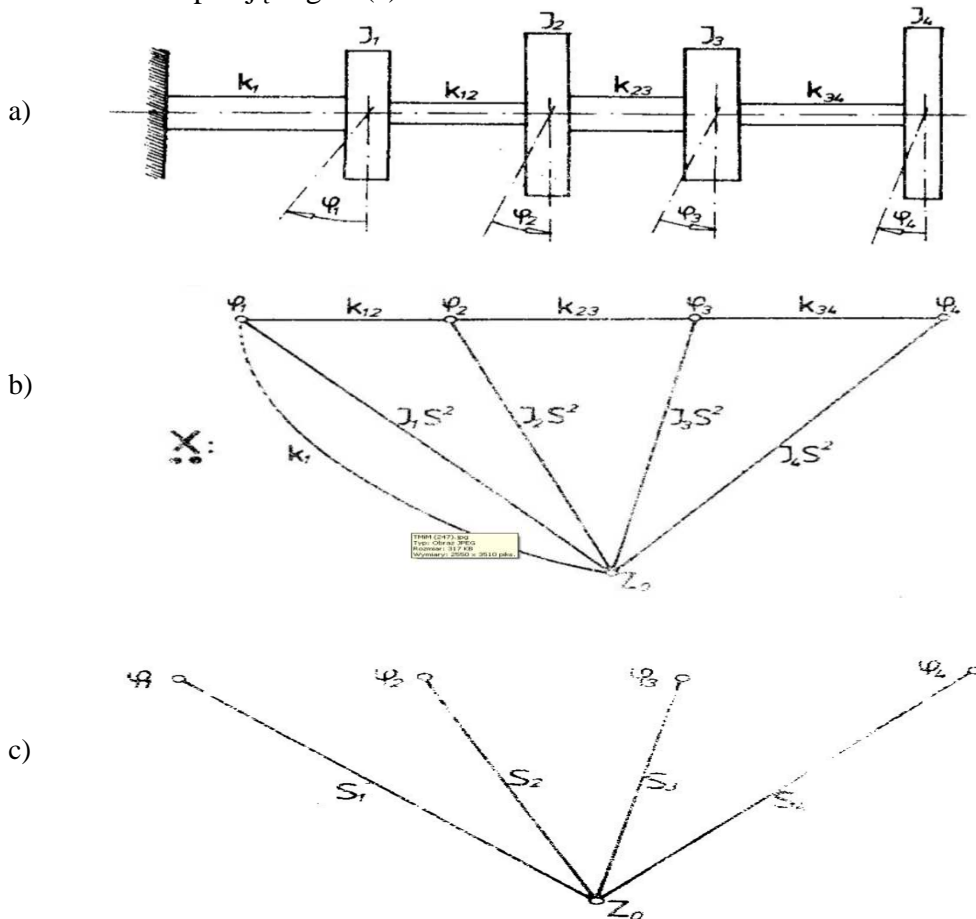
$$T_k = \prod_{j=1}^m T_{kj}, \quad (11.16)$$

$T_k$  – jest wielkością drzewa grafu,  $m^T$  jest liczbą krawędzi k-tego drzewa,  $T_{ki}$  – transmitancja i-tej gałęzi k-tego drzewa.

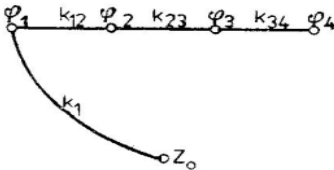
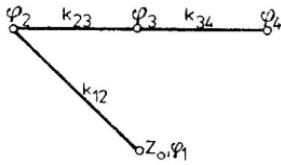
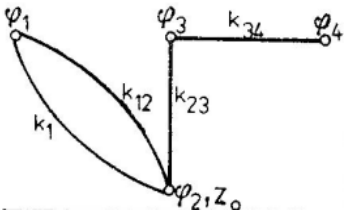
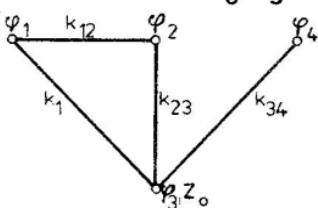
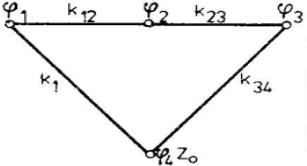
Równanie (11.16) jest iloczynem ilorazów zmiennych biegunowych i przepływowych, czyli iloczynem transmitancji gałęzi drzewa. Wielkość  $T_k$  jest więc niezmiennikiem drzewa, skąd wynika, że  $\Delta G$  jest niezmiennikiem analizowanego układu. Algorytm redukcji grafu przy wykorzystaniu rozwinięcia według drzewa napinającego graf  $D_0$  prowadzi do równania charakterystycznego o postaci (11.17):

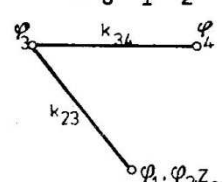
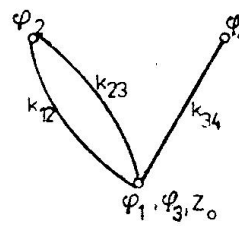
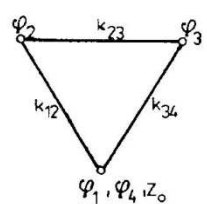
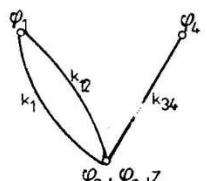
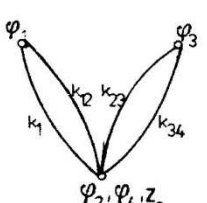
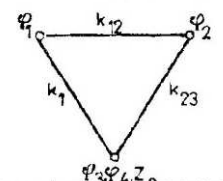
$$\Delta(s^2) = \Delta G(D_0) + \sum_{k \leq i} T_{ki} \Delta G(D_0, s_i) + \sum_{k \leq i < j} T_{ki} T_{kj} \Delta G(D_0, s_i, s_j) + \dots + \prod_{k \leq i} T_{ki}, \quad (11.17)$$

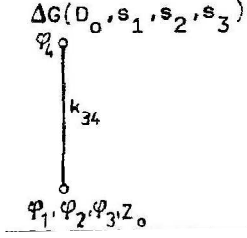
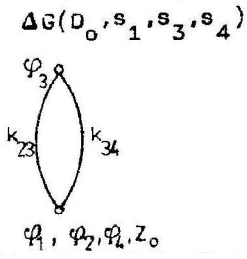
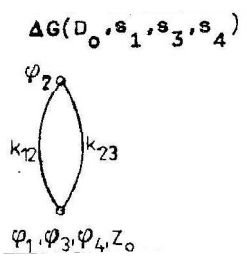
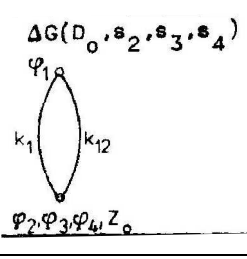
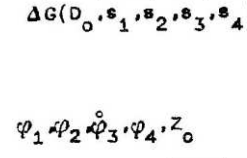
Rys. 11.12. Model układu mechanicznego drgającego skrętnie (a), graf biegunowy układu (b) oraz drzewo napinające graf (c).



Tabl. 11.1. Zbiór podgrafów grafu biegunowego i ich wyznaczniki  $\Delta G_i$ .

Iloczyn impedancji gałęzi drzewa $D_0, Z_{ki}$	Numery koincydentnych wierzchołków $\varphi_i, Z_0$	Podgraf po usunięciu drzewa $D_0$ i zwarciu wierzchołków gałęzi drzewa $s_i, s_j$ $G_i(D_0, s_1, \dots, s_r)$	Wyznacznik podgrafu $\Delta G_i(D_0, s_1, \dots, s_r)$
1	2	3	4
		<p style="text-align: center;"><math>\Delta G(D_0)</math></p> 	$k_1 k_{12} k_{23} k_{34}$
$I_1 s^2$	$\varphi_1, Z_0$	<p style="text-align: center;"><math>\Delta G(D_0, s_1)</math></p> 	$k_{12} k_{23} k_{34}$
$I_2 s^2$	$\varphi_2, Z_0$	<p style="text-align: center;"><math>\Delta G(D_0, s_2)</math></p> 	$(k_1 + k_{12}) k_{23} k_{34}$
$I_3 s^2$	$\varphi_3, Z_0$	<p style="text-align: center;"><math>\Delta G(D_0, s_3)</math></p> 	$(k_1 k_{12} + k_{12} k_{23} + k_{23}) k_1 k_{34}$
$I_4 s^2$	$\varphi_4, Z_0$	<p style="text-align: center;"><math>\Delta G(D_0, s_4)</math></p> 	$k_1 k_{12} k_{23} + k_{12} k_{23} k_{34} + k_{34} k_1$

1	2	3	4
$I_1 I_2 S^4$	$\varphi_1, \varphi_2, Z_0$	$\Delta G(D_0, s_1, s_2)$ 	$k_{23}k_{34}$
$I_1 I_3 S^4$	$\varphi_1, \varphi_3, Z_0$	$\Delta G(D_0, s_1, s_3)$ 	$(k_{12}+k_{23})k_{34}$
$I_1 I_4 S^4$	$\varphi_1, \varphi_4, Z_0$	$\Delta G(D_0, s_1, s_4)$ 	$k_{12}k_{23}+k_{23}k_{34}+k_{34}k_{12}$
$I_2 I_3 S^4$	$\varphi_2, \varphi_3, Z_0$	$\Delta G(D_0, s_2, s_3)$ 	$(k_1 k_{12})k_{34}$
$I_2 I_4 S^4$	$\varphi_2, \varphi_4, Z_0$	$\Delta G(D_0, s_2, s_4)$ 	$(k_1+k_{12})(k_{23}+k_{34})$
1	2	3	4
$I_3 I_4 S^4$	$\varphi_3, \varphi_4, Z_0$	$\Delta G(D_0, s_3, s_4)$ 	$k_1 k_{12}+k_{12}k_{23}+k_{23}k_1$

$I_1 I_2 I_3 S^6$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, Z_0$	$\Delta G(D_0, s_1, s_2, s_3)$ 	$k_{34}$
$I_1 I_2 I_4 S^6$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, Z_0$	$\Delta G(D_0, s_1, s_3, s_4)$ 	$k_{23} + k_{34}$
$I_1 I_3 I_4 S^6$	$\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4, Z_0$	$\Delta G(D_0, s_1, s_3, s_4)$ 	$k_{12} + k_{23}$
$I_2 I_3 I_4 S^6$	$\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, Z_0$	$\Delta G(D_0, s_2, s_3, s_4)$ 	$k_1 + k_{12}$
$I_1 I_2 I_3 I_4 S^8$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, Z_0$	$\Delta G(D_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$ 	1

W równaniu 11.17 zastosowano oznaczenia:

$\Delta G(D_0)$  – wyznacznik podgrafu z usuniętym drzewem,

$D_0, T_{ki}, T_{kj}, \dots, T_{kr}$  – transmitancje gałęzi  $s_i, s_j, \dots$  drzewa  $D_0$ ,

$r = (n-1)$  – liczba wierzchołków bez ogólnego bieguna  $Z_0$ ,

$\Delta G(D_0 s_i)$  – wyznacznik podgrafu z usuniętym drzewem  $D_0$  i krawędzią  $s_i$  po koincydencji wierzchołka, który tą krawędź łączyła z biegunem  $Z_0$ ,

$\Delta G(D_0 s_i s_j)$  – wyznacznik podgrafu z usuniętym drzewem  $D_0$  i krawędziami  $s_i, s_j$  po koincydencji wierzchołków, które te krawędzie łączyły z biegunem  $Z_0$  itd.,

$\Delta G(D_0, s_i, \dots, s_r) = 1$  wyznacznik podgrafu zredukowanego do punktu.

Jako przykład ilustrujący tę metodę rozważymy drgający układ mechaniczny o 4 stopniach swobody (rys. 11.12).

W tabl. 11.1 przedstawiony jest algorytm redukcji grafu zgodnie z równaniem (11.17).

Na podstawie tabl. 11.1 napisano program „RÓWNANIE CHARAKTERYSTYCZNE”, wyznaczający współczynniki równania charakterystycznego będącego w tym przypadku wprost równaniem częstości. Warto zauważyć, że przedstawiony algorytm (równanie 11.17 i tabl. 11.1) pozwala uzyskać równania charakterystyczne wprost według rosnących potęg częstości.

## 11.5. Objasnienia do programów

### 11.5.1. Program „RÓWNANIA RUCHU”

Jako dane wprowadzamy:  $m$  – ilość wierszy,  $l$  – ilość kolumn macierzy  $A$  (macierz  $A$  z programu odpowiada macierzy  $E'$  z przykładu), wszystkie wyrazy macierzy  $E'$  oraz wyrazy leżące na głównej przekątnej macierzy  $F$  (w programie macierz tę oznaczono  $B$ ). Jako wyniki uzyskujemy poszczególne wyrazy macierzy powstałej przez wymnożenie macierzy  $E'FE'^T$ .

```
begin
  integer i,j,k,l,m,p,R,N;
  setinput(1);
  read(n,1);
  begin
    array a[1: m, 1:1] , B [1 :1,1 :1] , c[1:m:l:1];
    read(A);
    for k:= lstep l until 1 do
      for j: =lstep 1 until 1 do
        begin
          B[k,j] :=0;
          if k=j then read(B[k,k]);
        end;
    for i = 1 step 1 until m do
      for j step 1 until 1 do
        begin
          R :=0 ;
          for k:=1 step 1 until 1 do
            R :=R+A [i, k]» B [k , j];
            C[i, j] :=R;
          end;
        end;
    setoutput(1);
    format('-11' );
    for i:=1 step 1 until m do
      for p:=1 step 1 until m do
        begin line(1 );
          for j:=1 step 1 until 1 do
            begin
              N: = C[i, j]* A[p, j];
              print(N ) :end;
            end;end;end;
```

### 11.5.2. Program „RÓWNANIE CHARAKTERYSTYCZNE”

Jako dane wprowadzamy liczbowe wartości miar inercji kolejno  $J_1, J_2, J_3, J_4$  i sztywności odpowiednio  $k_1, k_{12}, k_{23}, k_{34}, k_4$ . W programie oznaczono te wielkości literą  $c$  z odpowiednikami indeksów przy sztywnościach.

Na wyjściu otrzymujemy wyrazy przy poszczególnych potęgach częstości od najwyższej do najniższej.

```

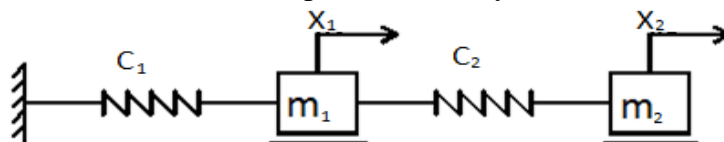
begin
integer i;
real J1,J2,J3,J4,c1,c12,c23,c34,c4;
array a [0 :4];
  setinput(1);
read(J1,J2,J3,J4,c1, c12 .c23,c34,c4 );
a [0] := J1*J2*J3*J4}
a [1] :=J1-J2xJ3* (c34+c4)+J1*J3*J4*(c12+c23)+J2*J3*J4*(c1 + c12 )+
  J1*J2*J4*(c23+c34);
  a[2] :=J1*J2*(c23* c34+c34*c4+c4* c23)+J1-J3 *(c12+c23 )*(c34+c4)+
J1*J4*(c12 *c23+c23* c34+c34*c12 ) +J2*J3 *(c1+c12 ) * (C34+C4 ) +
J2*J4*(c1- k12)*(c23+c34)+J3*J4 *( c1* c12+c12*c23+23* c1 );
  a[3] :=J1x(c23*c34*c4+c34x c4 *c12+c4*c12*c23+c12*c23*c34 )+J2 *(c1+c12)
(c23* c34+c34*c4+c4* c23 )*J3*( c1 *c12+c12*c23+c23x c1)* (c34+c4 )+
  J4*(c1*c12*c23+c12*c23*c34+c23*c34*c1+c34*c1*c12 );
a [4] :=c1* c12*c23* c34*c12*c23* c34* c4+c23*c34*c4*c1+c34*c4*c1* c12
+c4* c1* c12* c23;
  satoutput(1 );
format (' ?a [1] = 1.111u11110-- 123' );
for i=Qstep 1 until 4 do
print (i , a [i] );
end;

```

### 11.6. Zastosowanie grafów, modelowanie układów mechanicznych

Firestone, analizując topologię pomiarów, dokonał podziału zmiennych opisujących układ na zmienne przepływowe i biegunowe. W układach mechanicznych do zmiennych przepływowych zaliczamy: wartość siły  $F$  i moment  $M$  (through variables), zaś do biegunowych: przemieszczenie  $x$ , wartość prędkości  $v$  i wartość przyspieszenia  $a$  (across variables).

Rys. 11.13. Model układu o 2 stopniach swobody.

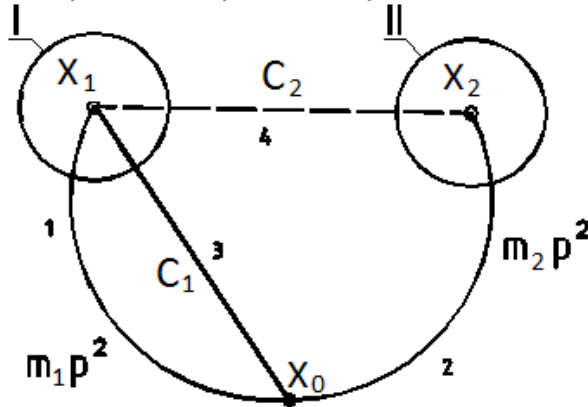


Przenosimy relacje z modelu fenomenologicznego (rys. 11.13) na graf (rys. 11.14).

A. Einstein w 1905 roku wykazał, że istnieje równość między masą grawitacyjną i bezwładną, a jeśli tak, to pole grawitacyjne indukuje siły bezwładności, co oznacza, że relacje dla sił bezwładności zawsze zachodzą z biegunem odniesienia ( $X_1 X_0, \sim m_1 p^2, X_2 X_0 \sim m_2 p^2$ ).



Rys. 11.14. Graf biegunowy układu z rys. 11.13; symbole I, II oznaczają odcięcia grafu.



Na podstawie tego grafu możemy szybko znaleźć częstotliwości drgań własnych, stosując poniższe zależności:

$$p = \frac{d}{dt}, p^2 = \frac{d^2}{dt^2}, p = i\omega, i = \sqrt{-1}, p^2 = i^2\omega^2 = -\omega^2 \quad (11.18)$$

Dla wyznaczenia częstotliwości drgań własnych skorzystamy pomocniczo z abstrakcyjnej algebry. Metodą odcięć wprowadzamy opis tego grafu, a wcześniej oznaczamy jego krawędzie liczbami. Liczba strukturalna  $A$  jest iloczynem liczb strukturalnych prostych  $A_1 A_2$  przyporządkowanym odcięciom I, II. Mamy:

$$A_1 = [1;3;4] \quad (11.19)$$

$$A_2 = [2;4] \quad (11.20)$$

$$A = A_1 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (11.21)$$

$$\text{Det } \alpha_{ij} \equiv \sum \prod \alpha_{ij} \quad (11.22)$$

$$\text{Det } A = 1 \otimes 2 \oplus 1 \otimes 4 \oplus 3 \otimes 2 \oplus 3 \otimes 4 \oplus 4 \otimes 2 \quad (11.23)$$

$$\text{Det } A = m_1 m_2 p^4 + m_1 p^2 C_2 + m_2 p^2 C_1 + C_1 C_2 + m_2 p^2 C_2 = 0 \quad (11.24)$$

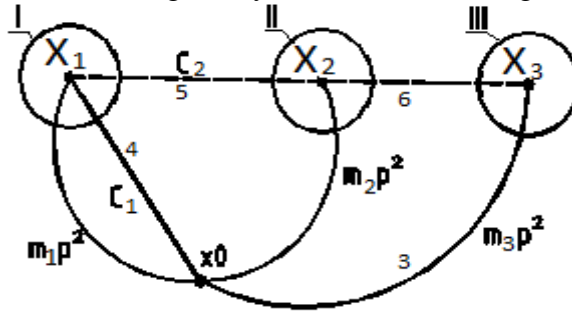
$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 C_2 + m_2 C_1 + m_2 C_2) \omega^2 + C_1 C_2 = 0 \quad (11.25)$$

Żeby przejść do układu fizycznego, trzeba znów przyporządkować wagi krawędzi. Liczba strukturalna reprezentuje zbiór drzew grafu. Drzewo grafu zawiera wszystkie wierzchołki (ale nie cykle oraz pętle).

### PRZYKŁAD

Układ jak wyżej rozszerzono o dodatkowy podukład: sprężynę  $c_3$  i masę  $m_3$ . Graf dla takiego układu ma postać:

Rys. 11.15. Graf biegunowy układu rozszerzonego.



Liczby strukturalne proste przyporządkowane odcięciom I, II, III wynoszą:

$$A_1 = [1; 4; 5], \quad (11.26)$$

$$A_2 = [5; 2; 6], \quad (11.27)$$

$$A_3 = [6; 3]. \quad (11.28)$$

Liczba strukturalna to teoriiomnogościowy iloczyn liczb strukturalnych prostych. Mamy:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & 6 & 6 & 5 & 5 & 2 & 2 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}. \quad (11.29)$$

Funkcja wyznacznikowa :

$$Det \alpha_{ijk} \equiv \sum \Pi \alpha_{ijk},$$

$$Det A = 1 \otimes 5 \otimes 6 + 1 \otimes 5 \otimes 3 + 1 \otimes 2 \otimes 6 + 1 \otimes 2 \otimes 3 + 1 \otimes 6 \otimes 6 + 1 \otimes 6 \otimes 3 + 4 \otimes 5 \otimes 6 + 4 \otimes 5 \otimes 3 + 4 \otimes 2 \otimes 6 + 4 \otimes 2 \otimes 3 + 4 \otimes 6 \otimes 6 + 4 \otimes 6 \otimes 3 + 5 \otimes 5 \otimes 6 + 5 \otimes 5 \otimes 3 + 5 \otimes 2 \otimes 6 + 5 \otimes 2 \otimes 3 + 5 \otimes 6 \otimes 6 + 5 \otimes 6 \otimes 3 \quad (11.30)$$

gdzie:  $\otimes$  jest znakiem mnożenia symbolicznego.

Usuwać z równania 11.30 składniki, w których powtarzają się takie same liczby i przyporządkowując liczbom odpowiednie wagi krawędzi grafu, uzyskujemy równanie:

$$m_1 p^2 \cdot c_2 c_3 + m_1 p^2 m_3 p^2 c_2 + m_1 p^2 m_2 p^2 c_3 + m_1 p^2 m_2 p^2 m_3 p^2 + m_1 p^2 m_3 p^2 c_3 c_1 c_2 c_3 + c_1 c_2 m_3 p^2 + c_1 m_2 p^2 c_3 + c_1 m_2 p^2 m_3 p^2 + c_1 c_3 m_3 p^2 c_2 m_2 p^2 c_3 + c_2 m_2 p^2 m_3 p^2 + c_2 c_3 m_3 p^2 = 0. \quad (11.31)$$

Podstawiając  $p = i\omega$ , otrzymujemy równanie w postaci:

$$-m_1 m_2 m_3 \omega^6 \cdot m_1 \omega^2 (m_3 \omega^2 c_2 + m_2 \omega^2 c_3 + m_3 \omega^2 c_3) + m_2 \omega^2 (m_3 \omega^2 c_1 + m_3 p^2 c_2) - m_2 \omega^2 (c_2 c_3 + c_1 c_3) - m_3 \omega^2 (c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3) + c_1 c_2 c_3 = 0. \quad (11.32)$$

Podstawiając w równaniu 11.32 za  $\omega^2 = z$ , otrzymujemy równanie algebraiczne trzeciego stopnia, którego pierwiastkami są częstości drgań własnych analizowanego układu opisanego grafem rys.11.15.

## 12. Modelowanie układów mechatronicznych w formalizmie grafów wiązań (bond grafów)

### 12.1. Podstawowe pojęcia

- Multi-disciplinary modelling – modelowanie układów z uwzględnieniem wielu zjawisk fizycznych równocześnie
- Bond-graphs – grafy wiązań, (grafy przepływu mocy)
- Bond – wiązanie
- Node – wierzchołek grafu
- Constraints – więzy
- Junction – węzeł, łącze
- Effort variable (e) – zmienna biegunowa (siłowa)
- Flow variable (f) – zmienna przepływowa
- Sign convention half barrow – umowny grot pół-strzałki (oznaczenie kierunku przepływu mocy)
- Moment – moment
- Torque – moment obrotowy
- Casual – przyczynowy
- Casuality – przyczynowość
- Acasual – z nieoznaczoną przyczynowością
- Assigment statement – przyporządkowanie krawędzi grafu
- Equation – równanie
- Stroke – prostopadła kreska do pół-strzałki, określa przyczynowość.

Metoda grafów wiązań jest szczególnie praktyczna, w przypadku modelowania dynamiki systemu złożonego z różnych podukładów fizycznych: mechanicznych, elektrycznych, hydraulicznych, elektronicznych, termodynamicznych i innych. Jest tak na pewno w przypadku modelowania układów mechatronicznych i w dziedzinie robotyki, gdzie mechaniczne, hydrauliczne pneumatyczne i elektryczne układy w kilku kombinacjach połączeń współdziałają. Wgłębianie się w teorię grafów wiązań jest jednak poza zakresem tego materiału. Szerszy zakres zagadnień z grafów wiązań można znaleźć w wielu publikacjach np. w pracach: H. Payntera (1961), Karnoppa i Rosenberga (1975), Van Dixhoorna (1982), Breedvelda (1984).

Dla zrozumienia tego współczesnego języka modelowania przedstawione będzie tylko krótkie wprowadzenie do metody grafów wiązań, a to z uwagi na fakt, że metoda grafów wiązań jest coraz częściej stosowana w opisie układów mechatronicznych.

Dla symulacji modeli uzyskanych metodą grafów wiązań mogą być użyte programy (ACSL, CAMP, CSMP, CSSL, ENPORT, NEPTUNIX, TUTSIM, CAMAS). Obecnie dostępny jest 20-SIM, zaawansowany program do modelowania wspomaganego komputerowo, który został napisany na Uniwersytecie Twente w Holandii. W tym ujęciu podstawy modelowania grafów wiązań są wyjaśnione, a także opisana jest metoda modelowania grafów wiązań dla układów o różnych nośnikach energii.

Warto dodać, że graf mostów królewieckich, sformułowany przez L. Eulera w roku 1736, uznawany jest za pierwszy problem teorii grafów.

## 12.2. Graf wiązań w opisie, zmienne wyteżeniowe i przepływowe

W układzie fizycznym graf wiązań jest graficznym odwzorowaniem przepływu mocy. Przepływ mocy jest przedstawiony w postaci pół-strzałek. Przepływ energii między 2 elementami (wiązaniami) jest zawsze scharakteryzowany według Payntera przez iloczyn zmiennych,  $e$  (biegunowa) i  $f$  (przepływowa)<sup>3</sup>, których wynikiem jest moc:

$$P = e \cdot f. \quad (12.1)$$

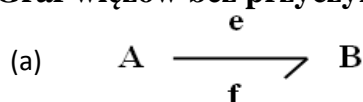
Grot strzałki wskazuje kierunek przepływu mocy. Jeśli  $e$  i  $f$  są dodatnie, to groty są skierowane do wewnątrz elementu – mówimy wtedy, że element pochłania energię. Gdy 2 elementy połączone są gałęziami (wiązaniami) grafu w postaci pół-strzałki  $\longrightarrow$ , jeden element zawsze określa zmienną wyteżeniową, a element przeciwny zawsze określa zmienną przepływową. Element, który określa wyteżenie jest wzmocniony przepływem od drugiego elementu. Rys. 12.1 przedstawia 2 typy wiązań, jako dwustronne połączenie sygnałów (sygnał wyteżenia i sygnał przepływu), których kierunki są wzajemnie przeciwne. Dla utworzenia modelu symulacyjnego z grafu wiązań ważne są odpowiednie pojedyncze kierunki. Dla wskazania kierunku wyteżenia stosuje się kreskę prostopadłą do wiązania. Wybór kierunku sygnałów, zwany też jako przyczynowość, zależy od elementu, który jest połączony z więzem.

## 12.3. Przyczynowość (casuality)

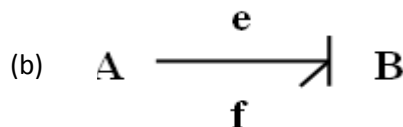
W celu ułożenia praw w postaci układu równań różniczkowych, które rządzą składowymi elementami musimy podjąć szereg decyzji dla określenia związków przyczynowo skutkowych. Gdy dwa elementy są połączone wiązaniem, możemy powiedzieć, że wyteżenie powoduje odpowiedź drugiego elementu przez przepływ, podczas gdy przepływ powoduje, że pierwszy element odpowiada wyteżeniem. Tak więc związki przyczynowo skutkowe są przedstawione w przeciwnych kierunkach – jest to właśnie przyczynowość. Kreska prostopadła do wiązania jest nazywana znakiem przyczynowości. Wskazuje ona jak  $e$  i  $f$  są określone przyczynowo.

Rys. 12.1. Pół-strzałki (wiązania): (a) bez przyczynowości, i (b) z przyczynowością.

### Graf więzów bez przyczynowości:



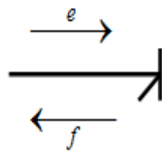
### Graf więzów z przyczynowością (z poprzeczną kreską):



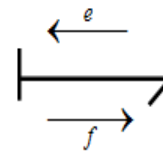
Przyjęto, że przyczynowość wyteżeniowa (rys.12.1(a)) jest znaczonej przy grocie strzałki, a przyczynowość przepływowa (rys 12.1(b)) z drugiej strony więzu.

<sup>3</sup> Inne nazwy tych zmiennych to: biegunowa (across) i równoległa (through).

Rys. 12.2. Pół-strzałki (wiązania) opisujące dwuzwrotny sygnał. Prostopadłe kreski charakteryzują przyczynowość.



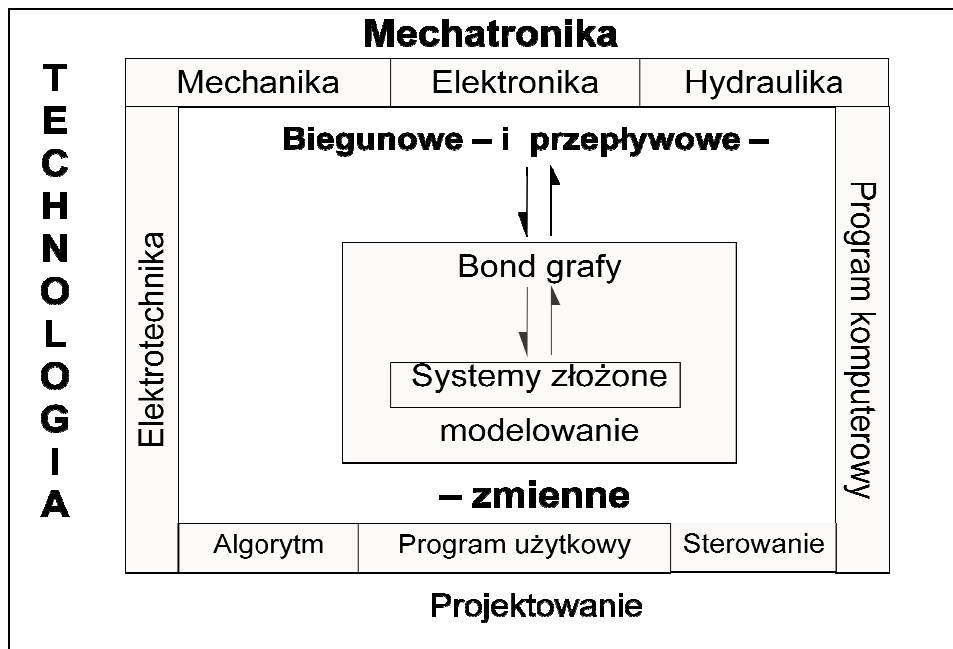
(a) przyczynowość wyężeniowa



(b) przyczynowość przepływowa

Jako przykład dla mechanicznych układów ogólne zmienne są: wyężenie  $F$  (siła) i przepływ  $V$  (prędkość) lub  $M$  (moment) i przepływ  $\Omega$  (prędkość kątowa). Zmienne te są przedstawione w tab. 12.1 w ogólnym zapisie, który będzie stosowany we wszystkich dziedzinach: mechanice, hydraulice, termodynamice oraz elektrycznej.

Rys. 12.3. Symboliczna współzależność dziedzin niezbędnych w modelowaniu mechatronicznym.



Tabl. 12.1. Uogólnione zmienne różnych dziedzin.

Dziedzina	Zmienne typu:		Pęd lub impuls	Przemieszczenie ładunek	Moc	Energia
	Effort – siłowe	Flow – przepływowe				
ogólna	$e$	$f$	$p = \int edt$	$q = \int fdt$	$ef$	$\int fdp$ $\int fedq$
mechaniczna (translacja)	$F$ siła [N]	$V$ prędkość $[\frac{m}{s}]$	$P$ pęd $[N \cdot s]$	$X$ odległość [m]	$FV$ [w]	$\int Vdp$ kinetyczna [J] $\int FdX$ potencjalna [J]
mechaniczna (rotacja)	$M$ moment $[N \cdot m]$	$\Omega$ prędkość kątowa $[\frac{rad}{s}]$	$H$ pęd kątowy $[N \cdot m \cdot s]$	$\theta$ kąt [rad]	$M \Omega$ [w]	$\int \Omega dH$ kinetyczna [J] $\int Md\theta$ potencjalna [J]
elektryczna	$U$ Napięcie [V]	$I$ Natężenie [A]	$\Phi$ [Wb]	$Q$ Ładunek [C]	$UI$ [w]	$\int Id\Phi$ magnetyczna [J] $\int UdQ$ elektryczna [J]
hydrauliczna i akustyczna	$P$ ciśnienie $[\frac{N}{m^2}]$	$Q_V$ natężenie przepływu $[\frac{m^3}{s}]$	$\Gamma_p$ impuls ciśnienia $[\frac{N \cdot s}{m^2}]$	$V$ objętość $[m^3]$	$PQ_V$ [w]	$\int Q_V d\Gamma_p$ kinetyczna [J] $\int PdV$ potencjalna [J]
magnetyczna	$\lambda$ siła elektromotoryczna [A]	$\dot{\Phi}$ $[\frac{Wb}{s}]$	brak	$\Phi$ [Wb]	$\lambda \dot{\Phi}$ [w]	$\int \lambda d\Phi$ [J] magnetyczna
termodynamiczna	$T$ temperatura [K]	$\dot{S}$ natężenie przepływu entropii $[\frac{J}{K \cdot s}]$	brak	$S$ entropia $[\frac{J}{K}]$	$T\dot{S}$ [w]	$\int TdS$ [J]
chemiczna	$\mu$ potencjał chemiczny $[\frac{J}{mol}]$	$\dot{N}$ molowe natężenie przepływu $[\frac{mol}{s}]$	brak	$N$ Ilość substancji [mol]	$\mu \dot{N}$ [w]	$\int \mu dN$ [J]

## 12.4. Elementy składowe (constitutive elements)

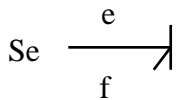
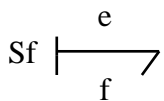
W celu usprawnienia rysowania grafów wiązań typowe elementy przedstawione są jako standardowe mnemotechniczne symbole. Elementy mogą być podzielone na kilka grup:

1. **Źródło:** (Se, Sf) elementy generujące energią
2. **Element pojemnościowy:** (C, I) elementy magazynujące energię
3. **Element rozpraszający:** (R) elementy rozpraszające energię
4. **Transformator i Girator:** (TF, GY) elementy przemieniające energię
5. **Węzeł:** (0, 1) elementy przekazujące energię.

### 12.4.1. Źródła (sources)

Źródła przedstawiają wzajemne oddziaływanie pomiędzy układem a jego środowiskiem. Istnieją dwa typy źródeł: wyężeniowe (effort source) **Se** i przepływowe (flow source) **Sf**. Tab. 12.2 przedstawia opis źródeł.

Tab. 12.2. Źródła w grafach wiązań.

Element	Elementarny graf	Równanie	Przykład
Źródło wyężeniowe (siłowe)	Se 	<b>e – znane</b> f – dowolne	Siła ciężkości Elektryczne źródło napięciowe
Źródło przepływowe	Sf 	<b>f – znane</b> e – wynikowe	Elektryczne źródło prądowe

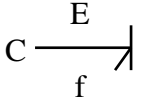
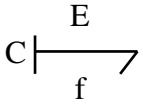
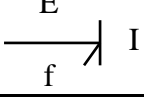
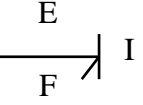
Dla danego źródła typ zmiennej jest ściśle określony. Innymi słowy, **Se** element ma ustaloną przyczynowość wyężenia, a **Sf** element ma ustaloną przyczynowość przepływu.

### 12.4.2. Element magazynujący energię (buffers)

Istnieją 2 typy elementów magazynujących energię: typ **C** i typ **I**. Tab. 12.3 przedstawia opis zmiennej wyężeniowej i zmiennej przepływowej tego typu elementów. Parametry „C” i „I” są stałymi, co określa liniowy charakter tych elementów.

Elementy magazynujące energię nie mają ustalonego typu zmiennych. Zarówno przyczynowość wyężeniowa, jak i przepływowa są dozwolone w obu przypadkach. W przypadku symulacji należy jednak unikać przemiennej używania. Innymi słowy – dla elementu **C** zalecana jest przyczynowość przepływowa, a dla elementu **I** zalecana jest przyczynowość wyężeniowa.

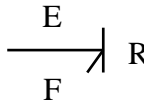
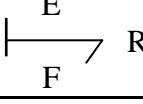
Tab. 12.3. Elementy pojemnościowe w grafach wiązań.

Element		Elementarny graf	Równanie	Przykład
C-element	Przyczynowość wyężeniowa		$f = C \frac{de}{dt}$	Sprężyna, Kondensator
	Przyczynowość przepływowa		$e = \frac{1}{C} \int f dt$	
I-element	Przyczynowość wyężeniowa		$f = \frac{1}{I} \int e dt$	bezwładność
	Przyczynowość przepływowa		$e = I \frac{df}{dt}$	

### 12.4.3. Element rozpraszający (dissipator)

Element rozpraszający to taki element, w którym zachodzi proces straty energii. Niezależnie od dziedziny elementu energia jest tracona nieodwracalnie w postaci ciepła. Oznacza to, że moc jest zawsze dodatnia w stosunku do elementu rozpraszającego. Jest to przedstawione w elemencie oporowym przez opór **R**. W tab. 12.4 przedstawiony został przepływ i wyężenie dla elementu oporowego. Dla elementu oporowego nie ma preferowanej postaci równania. Innymi słowy – element oporowy ma obojętną przyczynowość.

Tabl. 12.4. Element rozpraszający w grafach wiązań.

Element oporowy	Elementarny graf	Równanie	Przykład
Przyczynowość Wyężeniowa		$f = \frac{1}{R} \cdot e$	Tłumik drgań Opornik elektryczny
Przyczynowość Przepływowa		$e = R f$	

### 12.4.4 Transformator i girator

Transformator i girator to elementy przetwarzające energię bez strat zarówno w układzie fizycznym o jednym nośniku energii, jak i w układzie fizycznym o wielu nośnika energii. Transformator jest oznaczany przez TF, a girator przez GY. W tab. 12.5 pokazane są równania wyężeniowe i przepływowe. Parametry **m** i **k** to odpowiednio współczynnik transformatora i giratora.

Dla transformatora wynikiem przyczynowości wyężeniowej na wiązaniu wejściowym jest przyczynowość przepływowa na wiązaniu wyjściowym i vice versa. Dla giratora wynikiem przyczynowości wyężeniowej na wiązaniu wejściowym jest przyczynowość wyężeniowa na wiązaniu wyjściowym i vice versa.



Tab. 12.5. Schematy transformatorów i giratorów stosowane w grafach wiązań.

Element		Graf wiązów	Równanie	Przykład
TF- element	Przyczynowość wyężeniowa		$f_1 = \frac{1}{m} f_2$ $e_2 = \frac{1}{m} e_1$	Przekładnia mechaniczna
	Przyczynowość przepływowa		$f_2 = m f_1$ $e_1 = m e_2$	
GY- element	Przyczynowość wyężeniowa		$f_1 = \frac{1}{k} e_2$ $f_2 = \frac{1}{k} e_1$	Silnik prądu stałego
	Przyczynowość przepływowa		$e_1 = k f_2$ $e_2 = k f_1$	

### 12.4.5 Węzły (junctions)

Węzeł łączy 1 lub więcej elementów modelu w trybie ciągłości energii: energia nie jest ani magazynowana, ani rozpraszana. Istnieją 2 typy węzłów: **węzeł 0** „zerowy” i **węzeł 1** „jedynkowy”.

#### 12.4.5.1 Węzeł 0 „węzeł zerowy” (0 junction)

Węzeł 0 przedstawia połączenie, gdzie wyężenia wszystkich wiązów są równe ( $e = \text{idem}$ ). Konsekwencją zasady przepływu mocy jest to, że suma zmiennych przepływowych musi być równa 0. Kierunek (orientacja) wiązań określa znak sumowania przepływów: wszystkie wiązania skierowane do węzła 0 powinny być dodane, a wszystkie wiązania skierowane na zewnątrz węzła 0 powinny być odejmowane. Ten sposób sumowania odpowiada prawu Kirchhoffa dla prądów w obwodzie elektrycznym. Równość zmiennych wyężeniowych limituje przyczynowość. Tylko 1 wiązanie może mieć przyczynowość wyężeniową (kreseczka po stronie węzła 0), a wszystkie pozostałe wiązania muszą mieć przyczynowość przepływową (kreseczka po stronie grotu wiązania).

Tab. 12.6. Schemat węzła zerowego.

Element	Elementarny graf wiązań	Równanie	Przykład
węzeł zerowy		$e_1 = e_2 = e_3$ $f_1 - f_2 - f_3 = 0$	Elektryczny obwód równoległy Równoległe połączenie dwóch mechanicznych części

### 12.4.5.2 Węzeł 1 „węzeł jedynkowy” (1 junction)

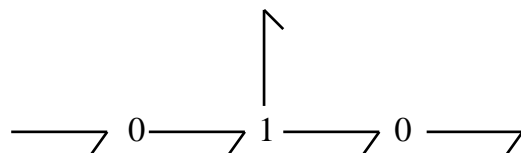
Węzeł 1 jest podwójną formą węzła 0 (wyteżenie i przepływ są przeciwne). Węzeł jedynkowy przedstawia połączenie, gdzie wszystkie zmienne przepływowe są równe ( $f=\text{idem}$ ). Konsekwencją zasady ciągłości mocy jest to, że suma wszystkich zmiennych wyteżeniowych musi być równa 0. Kierunek (orientacja) wiązań określa znak sumowania zmiennych wyteżeniowych: wszystkie zmienne wyteżeniowe skierowane do węzła 1 powinny być zsumowane, a zmienne wyteżeniowe skierowane od węzła 1 powinny być odejmowane. Ten sposób sumowania odpowiada prawu Kirchhoffa dla napięć w obwodzie elektrycznym. Równość przepływów ogranicza przyczynowość. Tylko 1 wiązanie może mieć przyczynowość przepływową (kreska prostopadła „stroke” po stronie grotu wiązania). Wszystkie pozostałe wiązania muszą mieć przyczynowość wyteżeniową (kreska prostopadła „stroke” po stronie przeciwnej do grotu wiązania). Innymi słowy – węzeł jedynkowy ma ograniczoną przyczynowość.

Tab. 12.7. Schemat węzła jedynkowego.

Element	Elementarny graf wiązań	Równanie	Przykład
Węzeł 1		$f_1 = f_2 = f_3$ $e_1 - e_2 - e_3 = 0$	Mechaniczne połączenie równoległe

### 12.5. Metoda budowania grafu wiązań układu elektrycznego

1. Dla każdego węzła w obwodzie ze znanym napięciem przyjmij węzeł zerowy.
2. Wstaw każdy element obwodu pomiędzy odpowiednią parę węzłów zerowych przez przyłączenie elementu do węzła jedynkowego, a następnie połącz węzeł jedynkowy do tych węzłów zerowych.
3. Ustal umowę znaku, używając konwencji „przelotowy” dla części węzłów 0-1-0, to jest:



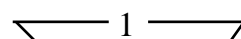
Zapewni to rozpoznanie przez element różnicy napięcia zdefiniowanego na stałe w stosunku do założonego punktu zerowego (ziemi).

4. Wybierz wygodny węzeł ziemia. Będzie to węzeł o napięciu 0 – w ten sposób wszystkie wiązania połączone do niego mogą być wyeliminowane.
5. Uprość graf przez zamianę 2 zerowych lub jedynkowych węzłów, które mają moc „przelotową” na proste wiązania.



i równoznaczny do gałęzi pojedynczej (wiązania)

Ale nie zmieniaj orientacji:



## 12.6. Metoda budowania grafu wiązań układów mechanicznych

Dla większości ludzi łatwiej jest wyobrazić sobie prędkości i rozważać, jakie są między nimi relacje w układzie mechanicznym niż rozważać siły we wszystkich częściach układu mechanicznego. Z tego też względu procedura poniżej jest wyrażona w postaci prędkości. Jednak siły będą także właściwie ustalone przez graf wiązań. Procedura składa się z 5 kroków:

1. Dla każdej prędkości ustal węzeł jedynekowy. Dla identycznych elementów powinny być użyte prędkości bezwzględne, dla węzłów jedynekowych mogą być także ustalone prędkości względne.
2. Dołącz elementy bezwładnościowe do ich wiązań jedynekowych o bezwzględnej prędkości. Połącz C i R elementy pomiędzy pary wiązań jedynekowych, używając wiązań zerowych, chyba że wiązania jedynekowe o prędkości względnej zostały już ustalone dla takich elementów. Połącz odpowiednio źródła siły i prędkości.
3. Kiedy prędkości na węzłach jedynekowych są w bezpośredniej relacji, użyj węzłów zerowych i elementów przekształcających, aby nałożyć wiązania. Sprawdź poprawność grafu wiązań przez upewnienie się czy założone relacje pomiędzy siłami są właściwe.
4. Dodaj grot na wiązania, które nie zostały jeszcze zorientowane.
5. Uprość graf, gdzie jest to możliwe.

## 12.7. Układanie równań na podstawie modelu grafu wiązań

3 główne kroki będą wyróżnione przy budowaniu algorytmu symulującego na podstawie modelu grafu wiązań. Pierwszy to analiza przyczynowa, czyli działanie tylko na grafie wiązań; drugi to budowanie równań, który przenosi informację z przyczynowego grafu wiązań na równania; a trzeci to dodanie algorytmu całkującego, który jest konieczny do rozwiązywania równań różniczkowych.

### 12.7.1 Analiza przyczynowości (causal analysis)

Analiza przyczynowości pozwala na określenie kierunku zmiennej wyężeniowej i zmiennej przepływowej w modelu grafu wiązań. Wynikiem jest przyczynowy graf wiązań, który może być rozważany jako zintegrowany blokowy diagram. Z przyczynowego grafu wiązań możemy bezpośrednio zbudować równoważny schemat blokowy. Nowoczesne programy komputerowe takie jak Sim20 mogą przypisać przyczynowość automatycznie. Użytkownik musi tylko zadbać, aby równania dynamiczne w zbudowanym przez użytkownika modelu były znane przez program.

Każdy element grafu wiązań, włączając wiązania, reprezentuje jedną lub więcej relacji matematycznych pomiędzy wyężeniem (siła, moment obrotowy, napięcie itd.) a przepływem (prędkość, prąd itd.). Relacje te są z nieoznaczoną przyczynowością (acasual). Terminologia ta jest użyta, aby podkreślić kontrast pomiędzy bezpośrednimi a przyczynowymi własnościami wyznaczonych zależności. Dla własności przyczynowych

zmienne równego znaku po stronie lewej powinny być liczone w relacji do zmiennych znajdujących się po prawej stronie. W metodzie grafów wiązań terminologia używana do zamiany relacji pośrednich na bezpośrednie jest nazywana przypisaniem przyczynowości obliczeniowej do grafu wiązań.

Zmienne są podzielone na te po prawej stronie wyznaczonego równania, które są „przyczyną” lub zmiennymi wejściowymi i na te, które są po lewej stronie, a które są „wynikiem” albo zmiennymi wyjściowymi zamierzonych działań obliczeniowych.

### 12.7.2. Procedura wyznaczania przyczynowości

Procedura wyznaczenia przyczynowości pozwala na uzyskanie kompletnego matematycznego modelu grafu wiązań. W celu przewidzenia postaci końcowych równań i uniknięcia niekonsekwencji, procedura SCAP (Sekwencyjna Procedura Wyznaczania Przyczynowości) przedstawiona poniżej musi być wykonywana w ścisłej kolejności:

1. Wybierz źródło  $S_e$  lub  $S_f$  i przypisz mu wymaganą przyczynowość. Natychmiast przypisz wynikające przyczynowości, biorąc pod uwagę ograniczenia wszystkich węzłów 0, 1, TF, GY. Powtarzaj ten krok aż wszystkie źródła będą miały wyznaczoną przyczynowość.
2. Wybierz element magazynujący (C lub I) i wyznacz integralną przyczynowość. Znow przypisz wynikające przyczynowości, używając 0, 1, TF i GY, a także uwzględniając odpowiednie ograniczenia. Powtarzaj ten krok aż wszystkie elementy C i I zostaną przypisane przyczynowo.
3. Wybierz element R, który jest nieopisany i nadaj mu arbitralnie przyczynowość. Przypisz wynikające przyczynowości, używając 0, 1, TF, i GF. Powtarzaj ten krok aż wszystkie elementy R będą miały przypisaną przyczynowość.

### 12.7.3. Tworzenie równań na podstawie przyczynowego grafu wiązań

Gdy został ustalony przyczynowy graf wiązań i nie ma sprzeczności, można budować równania. Równania stanu dla wszystkich elementów mogą być napisane i będą tworzyć grupę pierwszego rzędu różniczkowych i algebraicznych równań (Differential and Algebraic Equations).

W przestrzeni stanu proces sterowania opisujemy równaniem:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{BU} \text{ (układ liniowy),} \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)U(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)U(t),\end{aligned}$$

gdzie:  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  – macierze stanu, sterowania i wyjścia,

$\mathbf{D}(t)$  – jest macierzą przejścia,

$\mathbf{x}(t)$  – wektor stanu,

$\mathbf{U}(t)$  – wektor sterowania,

$\mathbf{A}$  – macierz stanu – macierz kwadratowa opisująca stan układu,

$\mathbf{B}$  – macierz wejścia – macierz kwadratowa opisująca zmienne wejściowe.

Zadanie sterowania polega na tym, aby tak wybrać wektor sterowania, by trajektoria ruchu  $x(t)$  przeprowadzała układ dynamiczny

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)U(t); y(t) = C(t)x(t) + D(t)U(t)$$

ze stanu początkowego  $(x_0, t_0)$  do określonego, na ogół założonego z góry punktu przestrzeni stanu  $x_1$ , gdzie  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ .

$$\dot{x}(t) = \Phi(x, U) - \text{(nieliniowy układ równań),}$$

gdzie:  $\Phi$  jest wektorem nieliniowych funkcji stanu i zmiennych wejściowych.

Zmienne stanu są połączone z elementami magazynującymi energię, to jest pędem  $p$  dla każdego I, np.  $p = e$  i przemieszczenie  $q$  dla każdego C np.  $q = f$ .

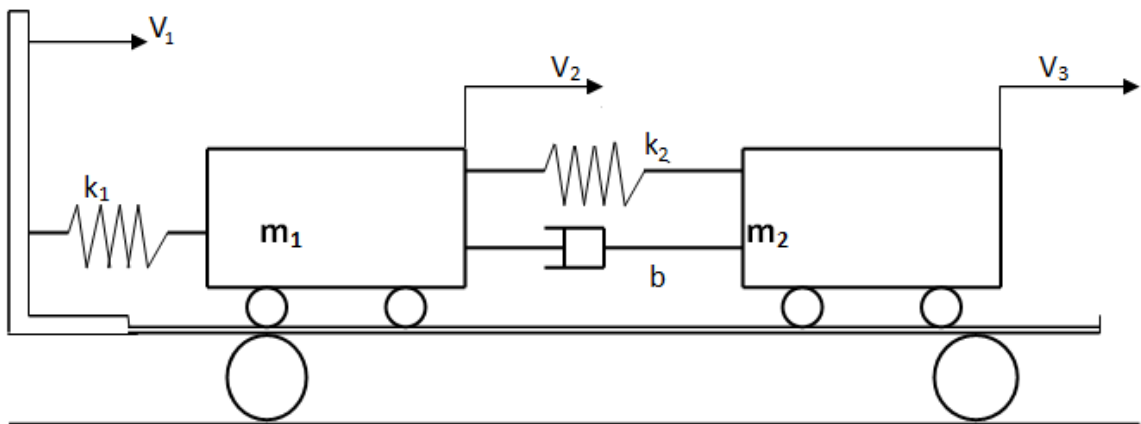
Dla grafu, w którym każdy I i C ma integralną przyczynowość, rzędem tego układu (lub równoznaczne z liczbą równań stanu) jest liczba elementów I i C. Zmiennymi wejściowymi będą wyężenia od źródeł wyężeniowych i przepływy od źródeł przepływowych. Dlatego liczba zmiennych wejściowych jest równa liczbie źródeł.

#### 12.7.4. Układ złożony z 2 sprzężonych mas punktowych w postaci wózków

Przedstawimy sposób opisu układu o 2 stopniach swobody za pomocą formalizmu grafów wiązań.

2 masy punktowe  $m_1, m_2$  w postaci wózków (rys. 12.4) sprzęgnięto sprężyną i tłumikiem. Wózki te ułożono na platformie, która jest wymuszana kinematycznie z prędkością  $V_1$ .

Rys. 12.4. 2 sprzężone wózki o masach traktowane jako punktowe.



Graf wiązań układu (rys. 12.4) pokazany jest na rys. 12.5.

Każda z 2 mas jest reprezentowana przez inercyjny element I połączony z przynależnym „węzłem 1”. Wszystkie inne wiązania połączone do węzła 1 będą miały zarówno jego zmienną wyężeniową, jak i wspólne prędkości, albo  $V_1$  albo  $V_3$ . Sprężyna i tłumik, które są umieszczone pomiędzy masami mogą być wrysowane w bond grafie jako węzły zerowe. Każdy z tych elementów jest przedstawiony jako węzeł 0 z 2 powodów:

1.  $V_1 = V_2 - V_3$ : różnica ta charakteryzuje ugięcie sprężyny i przemieszczenie tłumika. Węzeł 0 z grotami jak na rysunku wprowadza odpowiednią relację pomiędzy 3 prędkościami  $V_1, V_3$  i  $V_4$ .

2. Każdy węzeł ma wspólną siłę. Siła w sprężynie działa na  $\mathbf{m}_1$  i na  $\mathbf{m}_2$ . Podobnie siła w tłumiku działa na obie masy. Oczywiście siła tłumienia i siła w sprężynie są różne.

W celu ułatwienia zbudowania grafu wiązań do 2 węzłów 1 przyłączyliśmy prędkości  $V_1$  i  $V_2$ , aby przypomnieć, że każde wiązanie znajdujące się w tych węzłach ma zarówno odpowiednią prędkość, jak i zmienną przepływową. Na rys. 11.3.(b) graf zakłada, że sprężyna i tłumik mają tę samą prędkość względną  $V_4$ . Prowadzi to do nieznacznie innego, ale równoznacznego grafu wiązań na rysunku 11.3.(c). W tym przypadku zaczynamy przez rozpoznanie 3 ważnych prędkości  $V_2$ ,  $V_3$  i  $V_4 = V_2 - V_3$ . Dla każdej prędkości jest węzeł 1 i węzły jedynekowe są połączone jednym węzłem 0, który nakłada związek pomiędzy prędkościami. Łączymy każdy element do węzła 1, który ma odpowiednią prędkość.

W pierwszym węźle 0

$$\Delta V_{12} = V_1 - V_2,$$

$$F_I = \frac{1}{c_1} \int \Delta V_{12} dt,$$

$$C_1 = \frac{1}{k_1}.$$
(12.3.1)

W pierwszym węźle 1

$$\Delta F = F_I - [F_s + F_r],$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \int \Delta F, Rt.$$
(12.3.2)

W drugim węźle 0

$$\Delta V_{23} = V_2 - V_3,$$

$$F_s = \frac{1}{c_2} \int \Delta V_{23} dt,$$

$$\frac{1}{c_2} = \frac{1}{k_2},$$
(12.3.3)

W drugim węźle 1

$$F_R = b \Delta V_{23},$$

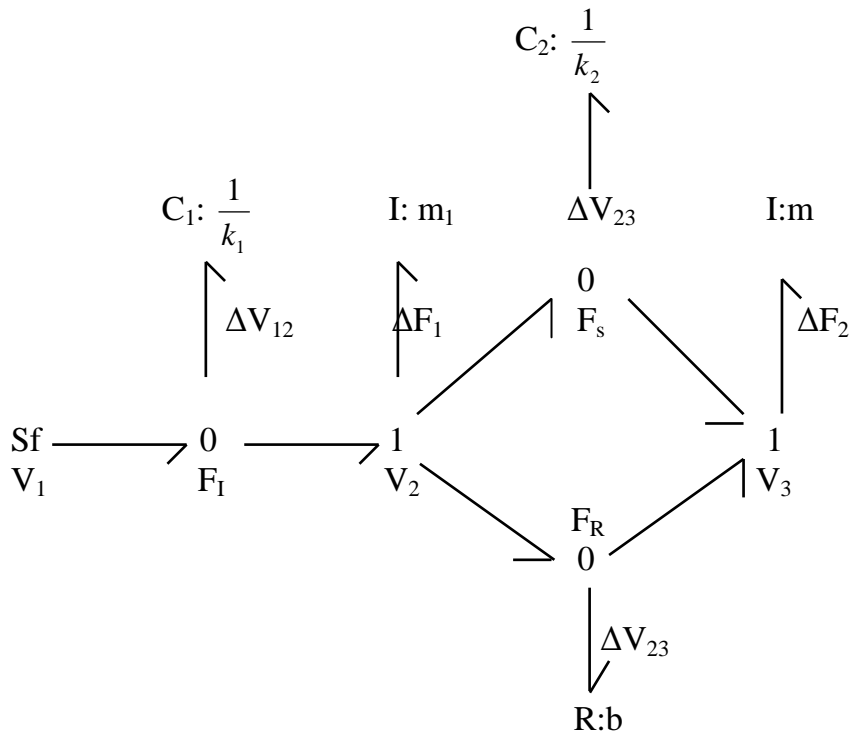
$$V_3 = \frac{I}{m_2} \int [F_s + F_R] dt.$$
(12.3.4)

Równania różniczkowe ruchu przyjmą postać:

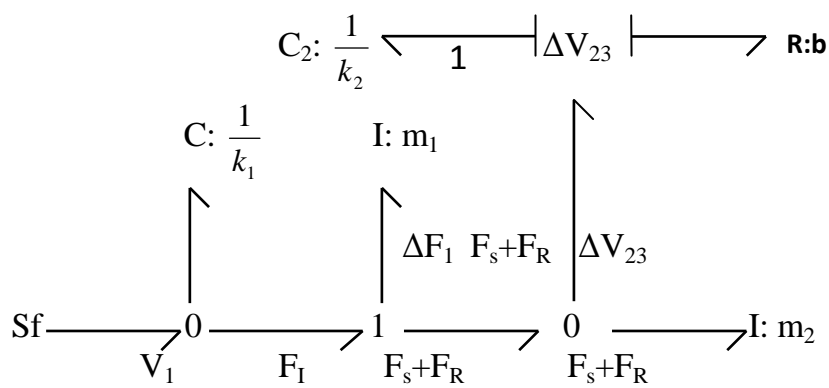
$$m_1 \cdot \dot{V}_2 = k_1 \int (V_2 - V_1) dt - k_2 \int (V_2 - V_3) dt - b(V_2 - V_3) \quad (12.3.5)$$

$$m_2 \cdot \dot{V}_3 = k_2 \int (V_3 - V_2) dt - b(V_3 - V_2) \quad (12.3.6)$$

12.5. Graf wiązań układu wózków bez wyznaczonej przyczynowości.



12.6. Uproszczony graf wiązań układu wózków z wyznaczoną przyczynowością.



## 13. Maszyna mechatroniczna jako system dynamiczny

### 13.1. O modelowaniu układów mechanicznych

Modelowanie układu rzeczywistego (maszyny) polega na wyborze wyidealizowanego modelu fizycznego opisującego, ze względu na badaną klasę zjawisk, działania rozpatrywanego układu. Formułując model matematyczny, ustalamy zbiór zmiennych opisujących stan badanego układu (zbiór zmiennych stanu), a następnie – stosując zasady dynamiki, równanie ciągłości, bilanse energii i itd. – ustala się zależności matematyczne między tymi zmiennymi stanu.

Budowa modelu układu rzeczywistego jest zadaniem wieloznacznym, a postać jego rozwiązania zależy od klasy badanych zjawisk. Dopuszczalność ustalonych podczas modelowania idealizacji układu rzeczywistego maszyny uzasadnić można tylko przez porównanie wyników badań symulacyjnych z danymi eksperymentalnymi. Prowadzi to do procesu identyfikacji, w wyniku którego ustalony rząd zgodności wyników teoretycznych i doświadczalnych stanowi potwierdzenie słuszności przyjętej idealizacji. Tak więc w modelowaniu układu, jakim jest maszyna robocza, zachodzi potrzeba przeprowadzenia studium jego dynamiki, które umożliwi rozumienie i przewidywanie, a często i poprawienie działania istniejącego układu.

Procedura studium zwykle obejmuje niżej wymienione działania:

1. Przy zastosowaniu redukcji fenomenologicznej ustalenie modelu fizycznego tak, aby jego właściwości dynamiczne były w dostatecznym stopniu z nią zgodne.
2. Wprowadzenie odpowiednich równań różniczkowych modelu fizycznego, czyli określenie modelu matematycznego.
3. Ustalenie modelu matematycznego, np. opisanego metodą przestrzeni stanów, funkcjami przejścia lub innymi.
4. Analiza właściwości dynamicznych modelu matematycznego na przykładzie uzyskanych rozważań modeli matematycznych.
5. Wybór konfiguracji układu i wartości parametrów opisowych oraz podjęcie decyzji projektowych.

Stanowi to pierwszy etap w konstrukcji układu automatycznej regulacji maszyny roboczej (rys. 13.1). W przypadku możliwości wykonania badań doświadczalnych maszyny i weryfikacji opracowanego modelu, identyfikacja obiektu regulacji może być procesem wieloetapowym (przebiegać w sposób iteracyjny), a kolejne korekty modelu powinny doprowadzić do minimalizacji istotnych ze względu na synteze regulatora rozbieżności z układem rzeczywistym.

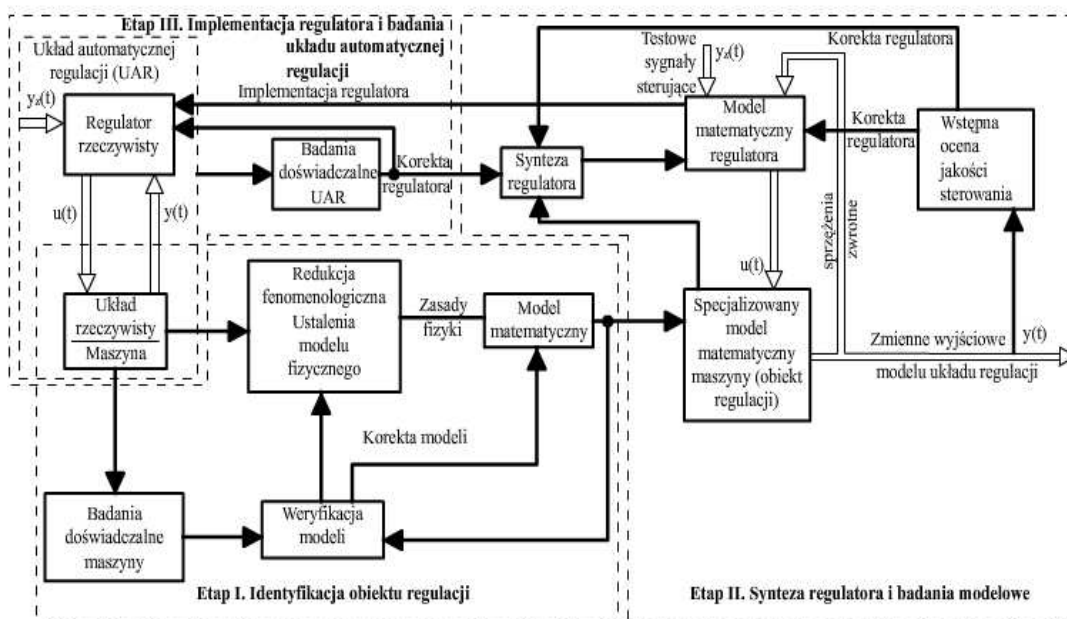
W etapie II dokonuje się syntezy regulatora i może ona być wsparta badaniami modelowymi opracowanego układu regulacji, np. na drodze symulacji komputerowej. Podstawą syntezy regulatora jest specjalizowany model matematyczny maszyny, przedstawiony np. w postaci równań stanu lub operatorowej funkcji przejścia. W niektórych przypadkach, przy rozbudowanych i skomplikowanych modelach obiektu regulacji, synteza regulatora nie jest możliwa lub jest bardzo złożona. W takich przypadkach dla celów syntezy regulatora upraszcza się opracowany wcześniej model maszyny, np. poprzez zastąpienie układu o parametrach rozłożonych modelem o parametrach skupionych. Do badań modelowych należy stosować z kolei pełny model maszyny roboczej. W przypadku niezadowalającej jakości sterowania



dokonywane korekty regulatora poprzez jego ponowną syntezę lub doświadczalną zmianę jego parametrów (wzmocnienia, stałych czasowych, rodzajów sprzężeń zwrotnych).

Identyfikacja obiektu regulacji oraz synteza regulatora i badania modelowe stanowią punkt wyjścia do zbudowania rzeczywistego układu regulacji. Polega ono na wyborze sposobu regulacji (np. regulacja analogowa lub mikroprocesorowy układ regulacji), opracowaniu szczegółowych schematów układów elektronicznych, a w przypadku regulacji mikroprocesorowej także opracowaniu procedur programowych realizujących funkcje regulatora. Na zakończenie należy wykonać badania doświadczalne rzeczywistego układu automatycznej regulacji, ocenę jego jakości regulacji i ewentualną ostateczną korektę parametrów regulatora.

Rys.13.1. Podstawowe etapy konstruowania układu automatycznej regulacji.



### Formalizm w opisie ruchu maszyny

W klasycznym formułowaniu równań różniczkowych ruchu obowiązuje tzw. zasada przyczynowości Newtona, według której „początkowy stan układu mechanicznego, do którego zaliczamy położenia i prędkości w pewnej przyjętej początkowej chwili czasu, określa jednoznacznie ruch układu mechanicznego”. Bazując na niej, tworzymy fizyczne oraz matematyczne modele obiektów i zachodzących w nich zjawisk.

Zastosowany formalizm w opisie modeli wynika z własności modelowanych obiektów oraz zakresu i celu badań procesów dynamicznych. W przypadku niezłożonych, nieodkształcalnych układów nieswobodnych punktów materialnych można z powodzeniem zastosować metodę kinetostatyki, której formalne przyjęcie daje możliwość napisania równania ruchu w postaci wektorowej równowagi:

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i + \bar{F}_{mi} = 0, \quad (13.1)$$

gdzie:  $\bar{F}_i$  – wypadkowy wektor sił czynnych,  
 $\bar{R}_i$  – wypadkowy wektor reakcji więzów,  
 $\bar{F}_{mi}$  – wektor sił bezwładności.

Dołączenie siły do wektorów  $F_i$  i  $R_i$  prowadzi do przekształcenia równań ruchu w równania równowagi. Jeśli rozpatrujemy ruch układu punktów materialnych poddanych działaniu więzów nieidealnych, np. z działającym tarcie, wówczas do sił czynnych dołączamy reakcje odpowiadające nieidealnym więzom i możemy przyrównać do zera sumę prac sił czynnych oraz bezwładności na dowolnych możliwych przemieszczeniach punktu, otrzymując ogólne równanie dynamiki, np. w postaci:

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \ddot{q}_i) \cdot \bar{\delta r}_i = 0, \quad (13.2)$$

lub

$$\sum_{i=1}^n [(F_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i) \cdot \delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i) \cdot \delta z_i] = 0. \quad (13.3)$$

We współrzędnych uogólnionych przyjmuje ono postać:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_1} - Q_1 \right] \delta q_1 + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_2} - Q_2 \delta q_2 + \dots + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} - Q_i \delta q_i = 0. \quad (13.4)$$

gdzie:  $E$  – energia kinetyczna układu,

$Q$  – siły uogólnione,

$\delta q_i$  – są wariacjami odpowiednich współrzędnych uogólnionych  $i=1, \dots, s$ ,

$s$  – liczba stopni swobody.

Ponieważ dla więzów holonomicznych, wariacje  $\delta q_i$  odpowiadają uogólnionym możliwym przemieszczeniom, to ogólne równanie dynamiki, na mocy warunku zerowania się prac, może być spełnione, gdy:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i. \quad (13.5)$$

W przypadku istnienia sił potencjalnych równanie to przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i, \quad (13.6)$$

gdzie:  $L = E - U$  – potencjał Lagrange'a,

$Q'_i$  – uogólnione siły niepotencjalne.

Przyjęcie formalizmu Lagrange'a porządkuje i upraszcza modelowanie równań ruchu dla układów złożonych o większej liczbie stopni swobody, zwłaszcza w przypadku wątpliwości co do zastosowania określonych zasad dynamiki.

Równania Lagrange'a II rodzaju mogą zastąpić w modelowaniu równań ruchu układów giroskopowych, zwłaszcza układów złożonych oraz manipulatorów wykonujących ruch kulisty, równania dynamiczne Eulera, których postać wektorowa jest następująca:

$$\frac{d}{dt} (J'_{ij} \omega'_j) = \frac{d'}{dt} (J'_{ij} \omega'_j) + \varepsilon_{ijk} \omega'_j J'_{kl} \omega'_l = M'_i, \quad (13.7)$$

lub:

$$J'_{ij} \frac{d' \omega'_j}{dt} + \varepsilon_{ijk} \omega'_j J'_{kl} \omega'_l = M'_i \quad (13.8)$$

Przecinek przy pochodnej oznacza, że pochodną oblicza się w układzie względnym związanym z ciałem.

Dla przypadku, gdy układ osi jest utworzony przez główne osie bezwładności, otrzymujemy następujące równania współrzędnościowe:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z &= M_x \\ J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x &= M_y \\ J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y &= M_z \end{aligned} \quad (13.9)$$

Ponieważ:

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_i} = K_i \quad \text{i} \quad \frac{\partial E}{\partial K_i} = \omega_i, \quad \text{gdzie} \quad K_i = J_{ij} \omega_j, \quad (13.10)$$

to w nieruchomym układzie współrzędnych

$$\frac{dK_i}{dt} = \frac{d'K_i}{dt} + \varepsilon_{ijk} \omega_j K_k = M_i, \quad (13.11)$$

skąd:

$$\frac{d'}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \omega_i} \right) + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E}{\partial K_j} \frac{\partial E}{\partial \omega_k} = M_i. \quad (13.12)$$

Do wyznaczenia równań ruchu układu w tym przypadku lepiej jest przyjąć formalizm Lagrange'a, szczególnie jeśli energia kinetyczna jest funkcją złożoną  $E = E(\psi, v, \varphi, \dot{\psi}, \dot{v}, \dot{\varphi})$ , a energia potencjalna zależy od kątów Eulera  $U = U(\psi, v, \varphi)$ .

Dla układu wielu ciał ze strukturą połączeń typu drzewa, a takimi są maszyny robocze, wygodnie stosować, w przypadku wyznaczenia modelu matematycznego, rozszerzone zasady Newtona. Równania te bazują na macierzy incydencji  $S_{ia}$ , która opisuje strukturę połączeń elementów i podzespołów maszyn.

W szczególności dla opisu ruchu postępowego:

$$m_i \ddot{r}_i = F_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} X_a^c \quad i = 1, \dots, n, \quad (13.13)$$

natomiast dla ruchu obrotowego:

$$\dot{K}_i = M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} (c_{ia} \times X_a^c + Y_a) \quad i = 1, \dots, n, \quad (13.14)$$

gdzie:  $m_i$  – jest masą i-tego ciała,

$\dot{K}_i$  – jest krętem ciała „i” liczonym względem środka masy  $C_i$ ,

$r_i$  – jest wektorem promieniem środka masy  $C_i$  mierzonym w inercjalnym układzie odniesienia,

$c_{ia}$  – są wektorami określającymi położenie punktów połączeń członów łańcuchów kinematycznych,

$X_a^c$  i  $Y_a$  – są uzewnętrznionymi siłami i momentami pochodzącymi od oddziaływania innych ciał na ciało „i” po wyodrębnieniu go z łańcucha kinematycznego;

$F_i, M_i$  – siły i momenty zewnętrzne.

Równania (13.13) i (13.14) można zapisać w zwartej formie macierzowej jako:

$$m\ddot{r} = F + SX^c, \quad (13.15)$$

$$\dot{K} = M + C \times X^c + SY, \quad (13.16)$$

gdzie: diagonalna macierz  $\mathbf{m}$  ma elementy  $m_{ij} = \delta_{ij}m_i$ ,  
 macierz kwadratowa  $\mathbf{S}$  posiada elementy  $0, +I, -I$ ,  
 $\ddot{r}, F, X^c, Y, \dot{K}, M$  są macierzami kolumnowymi, których elementami są wektory,  
 np.:  $\ddot{r} = [\ddot{r}_1, \dots, \ddot{r}_n]^T$   
 $(n \times n)$  macierz  $\mathbf{C}$  z elementami  $C_{ia} = S_{ia}c_{ia}, i, a=1, \dots, n$

Innym sposobem reprezentacji modelu matematycznego obiektu opisywanego równaniem różniczkowym drugiego rzędu jest przejście do przestrzeni stanów. Przekształcenie to pokażemy dla równania różniczkowego opisującego ruch układu o jednym stopniu swobody:

$$\ddot{y}(t) + 2\varphi\omega_u \dot{y}(t) + \omega_u^2 y(t) = k\omega_u^2 u(t), \quad (13.17)$$

gdzie:  $y(t)$  – zmienna wyjściowa,  
 $u(t)$  – zmienna wejściowa modelowanego procesu dynamicznego,  
 $k$  – wzmocnienie statyczne.

Jeśli oznaczymy:

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{i} \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$$

oraz

$$y(t) = x_1(t) \quad \dot{y}(t) = \dot{x}_2(t) \quad \text{czyli} \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

to równanie (13.17) przyjmie postać:

$$\dot{x}_2(t) = -\omega_u^2 x_1(t) - 2\varphi\omega_u x_2(t) + k\omega_u^2 u(t), \quad (13.18)$$

Opis w przestrzeni stanu ma postać macierzową:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_u^2 & -2\varphi\omega_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k\omega_u^2 \end{bmatrix} u(t), \quad (13.19)$$

która jest równaniem stanu, natomiast:

$$y(t) = [1, 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (13.20)$$

jest równaniem wyjścia, przy stanie początkowym  $x_1(t_0) = y_0, x_2(t_0) = \dot{y}_0$ .

W zapisie wektorowym opisany proces w przestrzeni stanu ma postać:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (13.21)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (13.22)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (13.23)$$

gdzie macierze  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  i  $\mathbf{C}$  są stacjonarne, a zadanie sterowania polega na tym, aby tak wybrać wektor sterowania  $\mathbf{u}(t)$ , by odpowiadająca mu trajektoria  $\mathbf{x}(t)$  przeprowadziła układ dynamiczny (13.21) ze stanu początkowego  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0)$  do pewnego, na ogół założonego z góry, punktu przestrzeni  $x_1; x_0, x_1 \in R^n$ .

Macierze  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  nazywane są w teorii sterowania odpowiednio macierzami stanu, sterowania i wyjścia. W przypadku liniowych układów niestacjonarnych (o parametrach zależnych od czasu) macierze stanu, sterowania, wyjścia są macierzami funkcyjnymi. Równania stanu i wyjścia przyjmują ogólną postać:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (13.24)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (13.25)$$

gdzie:  $\mathbf{D}(t)$  jest macierzą przejścia.

Oprócz tych metod w formułowaniu modelu matematycznego można stosować inne, nieklasyczne metody analizy aż do uzyskania pożądanych wyników numerycznych. Na rys. 13.2 opisano ścieżki od otwartego problemu (np. maszyny) do numerycznych wyników.

Główną zaletą sformułowania modelu matematycznego układu dynamicznego w przestrzeni stanów jest z jednej strony ułatwienie rozwiązania równania różniczkowego, a z drugiej strony uzyskany układ równań jest podstawą do syntezy układu regulacji.

### **13.2. Maszyna mechatroniczna jako obiekt regulacji**

Maszyna robocza jest złożonym, wielopoziomowym układem sterowania. W przypadku realizacji mikroprocesorowej układu sterowania sterownik maszyny roboczej tworzy główny (nadrzędny) poziom (warstwę) sterowania. Kontroluje on działanie sterowników poszczególnych jej mechanizmów, które tworzą kolejny poziom sterowania. Na podstawowym poziomie usytuowane są sterowniki poszczególnych napędów.

Maszyna robocza może działać autonomicznie lub może być włączana w strukturę sterowania procesem, czyli linią produkcyjną. W tym drugim przypadku sterownik maszyny roboczej jest połączony z komputerem lokalnym sterowania procesem, a ten z kolei z komputerem centralnym na szczeblu zarządzania przedsiębiorstwem.

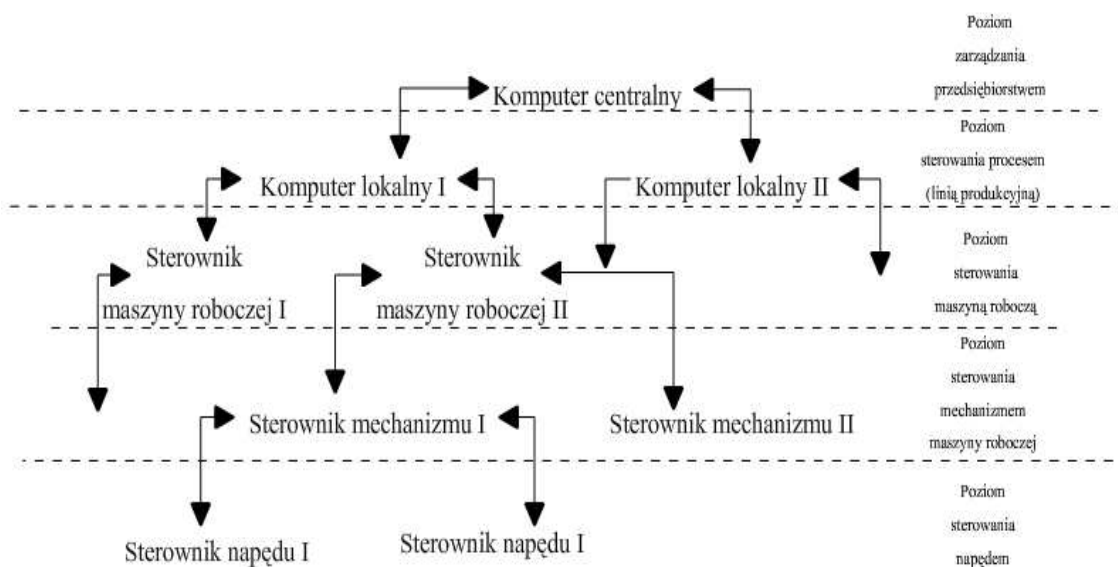
Wszystkie te poziomy sterowania tworzą przedstawioną na rys. 13.2 strukturę hierarchiczną od poziomu zarządzania przedsiębiorstwem do sterowania pojedynczym napędem maszyny roboczej. Komunikacja pomiędzy poszczególnymi poziomami sterowania jest dwukierunkowa. Z poziomu wyższego (nadrzędnego) do niższego (podporządkowanego) przekazywane są głównie sygnały sterujące, a w kierunku przeciwnym informacje o stanie pracy urządzenia, ewentualnych awariach oraz informacje statystyczne.

Aby jak najlepiej wykorzystać możliwości produkcyjne przedsiębiorstwa, należy zoptymalizować sterowanie na wszystkich jego poziomach. O ile na najwyższym poziomie przedstawionego układu hierarchicznego jako kryterium optymalizacji przyjmować należy przede wszystkim zasady makro- czy mikroekonomii, to niższe poziomy są coraz silniej związane z problemami techniki. Optymalizacja sterowania na poziomach maszyny roboczej, jej poszczególnych mechanizmów czy napędów odbywa się już w oparciu o kryteria ściśle techniczne, przy czym na ogół im niższy poziom sterowania, tym są one bardziej szczegółowe.

W dalszym ciągu maszyna robocza będzie traktowana jako system elektromechaniczny, w którym można wyodrębnić następujące główne podsystemy funkcjonalne:

- podsystem mechaniczny obejmujący elementy konstrukcyjne, elementy transmisji napędu, organy wykonawcze;
- podsystem napędowy, w którego skład wchodzi przekształtniki energii, przetworniki elektromechaniczne;
- podsystem sterowania i regulacji zawierający układy zadawania, regulacji, czujniki pomiarowe, przetworniki sygnałów.

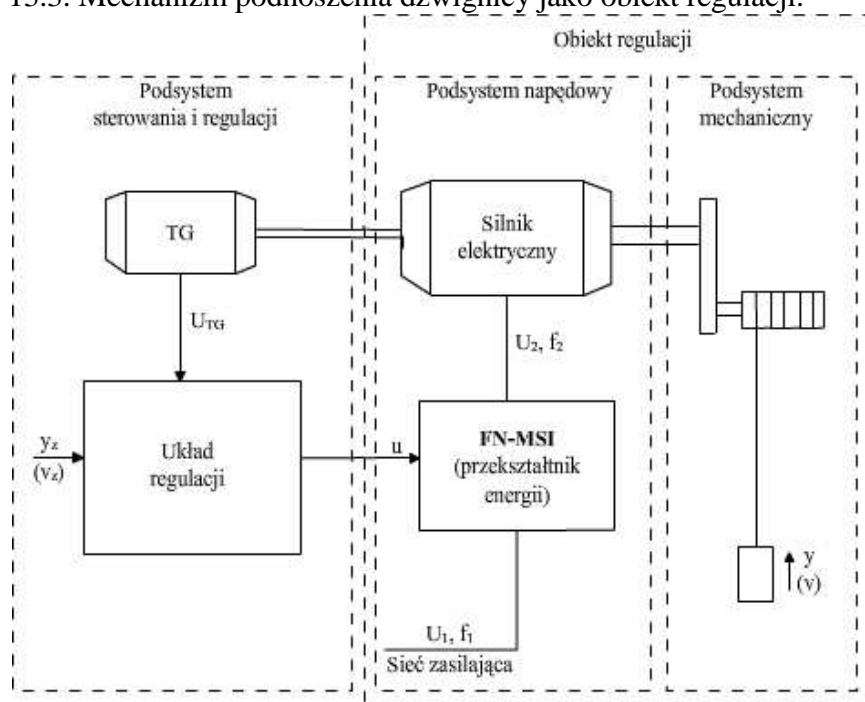
Rys. 13.2. Hierarchiczny system sterowania maszyny roboczej.



Z punktu widzenia teorii sterowania podsystemy mechaniczny i napędowy maszyny roboczej stanowią łącznie obiekt regulacji. Schemat mechanizmu podnoszenia suwnicy, w którym wyodrębniono wymienione powyżej podsystemy przedstawia rys. 13.3. Wielkościami wejściowymi  $u(t)$  do obiektu regulacji są wyjściowe sygnały sterujące z układu regulacji. Wyjściami obiektu regulacji  $y(t)$  są wielkości sterowane, np. prędkość podnoszenia ładunku. Ze względu na liczbę wejść i wyjść (wielkości regulowanych) układy sterowania dzielimy na:

- jednowymiarowe, mające tylko 1 wejście i 1 wyjście,
- wielowymiarowe, mające więcej niż 1 wejście i wyjście, przy czym niektóre lub wszystkie wielkości wejściowe oddziałują na szereg wielkości wyjściowych.

Rys. 13.3. Mechanizm podnoszenia dźwigni jako obiekt regulacji.



Maszyny robocze są na ogół wielowymiarowymi układami sterowania. Przykładowo, przy uwzględnieniu kołysania ładunku sterowanie mechanizmem jazdy suwnicy oddziałuje na przemieszczenie haka suwnicy nie tylko w osi poziomej, ale i pionowej. Stosując uproszczenia, układ wielowymiarowy można niekiedy rozpatrywać jako system niesprzęgniętych z sobą układów jednowymiarowych. W rozpatrywanym przypadku suwnicy przy pominięciu kołysania ładunku można niezależnie sterować przemieszczeniem haka we wszystkich 3 osiach.

Pod względem dynamicznym maszyny robocze są złożonymi układami sterowania, na ogół nieliniowymi i niestacjonarnymi. Jeżeli dla  $t > t_0$  stan układu zależy tylko od stanu w chwili  $t_0$  oraz od sterowania w przedziale  $[t_0, t]$ , obiekt sterowania można opisać równaniem stanu:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (13.26)$$

o danym równaniem (13.23) warunkiem początkowym oraz równaniem wyjścia:

$$y(t) = g[x(t), u(t), t], \quad (13.27)$$

gdzie:  $u(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$  są odpowiednio wektorami wejścia, stanu i wyjścia układu.

W przypadku układów liniowych, stacjonarnych równania (13.26) i (13.27) przyjmują postać zależności (13.21) i (13.22).

W układach sterowania maszyn roboczych najczęściej stosowana jest regulacja nadążna. W tym typie regulacji wielkość regulowana  $y(t)$  nadąża za zmianami wielkości zadającej  $y_z(t)$ , która nie jest z góry funkcją czasu. W niektórych maszynach roboczych stosuje się regulację programową, w której  $y_z(t)$  jest z góry znaną funkcją czasu.

Zasadniczym celem sterowania maszyn roboczych jest zmiana stanu układu z punktu początkowego  $(x_0, t_0)$  do pewnego na ogół założonego punktu w przestrzeni stanu  $(x_1, t_1)$  w określonym (lub minimalnym) czasie i według określonej trajektorii, przy ograniczeniach narzuconych na sygnały sterujące i zmienne stanu. Takim celem może być np. przestawienie ładunku suwnicy z punktu A do B przy ograniczeniach narzuconych na przebiegi prędkości i przyspieszeń.

Ważnym pojęciem w teorii sterowania jest jakość regulacji. Określona jest ona wielkością uchybu regulacji  $e(t)$ , czyli różnicy między wartością zadaną  $y_z(t)$  a rzeczywistą  $y(t)$  wielkością regulowanej w czasie całego okresu działania układu

$$e(t) = y_z(t) - y(t). \quad (13.28)$$

Do najczęściej stosowanych kryteriów jakości regulacji, służących zarówno do oceny, jak i do syntezy układu sterowania, należą:

- kryteria – zapasu stabilności,
- kryteria rozkładu pierwiastków równania charakterystycznego,
- kryteria czasowe,
- kryteria częstotliwościowe,
- kryteria całkowite.

Najbardziej uniwersalnymi – umożliwiającymi ocenę zarówno jakości regulacji w stanie ustalonym, jak i nieustalonym – są kryteria całkowite, mające postać funkcjonałów:

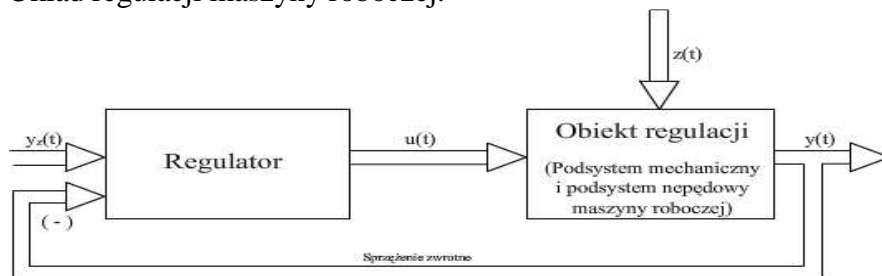
$$I = \int_0^{t_f} f(t, e, \dot{e}, \ddot{e}, \dots) dt, \quad (13.29)$$

np. 
$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) dt. \quad (13.30)$$

Niska jakość układu sterowania napędu mechanizmu jazdy suwnicy może np. doprowadzić do jej ukosowania (uchybnie zadanej trajektorii ruchu) lub być przyczyną powstania drgań w układzie napędowym. Jakość regulacji jest jednym z podstawowych czynników decydujących o doborze elementów podsystemu napędowego oraz metody sterowania i struktury układu sterowania. Należy tutaj brać pod uwagę takie wymagania jak szybkość działania układu, dokładność regulacji, eliminację drgań układu. W syntezie układu sterowania konieczne jest oczywiście uwzględnienie właściwości dynamicznych podsystemu mechanicznego, określonych przez takie parametry jak masowe momenty bezwładności, częstości drgań własnych i luzu.

W celu uzyskania wysokiej jakości regulacji stosuje się zamknięte układy sterowania. Ogólny schemat zamkniętego układu sterowania maszyny roboczej przedstawiono na rys. 13.4. W nowoczesnych układach sterowania stosuje się korekcję szeregową, w której człon korekcyjny – regulator – znajduje się w głównym torze przepływu sygnałów, szeregowo z obiektem regulacji. Wielkościami wejściowymi regulatora jest wartość zadana  $y_z(t)$  wielkości sterowanej i sygnał proporcjonalny do jej wartości rzeczywistej  $y(t)$ . Regulator według określonego algorytmu przetwarza sygnał błędu regulacji, czyli różnicy między wartością zadaną  $y_z(t)$  a rzeczywistą  $y(t)$  wielkości sterowanych i na tej podstawie ustala sygnał wejściowy  $u(t)$  obiektu regulacji.

Rys. 13.4. Układ regulacji maszyny roboczej.



Wysoka jakość regulacji wiąże się ze zdolnością układu do odtwarzania na wyjściu przebiegu wielkości wejściowych US z jak najmniejszym uchybnem w szerokim zakresie częstotliwości i przy oddziaływaniu zakłóceń  $z(t)$ . Aby to uzyskać, elementy podsystemów napędowego i regulacji powinny cechować następujące właściwości:

- a) przetworniki elektromechaniczne (silniki elektryczne):
  - duża przeciążalność (możliwość rozwinięcia momentu napędowego wielokrotnie większego od jego wartości znamionowej),
  - możliwość uzyskania szybkich zmian momentu napędowego,
  - mały masowy moment bezwładności;
- b) przekształtnik energii (przekształtnik energoelektroniczne):
  - duża przeciążalność prądowa,
  - minimalizacja stałych czasowych;
- c) układ regulacji:
  - wykorzystanie nowoczesnych teorii sterowania,
  - zastosowanie właściwej dla danej maszyny metody sterowania oraz struktury układu sterowania,
  - uzyskanie jak najpełniejszej informacji o stanie obiektu regulacji (np. o aktualnych wartościach, prędkości, momentu napędowego itp.).



## 14. ABS jako przykład urządzenia mechatronicznego

### 14.1. Opis ogólny

Układ elektroniczny zapobiegający blokowaniu kół reguluje ciśnienie hamowania przesłane do kół, uniemożliwiając im utratę przyczepności w każdych warunkach i powierzchni drogi. Układ został zaprojektowany w taki sposób, aby uzupełnić, a nie zastąpić normalny układ hamowania mechanicznego, gwarantując w ten sposób skuteczne zabezpieczenie w przypadku uszkodzenia; uruchomienie zostaje wykonane przy użyciu tego samego płynu hamulcowego jak w tradycyjnym układzie mechanicznym.

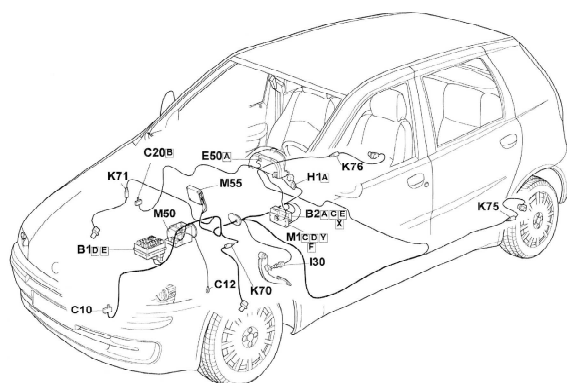
4 czujniki, umieszczone na 4 kołach, sygnalizują w każdej chwili elektronicznej centralce sterującej prędkość każdego koła, rejestrując ich zablokowanie, poślizg i utratę przyczepności. W tych sytuacjach centralka steruje odpowiednio elektrozaworami, które modulują ciśnienie w obwodzie hydraulicznym, eliminując zablokowanie i doprowadzając samochód do granicy przyczepności, co pozwala uzyskać najkrótszą możliwą drogę hamowania, bez utraty kontroli nad kierownicą. Dla każdego koła przewidziane są 2 elektrozawory regulacyjne: jeden do zwiększenia, a drugi zmniejszenia ciśnienia.

Czujniki są typu „aktywnego”, tzn. składają się z elementu czujnikowego wykorzystującego zjawiska Halla, który umieszczony jest naprzeciw pierścienia magnetycznego wbudowanego w łożysko piasty: w tych warunkach sygnał jest mniej narażony na zakłócenia elektromagnetyczne i temperaturę. Ponadto centralka steruje rozdziałem siły hamowania na oś tylną, zastępując mechaniczny konektor hamowania stosowany poprzednio (funkcja „EBD”: Electronic Brake Distribution).

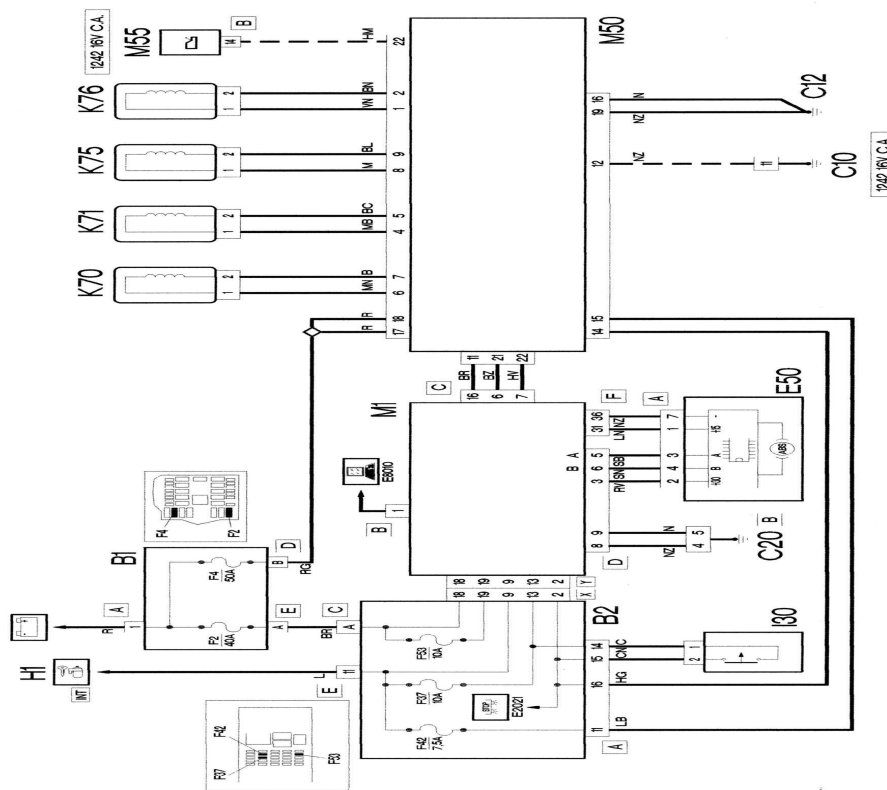
Centralka jest wyposażona w automatyczną diagnozę: kiedy rozpozna uszkodzenie „ABS”, powoduje włączenie odpowiedniej lampki kontrolnej i równocześnie wyłącza system: dlatego w takich warunkach samochód hamuje tylko w układzie tradycyjnym. Kiedy centralka rozpozna uszkodzenie funkcji „EBD”, powoduje włączenie lampki sygnalizacyjnej „uszkodzenia ABS”, lampki sygnalizacyjnej niskiego poziomu płynu hamulcowego i zaciągniętego hamulca postojowego.

Obwody zasilające centralkę i różne elementy układu (czujniki oraz siłowniki) są zabezpieczone przez odpowiednie bezpieczniki maxifuse, umieszczone w zaciskach centralki.

Rys. 14.1. Rozmieszczenie elementów układu ABS w samochodzie.



Rys. 14.2. Schemat blokowy układu.



## 14.2. Zasada działania

Centralka elektroniczna ABS **M50** jest zasilana (na stykach 17 i 18) bezpośrednio z akumulatora przez przewód zabezpieczony bezpiecznikiem głównym maxifuse ABS **F4**, umieszczonym w skrzynce bezpieczników w komorze silnika **B1**. Centralka jest połączona do masy na stykach 19 i 16. 4 czujniki **K70**, **K71**, **K75**, **K76** wysyłają odpowiednio sygnały o prędkości kół na styki 6-7, 4-5, 8-9 i 1-2 z **M50**.

Wyłącznik pedału hamulca **130** przesyła sygnał zgody na styk 14 centralki **M50**: zostaje on wyłączony przy każdym uruchomieniu układu ABS, jeżeli nie zostanie naciśnięty pedał hamulca; sygnał ten przesyłany jest poprzez wyłącznik zapłonu (INT) w obwodzie zabezpieczonym bezpiecznikiem **F37** w skrzynce bezpieczników pod deską rozdzielczą **B2** (jest to ten sam sygnał, który powoduje zapalenie świateł).

Centralka ABS jest również zasilana „pod kluczykiem” przez obwód zabezpieczony bezpiecznikiem **F42** na styk 15-tej centralki. Jeśli centralka ABS rozpozna sygnały o ewentualnych uszkodzeniach, sygnalizuje to komputerowi, który z kolei wysyła je do zestawu wskaźników **E50**, aby włączyć lampkę sygnalizacyjną „uszkodzenia ABS”, poprzez linię CAN ze styków 5 i 6 korektora D.

Centralka ABS **M50** ze styków 11, 21 i 22 przeprowadza dialog z komputerem **M1** (styki f17 i 16 korektora C), a w przypadku jeśli wystąpi uszkodzenie, powoduje zapalenie się odpowiedniej lampki sygnalizacyjnej „ABS”. Komputer **M1** jest zasilany zarówno „pod kluczykiem”, jak również bezpośrednio odpowiednio na styki 11 konektora E i styk A korektora C skrzynki bezpieczników pod deską rozdzielczą **B2**.

Obwody te zabezpieczone są odpowiednio bezpiecznikami **F7** i **F5**, dla zabezpieczenia obwodu zasilania bezpośredniego występuje oddzielny bezpiecznik **F2**, znajdujący się w skrzynce bezpieczników w komorze silnika **B1**. Styki 8 i 9 korektora

D są natomiast połączone do masy B. W wersji z automatyczną skrzynią biegów centralka ABS **M50** wyposażona jest w 2 dodatkowe połączenia: styk 12 połączony jest z masą, a styk 22 z centralką automatycznej skrzyni biegów **M55**, na styku 14 korektora B.

### 14.3. Regulatory ciśnienia

Układ hamulcowy jest dwuobwodowy krzyżowy, co w przypadku awarii jednego z obwodów umożliwia hamowanie zawsze po obu stronach samochodu. Każdy obwód działa na koło przednie i koło tylne położone po przekątnej.

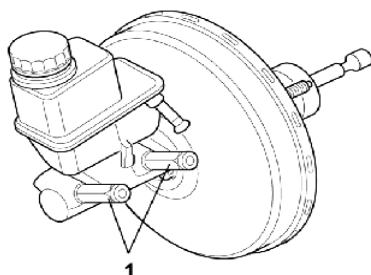
We wszystkich wersjach jest zamontowane urządzenie wspomagające 9'. W wersjach benzynowych przewód podciśnienie – urządzenie wspomagające jest połączony z syfonem kolektora ssącego w celu uniknięcia pojawienia się w układzie oparów benzyny. Pompa hamulcowa jest wykonana z aluminium w celu zmniejszenia ciężaru.

Wersje benzynowe bez ABS posiadają zamontowane wprost na korpusie pompy hamulcowej 2 regulatory stałości ciśnienia. Są one niezbędne w układzie hamulcowym typu krzyżowego. Regulatory ciśnieniowe umożliwiają uniknięcie blokowania kół tylnych, kiedy obciążenie samochodu podczas hamowania przenosi się za oś przednią.

Wersje diesel i ze skrzynią automatyczną bez ABS posiadają korektor hamowania i zmiennym obciążen. Zamocowany jest on w tylnej części nadwozia. Przednie hamulce są tarczowe; tarcze hamulcowe chłodzone dla wersji HGT i 1900 JTD. Hamulce tylne bębnowe (tarcze dla wersji HGT); a zaciski hamulcowe są typu pływającego Bendix5, Teves i Lucas Colette 2.

W położeniu spoczynkowym sprężyna regulatora ciśnienia dociska tłoczek w głąb cylindra, czyli do ścianki komory wyjścia. Aż do ciśnienia 30 kg/cm<sup>2</sup>, ciśnienie wyjściowe (pu) jest równe ciśnieniu wejściowemu (pe). Wzrost ciśnienia wejściowego, działając na tłoczek, powoduje jego przemieszczenie, pokonując opór sprężyny. Rośnie objętość komory wyjściowej. W wyniku tego maleje ciśnienie w obwodzie tylnym, w stosunku 0,25 dla każdego koła.

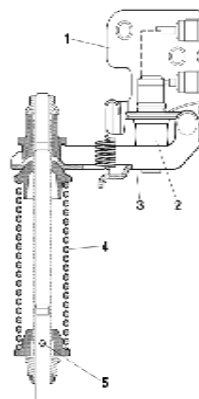
Rys. 14.3. Regulatory ciśnienia, 1 – regulatory ciśnienia.



#### 14.4. Korektor hamowania

Korektor hamowania kół tylnich zamocowany jest do wspornika na podłodze tylnej, koryguje ciśnienie hamowania w układzie hamulcowym kół tylnich w funkcji stanu obciążenia oraz zmniejszenia prędkości przez samochód. Zmiana ciśnienia zależy od położenia przyjmowanego przez ciągnio, co zmienia napięcie sprężyny, połączone z mostkiem skrętnym, który oddziałuje na tłok korektora. Ciśnienie korektora 30 kg/cm<sup>2</sup> reduktor wynosi 0,30 dla każdego koła.

Rys. 14.4. Korektor hamowania.



1) korektor hamowania, 2) tłok, korektora 3) ciągnio, 4) sprężyna, 5) śruba regulująca napięcie sprężyny

#### 14.5. Kontrola układu

Wersja HGT do kontroli jest wyposażona oprócz ABS także w funkcję TCS (traction control system). Oprócz normalnych funkcji realizowanych przez ABS 5.3 wersje wyposażone w TCS posiadają także funkcję zapobiegającą ślizganiu się kół.

Funkcja przeciwpoślizgowa TCS zostaje uruchomiona przy prędkości samochodu poniżej 40 km/h w przypadku poślizgu spowodowanego przez:

- ruszanie z miejsca,
- gwałtowne przyspieszenie,
- utratę przyczepności (nawierzchnia pokryta śniegiem, gliną itd.),
- włączenie automatyczne (zanim kierowca naciśnie na pedał hamulca), sterując hamulcami kół napędowych.

W przypadku ślizgania się obu kół napędowych zostaje modulowane działanie hamulców kół napędowych. Centralka wyłącza funkcję przeciwpoślizgową TCS przy temperaturze płynu hamulcowego powyżej 400°C i ponownie ją włącza, gdy temperatura się zmniejszy poniżej 250°C. Przekroczenie tej temperatury zostaje zapamiętane w centralce. Ta wartość temperatury uzyskiwana jest przez przetwarzanie różnych parametrów związanych z obciążeniem zacisków hamulców itd.

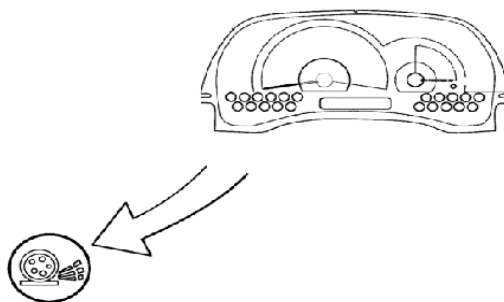
Lampka sygnalizacyjna na zestawie wskaźników sygnalizuje:

- wyłączenie TCS – lampka świeci się światłem ciągłym,
- włączenie TCS – lampka pulsuje.

Przycisk umożliwia wyłączenie funkcji zapobiegającej ślizganiu się TCS, co sygnalizowane jest zapaleniem się diody LED znajdującej się w przycisku.

Uwaga: Przy każdym uruchomieniu silnika zostaje włączona funkcja TCS.

Rys. 14.5. Kontrolka układu ABS.

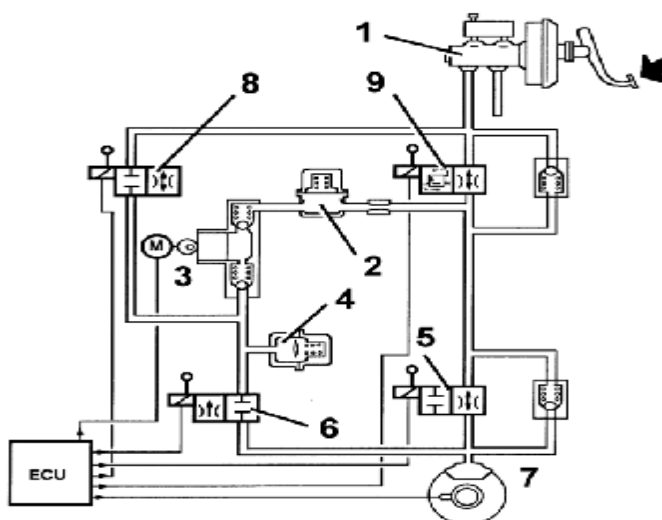


W wersji wyposażonej w TCS zespół elektrohydrauliczny posiada 4 dodatkowe elektrozawory (2) i (3), które służą do sterowania hamowaniem w przypadku ślizgania się kół.

Przy naciśniętym pedale hamulca centralka elektroniczna:

- nie zasilana napięciem elektrozaworu (nc)(2),
- nie zasilana napięciem elektrozaworu (nc)(3).

Rys. 14.6. Działanie podczas hamowania.



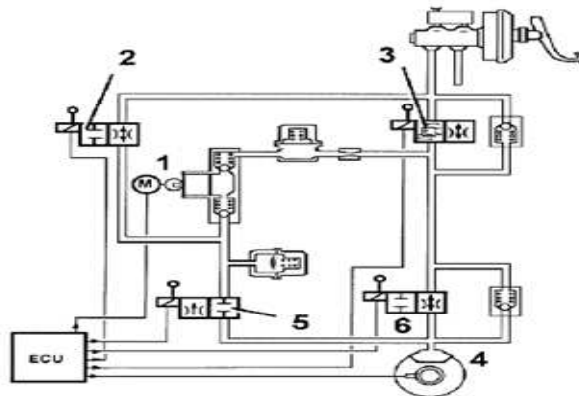
- 1) pompa hamująca, 2) elektrozawór ssący, 3) elektrozawór sterujący, 4) pompa, 5) elektrozawór wlotu, 6) elektrozawór wylotu.

W przypadku ślizgania się kół napędzających centralka elektroniczna składa się:

- zasilana napięciem pompę zespołu hydraulicznego (1),
- zasilana napięciem elektrozaworów (nc)(normalnie zamknięty) (2),
- zasilana napięciem elektrozaworów (nc)(normalnie otwarty) (3).

Następnie płyn pod ciśnieniem generowanym przez pompę (1) dopływa do zacisku hamulcowego poprzez elektrozawór (6). Ciśnienie sterujące zaciskiem hamulcowym jest modulowane poprzez elektrozawory (5) i (6).

Rys. 14.7. Działanie TCS.



1) pompa, 2) elektrozawór ssący, 3) elektrozawór sterujący, 4) zacisk hamulcowy, 5) elektrozawór wlotu, 6) elektrozawór wylotu.

ABS składa się z centralki elektronicznej (1) i centralki elektromagnetycznej (2).

Centralka elektroniczna spełnia następujące funkcje:

- gromadzi dane przesyłane przez „aktywne” czujniki obrotu koła,
- zapamiętuje parametry określone podczas regulacji samochodu,
- zapamiętuje software regulacji,
- przetwarza otrzymane informacje,
- kontroluje proces hamowania,
- rozpoznaje uszkodzenia elementów układu hamulcowego,
- zapamiętuje kody urządzenia i włącza lampki sygnalizacyjne ABS i EBD,
- przesyła i odbiera informacje za pośrednictwem gniazdka diagnostycznego.

Centralka elektrohydrauliczna składa się z:

- 12 zaworów dwudrożnych,
- elektrycznej pompy wtórnego obiegu dla 2 obwodów hydraulicznych,
- 2 zasobników niskiego ciśnienia,

Jej zadaniem jest modulacja ciśnienia płynu hamulcowego w zaciskach hamulcowych przy pomocy elektrozaworów w fazach:

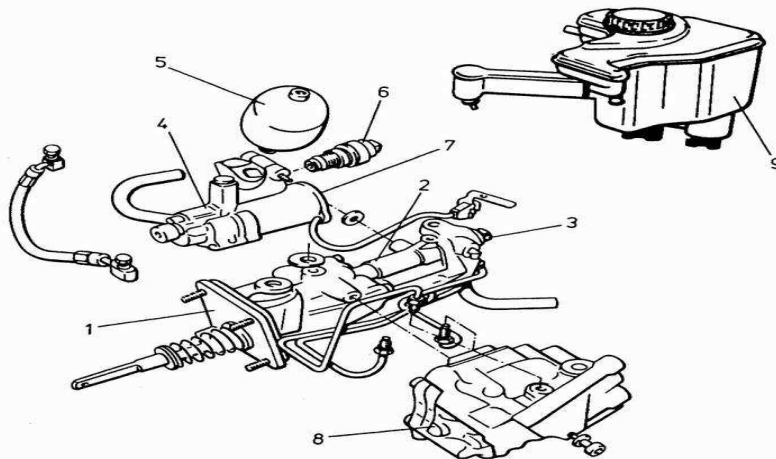
- zwiększenia ciśnienia płynu hamulcowego,
- utrzymania ciśnienia płynu hamulcowego,
- zmniejszenia ciśnienia płynu hamulcowego,

#### 14.6. Obwód hydrauliczny

Obwód hydrauliczny, w którym znajduje się płyn hamulcowy, służy do regulowania ciśnienia płynu i przekazywania go do zacisków hamulcowych. Składa się on z:

- obwodu wysokiego ciśnienia,
- obwodu urządzenia wspomagającego hamulce,
- obwodu hydraulicznego zespołu sterującego.

Rys. 14.8. Elementy obwodu hydraulicznego.



- 1) urządzenie wspomagające hamulce, 2) pompa hamulcowa, 3) elektrozawór główny, 4) pompa elektryczna, 5) akumulator ciśnienia, 6) wyłącznik ciśnieniowy, 7) silnik pompy elektrycznej, 8) hydrauliczny zespół sterujący, 9) zbiornik płynu hamulcowego.

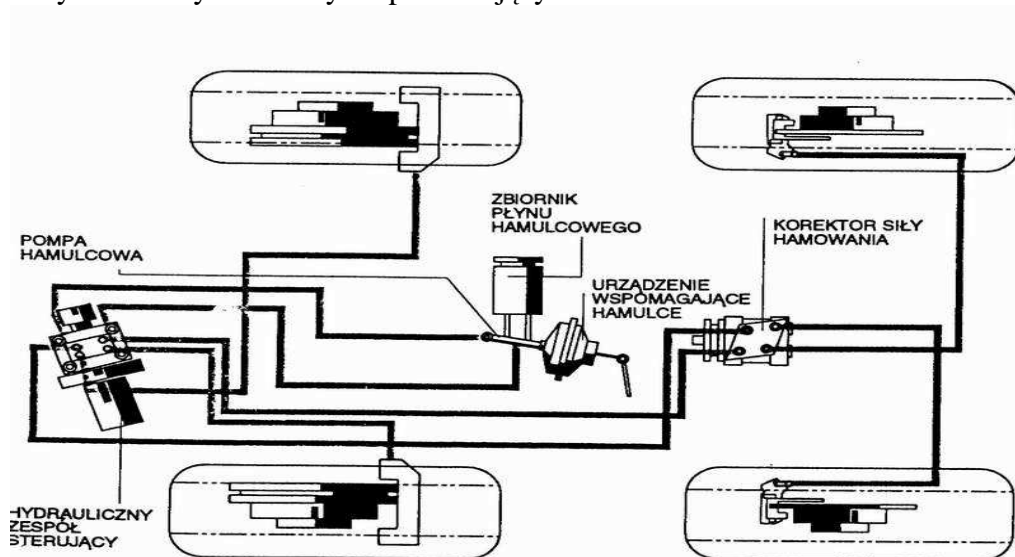
Każdy z 2 wylotów pompy hamulcowej jest połączony przez hydrauliczny zespół sterujący z 1 kołem przednim i 1 kołem tylnym.

Elektrozawory umieszczone w hydraulicznym zespole sterującym pracują w 3 fazach:

- 1 – fazie wzrostu ciśnienia,
- 2 – fazie utrzymania stałej wartości ciśnienia,
- 3 – fazie zmniejszenia ciśnienia.

Elektrozawory są sterowane przez elektroniczny zespół sterujący na podstawie sygnałów elektrycznych.

Rys. 14.9. Hydrauliczny zespół sterujący.



## 15. O zastosowaniu mikrokontrolerów w mechatronice

Urządzenia mechatroniczne są uzbrojone w sterowanie mikroprocesorowe, które najczęściej wypełnia mikrokontroler. Mikrokontrolery spełniają funkcję usprawnienia dokładności wykonywanych funkcji oraz szybkości przeprowadzonych działań i synchronizacji w łańcuchu ścieżek operacji.

Rozwój technologii mikroprocesorowej wiąże się z rozwojem technologii układów scalonych, gdy możliwe stało się umieszczanie setek tysięcy tranzystorów w jednym układzie.

Był to pierwszy krok w produkcji mikroprocesorów. Po dodaniu urządzeń zewnętrznych peryferyjnych – jak pamięć, linie wejścia/wyjścia, timery i inne – tworzono pierwsze komputery. Zwiększenie skali integracji, a więc ilości tranzystorów umożliwiło łączenie w jednym układzie zarówno procesora, jak i urządzeń peryferyjnych. Były to właśnie początki mikrokontrolerów (MCU). Mikroprocesor jest „sercem” mikrokomputera, a także mikrokontrolera, który również ma w jednym układzie scalonym wbudowane wszystkie konieczne urządzenia peryferyjne. Korzystanie ze specjalizowanych mikrokontrolerów przy projektowaniu urządzeń daje oszczędność czasu i miejsca.

„Inteligencja” mikrokontrolera wiąże się z jego oprogramowaniem. Narzędziem programowania może być assembler – język maszynowy, lub kompilator. Różnią się one od typowych kompilatorów, ponieważ kod programu, który tworzymy na komputerze PC, jest przeznaczony do uruchomienia na innym mikroprocesorze i dlatego wykorzystuje zestaw instrukcji właśnie tego procesora.

Inna różnica w tworzeniu programu dla mikrokontrolerów polega na ograniczeniu rozmiarów tych programów. Rozmiary programów przeznaczonych dla komputerów PC mierzone są często w megabajtach. W przypadku mikrokontrolerów sytuacja wygląda inaczej, gdyż rozmiar pamięci programu jest często elementem krytycznym, decydującym o koszcie. Dla systemów wbudowanych, jakimi są mikrokontrolery, rozmiary względnie skomplikowanych programów zawierają się zazwyczaj w zakresie (1...64) kB.

Producenci mikrokontrolerów dostarczają także Zintegrowane Środowiska Rozwojowe IDE (Integrated Development Environment) do tworzenia i testowania kodu programu, do tworzenia kodu wykonywalnego (operacja Build), a także do przesyłania tego kodu na mikrokontroler. Ta ostatnia operacja określana jest także jako programowanie. Stanowi ją „wypalanie” szesnastkowego kodu w pamięci mikrokontrolera, którą najczęściej jest pamięć flash.

Przy tej operacji można także posługiwać się dodatkowym sprzętem (programatorem), dostosowanym do danego typu  $\mu$ C. Wypalanie kodu może być też dokonane fabrycznie podczas procesu produkcji danego urządzenia. Innym sposobem programowania jest wykorzystanie niewielkiego programu rezydującego na płycie, tzw. Bootloadera.

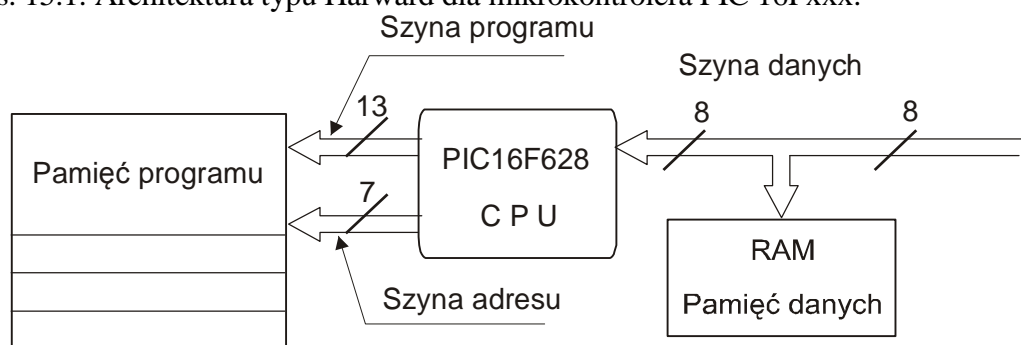
Większość wielkich korporacji elektronicznych produkuje dziś mikrokontrolery. Producentami są m.in. Atmel Inc, Freescale Semiconductors Inc, Maxim-Dallas Inc, Renesas Technology Corp., Microchip Technology Inc., która ogłosiła przekroczenie ilości 17 miliardów sprzedanych mikrokontrolerów, firmy: STMicroelectronics, Analog Devices, Texas Instruments i wiele innych, przede wszystkim amerykańskich oraz japońskich.



Do bardziej rozpowszechnionych należą mikrokontrolery z rodziny PIC16xxx, która charakteryzuje się szybkością działania do 20 MHz, co w zupełności wystarcza w większości układów. Mają one także wbudowaną pamięć programu flash, która może być wielokrotnie przeprogramowywana w oparciu o protokół ICSP (In Circuit Serial Programming).

Procesory PIC mają architekturę typu Harvard. Charakterystyczną jej cechą jest rozdzielenie przestrzeni adresowej pamięci programu od przestrzeni adresowej pamięci danych. Zostało to uzyskane dzięki oddzieleniu magistrali adresowych, co pokazano na rys. 15.1).

Rys. 15.1. Architektura typu Harvard dla mikrokontrolera PIC 16Fxxx.



W odróżnieniu od tradycyjnej architektury Von Neumanna, gdzie użyta jest wspólna dzielona szyna danych i programu, architektura harwardzka ma odseparowaną szynę danych i szynę programu (patrz rys. 15.1). PIC operuje słowem 8-bitowym po stronie danych, natomiast pamięć programu może mieć słowa 8-, 12-, 14- lub 16-bitowe. Biorąc za punkt wyjścia szynę danych, mikrokontrolery PIC zalicza się do procesorów 8-bitowych.

Architektura mikrokontrolera PIC należy do grupy układów RISC (Reduced Instruction Set Computer) w odróżnieniu od grupy CISC (Complex Instruction Set Computer), do której należą mikrokontrolery serii 8051. Mikrokontroler PIC realizuje potokowy system procesowania komend (pipeline), w którym procesor podczas wykonywania kolejnej komendy pobiera z pamięci następną. W jednym taktie zegarowym jest wykonywany jeden rozkaz. Daje to pewną przewagę szybkości układom z grupy RISC.

Programy dla mikrokontrolerów PIC, charakteryzujących się zredukowaną liczbą rozkazów RISC, mają większą spójność kodu i ostatecznie osiąga się mniejszy kod wynikowy.

W mikrokontrolerze PIC zastosowana została koncepcja rejestrów RFC (Register File Concept), co oznacza, że wszystkie rejestry specjalne SFR (Special Function Register) umieszczone są w pamięci RAM i są dostępne na równi z innymi komórkami pamięci tak w adresowaniu bezpośrednim, jak i pośrednim.

Mikrokontrolery jednoukładowe są to autonomiczne systemy mikroprocesorowe w formie pojedynczego układu scalonego, zawierające wszystkie podstawowe bloki dodatkowe, niezbędne do realizowania funkcji sterowania. Mikrokontrolery są obecnie stosowane w wielu układach powszechnego użytku, takich jak samochody, aparaty fotograficzne, pralki, telewizory, przyrządy pomiarowe, układy automatyki

budynkowej, urządzenia telekomunikacyjne i inne. Podstawowe cechy mikrokontrolerów jednoukładowych zdecydowały o ich szerokim rozpowszechnieniu, a to dzięki:

- realizacji względnie skomplikowanych funkcji logicznych, co ułatwia automatyzację i uproszczenie obsługi wielu urządzeń mechatronicznych;
- niskim kosztem wytwarzania, dzięki czemu znajdują zastosowanie w znaczącej grupie wyrobów powszechnego użytku;
- możliwości zastosowania jako podukłady do sterowania manipulatorami.

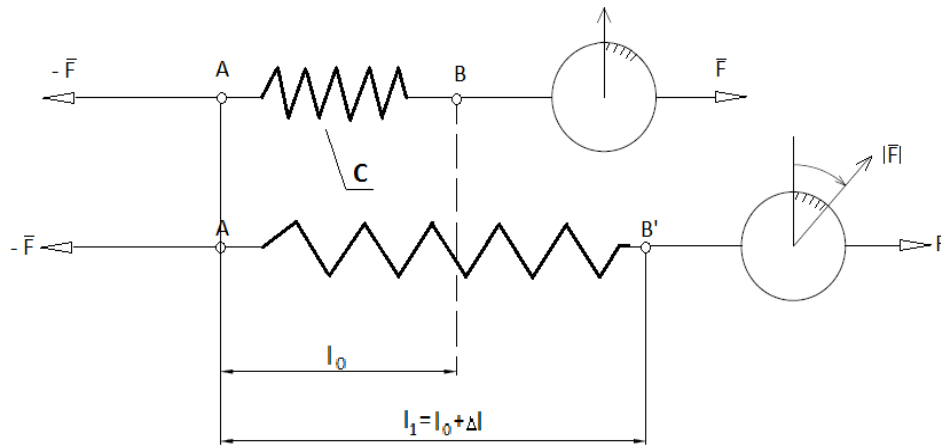
Mikrokontrolery są dzisiaj potężnym środkiem przekraczania technicznych barier rozwoju wyrobów rynkowych we wszystkich dziedzinach techniki. Są dostępne dla każdego projektanta urządzeń rynkowych. Bariere zastosowania stanowić może tylko brak wiedzy i umiejętności ich programowania oraz sterowania.

Do projektowania i konstrukcji współczesnych urządzeń mechatronicznych, specjalizowanych sterowników czy robotów, wiedza o zastosowaniach mikrokontrolerów jednoukładowych jest niezbędna, gdyż to one wypracowują sygnały sterujące na podstawie sygnałów z sensorów monitorujących otoczenie i logiki przemyślanej przez projektanta. Informacje zawarte w książce pozwalają wejść w świat współczesnej automatyki, robotyki i mechatroniki zarówno studentom początkującym, jak również poszerzyć wiedzę tych, którzy szukają rozwiązań problemów technicznych pojawiających się we własnych projektach.

Wiedza o mikrokontrolerach jednoukładowych 8-bitowych jest ogromnie pomocna, gdyż większość funkcji sterujących można zrealizować właśnie za pomocą tych prostych i łatwych do aplikowania mikrokontrolerów. Mimo że na rynku są obecnie dostępne mikrokontrolery 16-bitowe, a również rozszerza się krąg ich 32-bitowych kontrolerów o zwiększonej mocy obliczeniowej, to jednak są one bardziej skomplikowane i droższe. Składa się na to wiele czynników, jak np. 100 wyprowadzeń koniecznych do wlutowania, narzucone rygory technologiczne, a związane z miniaturyzacją (zastosowanie rastru 0,4 mm). Użycie ich w aplikacjach jest z pewnością trudniejsze, a ich programowanie w języku wyższego poziomu oddala programistę od sprzętu, co w niektórych przypadkach nie jest korzystne. Determinuje to zastosowanie do układów prototypowych prostszych procesorów. W większości zastosowań mikrokontrolery jednoukładowe 8-bitowe pozostają lepszą alternatywą dla wszelkiego rodzaju zastosowań automatyki.

## 16. Generalna klasyfikacja zmiennych układu dynamicznego

Rys. 16.1. Topologia pomiaru zmiennych: intensywnej  $F$ , i ekstensywnej  $\Delta l$ .  $c$  – charakterystyka sprężyny (sztywność sprężysta).



### 16.1. Klasyfikacja zmiennych elementów modelu

Każdy element modelu układu dynamicznego może być traktowany jako związek pomiędzy parami punktów w przeprowadzonym pomiarze zmiennych badanego układu fizycznego. We wszystkich przypadkach jeden z pomiarów dotyczy zmiennej ekstensywnej –  $T$ , a drugi zmiennej intensywnej –  $P$ . Fizyczne prawa (równania konstytutywne) uwidaczniają, że wszystkie obiekty utworzone z modeli dynamicznych elementów są określone związkami między zmiennymi: ekstensywną  $T$  i intensywną  $P$ . Przykładowo, sprężyna (rys. 16.1) jest definiowana jako relacja między zmienną intensywną, czyli wartością wektora siły  $F$  wywołującej rozciąganie a zmienną ekstensywną, czyli wywołanym przyrostem wydłużenia sprężyny o wartość  $\Delta l$ . Związek ten wartościuje charakterystyka sprężyny określona jej sztywnością  $c$  [N/m].

Związek ten zapisujemy w postaci:

$$F = -c \cdot \Delta l. \quad (16.1)$$

Elementy (wielocząłony, człony) modelu układu dynamicznego nie są zwykle bezpośrednio związane z pomiarami na obiektach fizycznych, jak może to być w przypadku prostych układów technicznych utworzonych ze sprężyn o znanych charakterystykach i ciał stałych o znanych masach i masowych momentach bezwładności. Ogólne charakterystyki dynamiczne analizowanych obiektów fizycznych, dla których tworzymy model dynamiczny, bazują jednak ostatecznie na koncepcji pochodzącej z pomiarów. Wyznacznikami tych pomiarów będą ustalone pary punktów w przestrzeni.

Rodzaje zmiennych dynamicznych intensywnych i ekstensywnych używanych przy modelowaniu układów fizycznych umożliwiają określenie przepływającej energii. W przypadku kiedy zmienna biegunowa albo ekstensywna jest prędkością, iloczyn skalarowy  $\vec{F} \cdot \vec{v}$  charakteryzuje moc przekazywaną przez element układu dynamicznego.

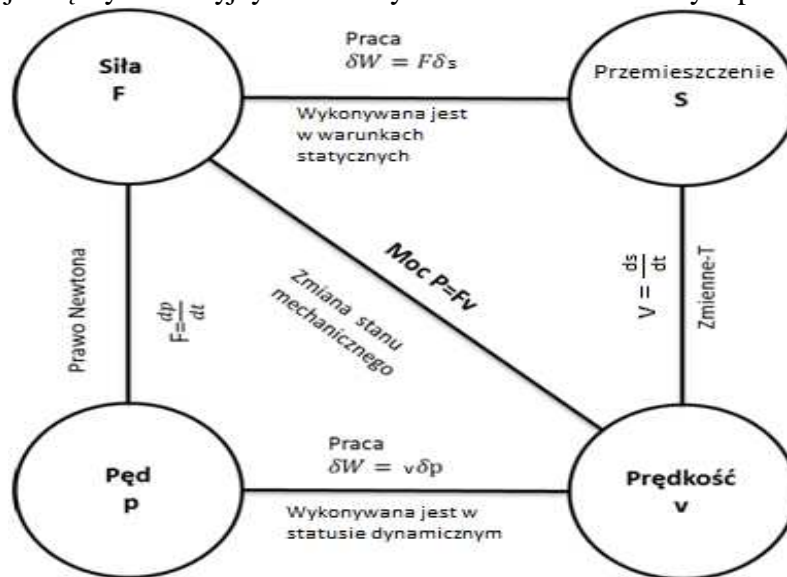
Ilościową miarą bezwładności punktu materialnego, a ogólnie obiektu, jest jego masa. Sprężystością (elastycznością) danej konfiguracji członu, np. sprężyny, jest jej sztywność. W ruchu translacyjnym pierwszy stan będziemy nazywać kinetycznym (dynamicznym), a drugi statycznym.

Relacje między mechanicznymi zmiennymi układu będą uzależnione od przyrostu wykonanej pracy albo mocy chwilowej. W układach mechanicznych wyróżniamy ruch translacyjny i obrotowy (rotacyjny). W konsekwencji wyróżniamy 2 zmienne intensywne: wartość siły  $F$  i moment obrotowy  $M$ , oraz 2 zmienne ekstensywne: przemieszczenie  $s$  i przyrost kąta obrotu  $\varphi$ . Pochodne tych zmiennych (ekstensywnych) to prędkości  $\bar{v}$  i prędkości kątowej  $\bar{\omega}$ .

$$P = \bar{F} \cdot \bar{v} + \bar{M} \cdot \bar{\omega}. \quad (16.2)$$

Przedstawienie relacji między 4 translacyjnymi zmiennymi mechanicznymi układu: wartością siły  $F$ , przemieszczeniem  $s$ , prędkością  $v$  i pędem  $p$  podstawiono na rys. 16.2.

Rys. 16.2. Relacje między translacyjnymi zmiennymi układów mechanicznych przez MacFlarne.



## 16.2. Klasyfikacja pod względem lokalnego stanu energetycznego

W mechanice wyróżniamy ruch translacyjny i rotacyjny bądź kombinację tych ruchów. W ogólnym przypadku może zaistnieć ruch ogólny ciała sztywnego, który jest sumą ruchu translacyjnego i kulistego. W przypadku translacyjnego ruchu układu mechanicznego zmiennymi opisowymi są przemieszczenie, prędkość, pęd i siła.

Odpowiednie relacje między tymi wielkościami opisują zależności:

$$d\bar{p}/dt = \bar{F} \quad i \quad ds/dt = \bar{v}, \quad (16.3)$$

gdzie: wektor pędu  $\bar{p} = m\bar{v}$ .

W przypadku ruchu obrotowego zmiennymi opisowymi są: przemieszczenie kątowe  $\varphi$ , prędkość kątowa  $\omega$ , kręt  $K_0$  i moment obrotowy  $M_0$ . Odpowiednie relacje między tymi wielkościami opisują zależności:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0 \quad i \quad \frac{d\varphi}{dt} = \bar{\omega}, \quad (16.4)$$

gdzie wektor krętu jest momentem pędu, czyli:

$$\bar{K}_0 = \bar{r} \times m\bar{v}. \quad (16.5)$$

Aby zbadać obiekt fizyczny, należy ustalić zmienne stanu, dokonać podziału tych zmiennych i opisać interakcje elementów, a także intensywność przepływu przez nie chwilowej mocy.

## 17. Mechatronika – nauka czy technologia?

**Nauka** to autonomiczna część kultury służąca wyjaśnieniu funkcjonowania świata, w którym żyje człowiek. Rozwijana jest wyłącznie za pomocą metod naukowych, nazywanych też paradygmatami nauki, a także poprzez działalność badawczą i publikacyjną. Dzięki badaniom naukowym poznanie jest bardziej niezawodne, gdyż obejmuje coraz więcej zjawisk na drodze do **odkrywania prawd: o materii, procesach, zasadach i teoriach.**

Badania naukowe i stały proces kumulowania wiedzy może prowadzić do rozwinięcia bądź odrzucenia istniejących teorii, a wprowadzenia nowych dyscyplin takich jak **mechatronika.**

**Technologia** to z kolei naukowa lub techniczna zdolność, która może być użyta w więcej niż 1 produkcie lub usłudze. Według prof. Jana Miodka, elementem przyciągającym w pojęciu **technologia** jest „uczona” częśćka *-logia*, dodająca zwykłym działaniom technicznym stylistycznego blasku.

Prof. Maciej Sysło jest zwolennikiem pojęcia **technologii informacyjnej** – rozumianego jako nowa dziedzina, znacznie wykraczająca swoim zakresem poza tradycyjnie rozumianą informatykę. Jest ona zespołem środków, narzędzi i innych technologii, służących wszechstronnemu posługiwaniu się informacją. Obejmuje swoim zakresem m.in. informację, komputery, informatykę i komunikację, jest zatem połączeniem zastosowań informatyki z wieloma innymi technikami pokrewnymi.

W państwach Wspólnoty Europejskiej funkcjonuje określenie **technologia informacyjna i komunikacyjna**, w którym informacja jako obiekt podlegający działaniu, i komunikacja – jako przeznaczenie informacji i cel działania technologii zostają zrównane.

W takim rozumieniu przypomnijmy, że **mechatronika to synergiczne współdziałanie mechaniki, elektroniki oraz technologii informacyjnej i komunikacyjnej.**

## 18. Od mechatroniki do mikro-, nano- i mikro-nano-technologii

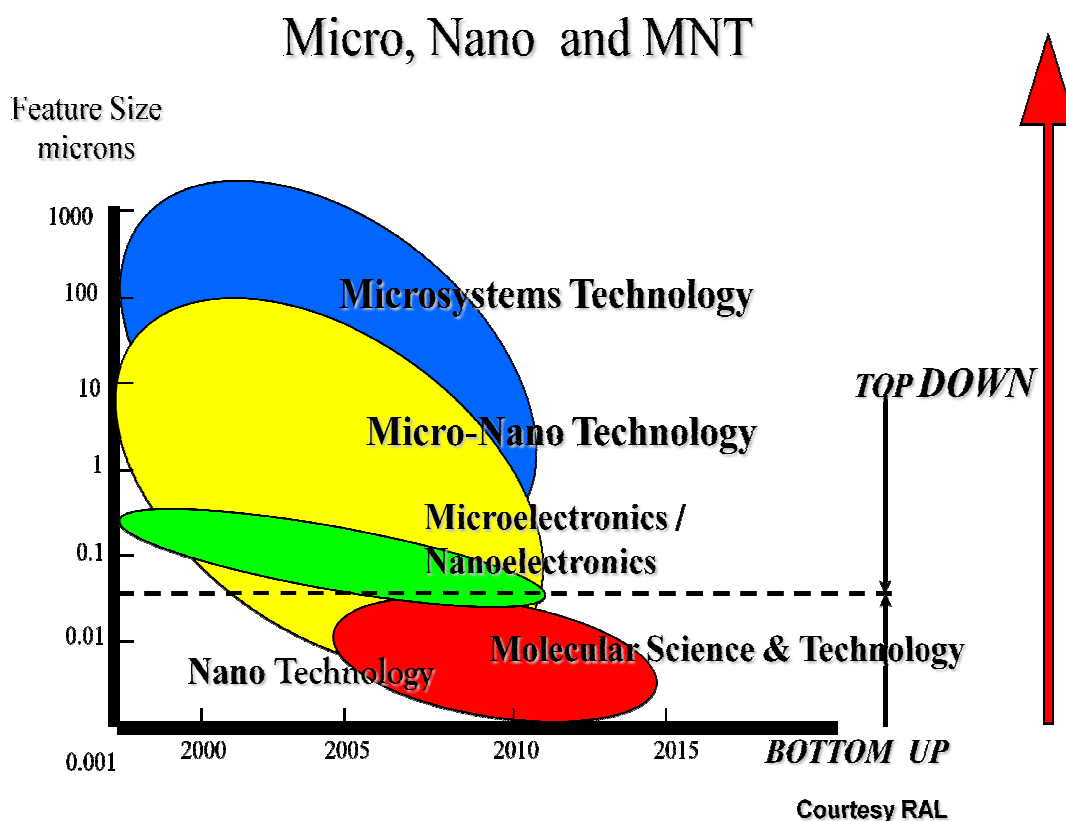
**Mechatronika** to synergiczna kombinacja precyzyjnej inżynierii mechanicznej, elektronicznego sterowania oraz systemów myślenia w projektowaniu produktów i procesów wytwarzania.

**Mikrotechnologia** zajmuje się wytwarzaniem urządzeń o rozmiarach milimetrowych wielkości, zgodnie z zasadami świata mikronów i nano-wielkości, metodą usuwania materiału i drogą kształtowania milionów atomów w każdej części.

**Mikro-/nano-technologia** w oparciu o właściwości mikro-/nano- technologii, w skali mikro i makro zastosowań, służy do dalszej miniaturyzacji w wykrywaniu i uruchamianiu funkcji dla mikrosystemów.

**Nano-technologia** (technologia molekularna) dotyczy tworzenia struktur i materiałów w specyficzny sposób – atom po atomie. Teoretycznie, przy pomocy pojedynczych atomów wszystko może być zbudowane.

Rys. 18.1. Postęp miniaturyzacji na początku XXI wieku.



Na rys. 18.1 przedstawiono ewolucję miniaturyzacji struktur ze zobrazowaniem współlistnienia mikro-, nano- i mikro-nano-technologii.

## 19. Dodatek A – Federacja IFToMM a mechatronika

Federacja IFToMM została założona w 1969 roku i dziś – po ponad 40 latach – jej działalność jest nadzwyczaj aktywna, dzięki już trzeciej generacji członków federacji pracujących we wspólnocie IFToMM-u. Znajomość historii IFToMM i tego, jak doszliśmy do obecnej modus operandi daje większą świadomość tożsamości społeczności uczonych rozwijających *teorię mechanizmów i maszyn (TMM)*.

Stowarzyszenie IFToMM powstało jako Międzynarodowa Federacja Teorii Mechanizmów i Maszyn w dniu 29 września 1969 roku w Zakopanem na II Światowym Kongresie Teorii Mechanizmów i Maszyn. Głównymi propagatorami Światowej Federacji IFToMM byli: akademik Ivan I. Artobolevski (ZSRR), prof. Erskine FR Crossley (USA) i prof. Jan Oderfeld (Polska), których głównym celem było ominięcie przeszkód w czasie zimnej wojny w rozwijaniu międzynarodowej współpracy w dziedzinie nauki TMM na rzecz nauki społeczeństwa światowego. Federacja IFToMM rozpoczęła współdziałanie jako rodzina uczonych Teorii Mechanizmów i Maszyn, wśród których możemy określić *ojców-założycieli* IFToMM, którzy podpisali akt erekcyjny, reprezentując narodowe komitety 13 państw: akademik Iwan I. Artobolevski (ZSRR), prof. Erskine FR Crossley (USA), prof. Michael S. Konstantinov (Bułgaria), dr Werner Thomas (GFR), prof. BM Belgaumkar (Indie), prof. Kenneth H. Hunt (Australia), prof. J. Oderfeld (Polska), prof. Jack Phillips (Australia), prof. George Rusanov (Bułgaria), prof. Wolfgang Rossner (NRD), prof. Zeno Terplàn (Węgry), prof. Jammi S. Rao (Indie), prof. Giovanni Bianchi (Włochy), prof. Adam Morecki (Polska), Nicolae I. Manolescu (Rumunia), Leonard Maunder (UK), Douglas Muster (USA) oraz Ilic Branisky (Jugosławia).

Utworzenie Federacji IFToMM było wynikiem zwiększonej aktywności w zakresie współpracy międzynarodowej, a proces ten rozpoczął się w już pod koniec lat 50., co zostało udokumentowane w kilku listach ojców-założycieli, przechowywanych w Archiwum Federacji IFToMM'u.

Przypominamy, że I Światowy Kongres TMM odbył się w 1965 roku w Bułgarii w Warnie, a uchwalono podczas niego, że kongresy TMM będą organizowane co 4 lata w różnych państwach. Zaplanowano, że federacja IFToMM zostanie utworzona podczas II Światowego Kongresu TMM w Polsce w Zakopanem. Kongres ten został uznany za II Światowy Kongres IFToMM'u. W roku 2012 odbył się XIII Światowy Kongres w Meksyku w Guanajuato z udziałem przedstawicieli komitetów narodowych TMM z 47 państw.

Dla uczczenia 40. rocznicy utworzenia federacji IFToMM-u, a także przypomnienia delegatów z 13 państw reprezentujących cały świat mechaniki maszyn w dniu 26 stycznia 2010 roku w Domu Wczasowym Hyrny w Zakopanem odsłonięto tablicę (fot. 1), którą można okazjonalnie zobaczyć.

Społeczność IFToMM odnotowuje ciągły wzrost na przestrzeni minionego czasu, a dyscyplina TMM ewoluowała znacząco, obejmując szeroki zakres nauk technicznych, w tym przyczyniając się do wyodrębnienia nowej dyscypliny, jaką jest mechatronika. Doprowadziło to w 2000 roku do aktualizacji nazwy federacji bez zmiany logo IFToMM jako Międzynarodowej Federacji Promocji Nauki o Mechanizmach i Maszynach (International Federation for the Promotion Mechanism and Machine Science). Zamiast pierwotnej nazwy TMM Federacja proponuje

MMS, czyli naukę o mechanizmach i maszynach (Mechanism and Machine Science), a to w celu podkreślenia nowoczesności i szerszej misji wspólnoty IFToMM w rozwijaniu szeroko rozumianej nauki mechaniki maszyn, a w tym też mechatroniki.

Fot. 1. Pamiątkowa tablica wykonana w brązie (400x600mm) została odsłonięta 26 stycznia roku 2010 na ścianie frontowej DW „Hyrny” Zakopane, ul. Piłsudskiego 20.



Działalność federacji IFToMM wzrosła w wielu aspektach, np. dotyczących afiliacji liczby komitetów narodowych (z 13 komitetów – członków założycieli do 47 w dniu dzisiejszym), wielkości i skali wydarzeń, wielości konferencji na szczeblu krajowym oraz międzynarodowym czy w rozwijaniu MMS poprzez 13 komitetów technicznych, w których uczeni rozwijają poszczególne obszary dyscypliny MMS.

Społeczność federacji IFToMM rozwinęła się od grupy uczonych założycieli z 13 krajów w światową społeczność naukową w 3 generacjach w następujących okresach:

- 1950-1979 – pierwszej generacji: ojcowie-założyciele oraz zaprzyjaźnieni uczeni rozwijający TMM do IV światowego kongresu (4-th IFToMM World Congress w Newcastle-upon-Tyne) w 1975 roku z prof. Maunder jako Przewodniczący Kongresu;
- 1980-1995 – drugiej generacji: młodzi uczeni i studenci wykształceni przez ojców-założycieli i ich starsi zaprzyjaźnieni koledzy, rozwijający TMM aż do IX kongresu w Mediolanie w 1995 roku (9-th World Congress , Milano) z przewodniczącym kongresu prof. Rovettą.
- 1996-do dziś – trzeciej generacji: wykształceni uczeni w dziedzinie MMS w ramach Federacji IFToMM i uczeni z 47 Komitetów Narodowych afiliowanych w IFToMM.

Jako liderów IFToMM należy uznać przewodniczących i sekretarzy generalnych, którzy odegrali wiodące role w kształtowaniu, rozwoju i naukowych sukcesach IFToMM-u. Ich osobowości, autorytety naukowe i twórcze inspiracje we wspólnocie IFToMM



były znaczące i zyskiwały uznanie w naukowym świecie. Prezydentami byli: Ivan I. Artobolevskii (ZSRR), Leonard Maunder (Wielka Brytania), Bernard Roth (USA), Giovanni Bianchi (Włochy), Adam Morecki (Polska), Jorge Angeles (Kanada), Kenneth J. Waldron (USA), Marco Ceccarelli. Sekretarzami generalnymi byli M.S. Konstantinov (Bułgaria), Emil Stanchev (Bułgaria), Adam Morecki (Polska), Adam Morecki (Polska), Elizabeth Filemon (Węgry), L. Pust (CSRS), Tatu Leinonen (Finlandia), Marco Ceccarelli.

Oficerami federacji IFToMM można nazwać przewodniczących komitetów narodowych, przewodniczących stałych komisji i komitetów technicznych oraz członków Rady Wykonawczej. Oni wszyscy jako zaangażowani liderzy, zgodnie z 1. artykułem Konstytucji IFToMM-u, rozwijają misję federacji w promowaniu nauki mechanizmów i maszyn.

Rada Wykonawcza (Executive Council) Międzynarodowej Federacji w Promowaniu Nauki Teorii Maszyn i Mechanizmów – The International Federation for Promotion of Mechanism and Machine Science (IFToMM) w kadencji 1.01.2012-31.12.2015 działa w składzie: Yoshihiko Nakamura (Japan) – prezydent; Veniamin Goldfarb (Russia) – Vice-President; Teresa Zielińska (Poland) – sekretarz generalny; Just Herder (Netherlands) – skarbnik; Shuo Hung Chang (China – Taipei), Jean Pierre Merlet (France), Burkhard Corves (Germany), Juan Antonio Carretero (Canada), Vijay Kumar (U.S.A.), Datong Qin (China – Beijing). Przewodniczącym Polskiego Komitetu Teorii Mechanizmów i Maszyn, a zarazem Polskiego IFToMM-u jest Józef Wojnarowski.

## 20. Dodatek B – jednostki i wybrane stałe fizyczne

Tab. 14.1. Podstawowe jednostki wielkości fizycznych.

	MKS	CGS	
Długość	Metr, m	$10^2$	Centymetr
Masa	Kilogram, kg	$10^3$	Gram
Czas	Sekunda, s	sekunda	
Ładunek	Coulomb, C		---
Siła	Newton, N	$10^5$	Dyna
Energia	Joule, J	$10^7$	Erg
Moc	Watt, W		---
Natężenie prądu elektrycznego	Amper, A		---
Napięcie elektryczne	Volt, V		---
Indukcja elektryczna	C/m <sup>2</sup>		---
Pole elektryczne	Volt/metr		---
Indukcja magnetyczna	Tesla, T	$10^4$	Gauss
Strumień magnetyczny	Weber, We	$10^8$	Maxwell
Natężenie pola magnetycznego	Amper/metr	$4\pi \times 10^{-3}$	Oersted
Opór elektryczny	Ohm, $\Omega$		---
Pojemność elektryczna	Farad, F		---
Indukcyjność	Henry, H		---

Tab. 14.2. Wybrane stałe fizyczne.

Prędkość światła	$3.00 \times 10^8$	Metr/sekunda
Prędkość dźwięku w suchym powietrzu	331	Metr/sekunda
Stała grawitacji	$6.67 \times 10^{-11}$	Newton-metr <sup>2</sup> /kilogram <sup>2</sup>
Przenikalność elektryczna	$8.85 \times 10^{-12}$	Farad/metr
Przenikalność magnetyczna	$1.26 \times 10^{-6}$	Henry/metr
Strumień elektryczny	$1.60 \times 10^{-19}$	Coulomb
Masa spoczynkowa elektronu	$9.11 \times 10^{-31}$	Kilogram
Masa spoczynkowa protonu	$1.67 \times 10^{-27}$	Kilogram
Średni promień ziemi	$6.37 \times 10^6$	Metr
Masa ziemi	$5.98 \times 10^{24}$	Kilogram

## Bibliografia

- Bansevicius R., Jebb A., Knight J., Parkin R., *Piezomechanics: a New Sub-system in Mechatronics and its Applications in Precision Engineering*, [in:] *Mechatronics. The Basics for New Industrial Development. Computational Mechanics Publications*, Southampton, 1994, pp. 361-366.
- Bradley D., Davson D., Burd N., Loader A., *Mechatronics. Electronics in products and processes*, Chapman & Hall, London 1991.
- Burr J., *Mechatronics Design in Japan*, Technical University of Denmark, Institute for Engineering Design. IK publications 89.58 A. Lyngby 1989.
- Corge Ch., *Elementy informatyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1981.
- Chojnowski W., *Automatyka dla nauczycieli wychowania technicznego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1981.
- Constantinesco G., *Transmission of Power- The Present, the Future*, Newcastle-upon-Tyne, Published by the North East Coast Institution of Engineering and Shipbuilders, Bolbec Hall, London 1926, p. 1-66.
- Dietrych J., *System i Konstrukcja*, wyd. 2, WNT, Warszawa 1985.
- Duch W., *Fascynujący świat komputerów*, Wydawnictwo Nakom, Poznań 1997.
- Dziwiński P., *Wykłady z matematyki*, t. II, Związkowa Drukarnia we Lwowie, Lwów 1908.
- Erdman A.G., Ed. *Modern Kinematic. Developments in the last 40 years*, John Wiley 1993, USA, p. 604.
- Feynman R., *Wykłady z fizyki*, t. I, cz. I, Wydawnictwo Naukowe, PWN Warszawa 1971.
- Firestone F.A., *Twix Earth and Sky with Rod and Tube; The mobility and classical impedance Analogies*, J. Acoust. Cos. Amer., Vol 28(1956), 1117-1153.
- Gawrysiak M., *Mechatronika – naturalny etap rozwoju maszyn czy nowa filozofia konstruowania?*, Materiały XVII Sympozjum Podstaw Konstrukcji Maszyn, Tom Referaty Problemowe, Lubelskie Towarzystwo Naukowe. Lublin 1995, s. 51-63.
- Gawrysiak M., *Mechatronika – nowa teoria maszyn?*, XV Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Dydaktyczna Teorii Maszyn i Mechanizmów, Białystok-Białowieża, 17-21 września 1996, s. 7-15.
- Hanson M., *Teaching Mechatronics at Tertiary Level*, Mechatronice Vol. 4. No. 2, 1994, pp. 217-225.
- Hewitt J.R., *Mechatronics*, [in:] *Mechatronics Design in textile Engineering*, Acar M. (ed.), NATO ASI Series E: Applied Sciences, Volume 279, Kluwer Academic Publishers. Dodrecht 1995, pp.1-26.
- Hunt V.D., *Mechatronics Japan's Nowest Threat*, Chapman & Hall, London 1998
- Isserman R., *Integrierte mechanisch-electronische Systeme*, VDI- Z 135 (1993), Nr. 10, s. 64-69.
- Jabłoński W., Płoszajski G., *Elektronika z automatyką*, WSiP, Warszawa 1996.
- Kajitani M., *A concept of Mechatronics*, J. Robotics and Mechatronice, v.1, nr 1, June 1989.
- Karijoja P, Nousiainen S., Hannula T., *The feasibility of ontra-machine optic communication network*, Conference Procceeding of EFOC/LAN 89, 12-16 June, Amsterdam 1989.
- Karnopp D. C. and Rosenberg R. C., *System Dynamics, a Unifield Approach*, John Wiley 1975.
- King T., *Millwrights to mechatronics: the merits of multi-disciplinary engineering*, Mechatronics, vol. 5, No. 2/3, 1995, pp. 95-115.
- Kostro J., *Podstawy automatyki*, Wydawnictwo Szkolne i Mała Encyklopedia techniki, PWT, Warszawa 1967.
- Kota S., Chenchom T., *Adjustable Robotic Mechanisms for Low-cost Automation*, Proceedings of the 1990 ASME Mechanisms Conference, Chicago 1990.
- Layton R.A., *Principles of Analytical System Dynamics*, Springer – Verlag New York 1998.
- Mangeron D., Deleanu S.: *Sur une classe d'equations de la mecanique on sens de Tzenoff*. Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences 15, 1962.

- McCalla W.J., *Fundamentals of Computer- Aided Circuit Simulation*. Kluwer Academic, London 1988.
- Miu D.K., *Mechatronics. Elektromechanics and Contrmechanics*, Springer 1993.
- Paynter H.M., *Analisis and Design of Enginnering System*, MIT Press Cambridge, Mass 1961.
- Preston M.E., *Mechatronics The new design integrator*, Proceedings of SEEFITALI 1989 annual conference, Naples. Italy 1989, pp.263-268.
- Rapponen T., Heilala J., Airila M., *Mechatronic design for industrial grippers*, Mechatronics, vol. 2, Breat Britan 1992, pp. 239-255.
- Proceedings, IMechE 1990.
- Rodecki W., *Enführung In die Mechatronik*, B.G. Teubner Stuttgart 1997.
- Rosenblatt F., *Priciples of Neurodynamics Perceptroms and the Theory of Brain Mechanisms*, Spartan Books, 1962.
- Salminen V., Verho A., *Multi-disciplinary design problem in mechatronics and spme suggestion to its methodical solution in conceptual design phase*, ICED 89 (Harrogate) – Proceedings, IMechE 1989.
- Salminen V., Tanskanen K., Verho A., *Finish mechatronics approach – experience in adaptation educational, research and industry purposes*, Robinson College, Cambrige, Conference
- Salminen V., Tanskanen K., Verho A., Aho K., *Metamethodics in the task definition and conceptual design phases*, ICED 90 (Dubrovnik) – Proceedinbgs.
- Salminen V., Verho A., *Systematic and Innovaite Design of Mechatronic Product*, Mechatronics, vol. 2, No. 3, Great Britan 1992, pp. 257-275.
- Salminen V., Verho A., *Systematic and innovative of a mechatronic product*, Mechatronics, vol. 2, Great Britan 1992, pp. 257-275.
- Salmine V., Verho A., Laurila T., *The Finish Mechatronics Program – Eductional, Research and Industral Applications*, Mechatronics, vol. 2, No. 3, Great Britan 1992, pp. 221-230.
- Stecki S., Wojnarowski J., *Modeling and Simulation of Neuromechanic Systems*, ZN Pol. Śl. s. Mechanika, z. 122, 1995.
- Tadusiewicz R., *Sieci neuronowe*, Akad. Oficyna Wyd. RM, Warszawa 1993.
- The Finisz Mechatronice Program, Final Report TEKES, Helsinki (1990) [English Sumary report, 1991].
- Tesar D.A., *Personal View of the Past, Present and Future of Mechanisms Science*, University of Florida Gainesville, 1976.
- The Finish, Mechatronics Program (Final Report), TEKES, Helsinki 1989.
- Turowski J., *Podstawy Mechatroniki*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Humanistyczno-Ekonomicznej w Łodzi, Łódź 2008.
- Viitanen P., Yli - Pietila T., Yli - Paunu P., Suoranta R., *Modeling and Simulation of Mechatronical Devices. Mechatronics. Vol.2. No.3. pp.231 – 238. Great Britan 1992.*
- Wojnarowski J., *Zastosowanie grafów w analizie drgań układów mechanicznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Wrocław 1981.
- Wojnarowski J., *Grafy i mechatronika*, XV Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Dydaktyczna teorii Maszyn i Mechanizmów, Białystok-Białowieża, 17-21 września 1996, s. 39-49.
- Wojnarowski J., *Zastosowanie grafów w analizie drgań układów mechanicznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Wrocław 1981.
- Wojnarowski J., *Graph Representation of Mechanical Systems*, Mechanizm & Machine Theory, Pergamon October 1995, vol. 30, No. 7, s. 1099-1112.
- Wojnarowski J., *Kontzseptueller Rationolisuus von Prof. J. Dietrych in dem Buch „System und Konstruktion”*, Ref. Wygł. Na XV Kolokwium Magdeburg – Gliwice w Konigslutter 07.-08.05.1991.
- Wojnarowski J., Nowak A., *Mechanika manipulatorów*, Skr. Uczel. Nr 1686, Gliwice Pol. Śl.
- Wojnarowski J., Nowak A., *Modeling the kinematics of minding manipulator by use of motors method*, Proceedings TM I M., Liberec (CRS), 1992, s. 262-266.

## Nota o Autorze

**Józef Bolesław Wojnarowski** (ur. w Starym Sączu) – uczony, specjalista w dziedzinie mechaniki, dynamiki układów mechanicznych, budowy i eksploatacji maszyn, eliminacji drgań maszyn, teorii grafów, biomechaniki i mechatroniki. Tytułarny profesor zwyczajny zatrudniony w Politechnice Śląskiej w latach 1954-2005. Dyrektor Instytutu Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn (1985-1991). Kierownik Katedry Mechaniki, Robotów i Maszyn (1991-2003).

Uzyskał następujące stopnie i tytuły naukowe:

- stopień magistra inżyniera: rok 1958 (Wydział Mechaniczny Politechniki Śląskiej);
- stopień doktora: rok 1964 (Wydział Mechaniczny Energetyczny Politechniki Śląskiej);
- stopień doktora habilitowanego: rok 1977 (Wydział Energetyczny Politechniki Śląskiej);
- tytuł profesora nadzwyczajnego: rok 1980 (nadany przez Radę Państwa);
- tytuł profesora zwyczajnego: rok 1988 (nadany przez Radę Państwa);
- tytuł doktora honoris causa: rok 1995 (nadany przez Senat Donieckiego Uniwersytetu Technicznego, Ukraina) i 2007 (nadany przez Senat Politechniki Łódzkiej).

Przynależność do stowarzyszeń naukowych

Od 1963 roku członek Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, przewodniczący zarządu głównego w latach 1984-1988. Od 1984 roku członek Komitetu Budowy Maszyn PAN, a od 2002 roku Członek prezydium Komitetu Budowy Maszyn Polskiej Akademii Nauk. Od 1986 roku członek Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) w Niemczech. Od 1999 roku jest członkiem EUROMECH – European Mechanics Society. Od 1996 roku jest członkiem zwyczajnym Akademii Inżynierskiej w Polsce (AIP), w latach 2002-2007 pełnił funkcję wiceprezesa, a od 2010 roku jest przewodniczącym Komisji Rewizyjnej AIP. Od 2001 roku jest członkiem Akademii Nauk Inżynierskich Ukrainy, od 2003 roku członkiem Europejskiej Akademii Nauki, Sztuki i Literatury (Academie Europeenne des Sciences, des Arts et des Letters), a od 1994 roku przewodniczącym Zespołu Nauk Technicznych Ekspertów Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Profesor Józef Wojnarowski należy do grona wybitnych nauczycieli akademickich środowiska śląskiego, który wprowadził w nauce polskiej nowatorskie i niekonwencjonalne inspiracje badawcze. Jest twórcą i propagatorem uznanej i cenionej na świecie polskiej szkoły naukowej w zakresie mechaniki teoretycznej oraz stosowanej, a w tym zastosowań grafów w mechanice, biomechaniki z głębokimi implikacjami w mechanice, dynamice maszyn i mechatronice.

Od 1971 roku rozwijał zastosowania teorii grafów w mechanice i teorii drgań. Wydana przez niego w 1981 roku książka pt. *Zastosowanie grafów w analizie drgań układów mechanicznych* była pierwszą pozycją z tej dziedziny w Polsce. W wyniku jego osiągnięć w dziedzinie zastosowań grafów w latach 1993 i 1999 zainicjowano i zorganizowano międzynarodowe konferencje „Graphs and Mechanics”. Dzięki rozległej wiedzy i bogatym doświadczeniom dydaktycznym oraz niezwykłemu zamiłowaniu do pracy z młodzieżą akademicką Profesor zyskał opinię świetnego pedagoga, doradcy i przewodnika o umiejętności budzenia mądrości twórczej i poznawczej, a co przyczyniło się do znaczącego dorobku w kształceniu kadr naukowych.

Prowadzone przez Profesora seminarium mechaniki stosowanej ukształtowało jego szkołę naukową, powstały liczne doktoraty i habilitacje, a wielu jej członków otrzymało tytuły profesorskie. Do najważniejszych osiągnięć w tym zakresie było wypromowanie 19

doktorów nauk technicznych, 10 wychowanków profesora uzyskało stopień doktora habilitowanego, 6 profesora, a oprócz tego wypromował setki inżynierów.

W ramach działalności opiniotwórczej profesor opracował 55 recenzji prac doktorskich, 38 dysertacji habilitacyjnych, 28 opinii wniosków profesorskich, 10 opinii monografii oraz 12 recenzji dla czasopism zagranicznych.

W latach 1997-1999 zasiadał w Centralnej Komisji ds. Tytułu Naukowego i Stopni Naukowych, dla której opracował 22 opinie dotyczące zatwierdzenia stopnia doktora habilitowanego i 11 opinii wniosków o nadanie tytułu profesora.

Był honorowym promotorem dr h. c. prof. Janusza Dietrycha i przygotował dla senatu 3 opinie dla 3 kandydatów (prof. Martynow z Moskwy, prof. Kiekens z Belgii i prof. Offerman z Niemiec) zgłoszonych do godności dr. h. c.

Profesor jest niestrudzonym rzecznikiem tradycji akademickich, tworząc swoją osobą ważny i trwały fragment historii Politechniki Śląskiej, Politechniki Łódzkiej PTMTS-u PK TMM oraz w ogólności Nauki Polskiej. Ścisłe kontakty naukowo-dydaktyczne z Politechnika Doniecką i opieka nad przewodem habilitacyjnym doc. Valentina Oniszczenko znalazły pozytywną wzmiankę o współpracy naukowej prof. J. Wojnarowskiego z Ukrainą, którą umieścił redaktor Giedroyć w nr 3/630. Paryż 2000 w Kulturze paryskiej.

Profesor jako przewodniczący PTMTS Oddział Gliwice, a następnie sekretarz generalny i przewodniczący Zarządu Głównego znacząco zmienił formułę tzw. gliwickich sympozjów Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, a przez wprowadzenie w roku 1974 hasła „Modelowanie w Mechanice” sympozjony te corocznie organizowane w Beskidzie Śląskim stały się ważnym forum spotkań naukowych na rzecz rozwoju mechaniki i prezentowania zagadnień aktualnie rozwijanych przez ośrodki badawcze w kraju i zagranicą. W lutym 2011 roku odbyło się jubileuszowe – 50. – Sympozjon Modelowanie w mechanice.

Godnym podkreślenia jest fakt, że w roku 1986 wraz z doc. Wojciechem Tarnowskim zainicjował, w czasie sympozjonu, obrady w sekcji z zakresu Polioptymalizacji, będące początkiem konferencji o tej tematyce organizowanych corocznie przez Politechnikę Koszalińską w ośrodkach nadmorskich.

W czasie 23 zjazdu Delegatów i z okazji 30-lecia PTMTS dr Okrouchlik wręczył na ręce Profesora medal dla PTMTS za zasługi dla rozwoju mechaniki i w uznaniu nawiązanej współpracy z Czechosłowackim Towarzystwem Mechaniki (ČSSM). W uznaniu zaangażowania na rzecz PTMTS w 1996 roku profesor został powołany do Rady Redakcyjnej Journal of Theoretical and Applied Mechanics PTMTS, a XXVIII zjazd delegatów PTMTS w roku 1998 nadał mu godność Członka Honorowego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Równie aktywnie Profesor uczestniczy w pracach Polskiego Komitetu Teorii Maszyn i Mechanizmów (PK TMM) przy Komitecie Budowy Maszyn PAN. W roku 2002 został wybrany na przewodniczącego tego komitetu, zaś we wrześniu 2006 roku w czasie XX Konferencji TMM członkowie komitetu dokonali jego reelekcji zatwierdzonej przez KBM PAN. Najlepszym wyznacznikiem jego aktywnego udziału w pracach PK TMM jest przygotowanie do druku i wydanie publikacji „Pięćdziesięciolecie Polskiego Komitetu Teorii Maszyn i Mechanizmów 1956-2006” ocenionej przez Prof. Jana Oderfelda, honorowego przewodniczącego PK TMM jako „ważne dzieło bibliograficzne (prawie 200 stron) na dziś i na przyszłość”. Uczestniczy w Komitetach Technicznych The International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms (IFTToMM). Na XI kongresie IFTToMM wybrano go do Komisji Standaryzacji i Terminologii (CST).

Dzięki działaniom Profesora jako przewodniczącego IFTToMM-u w Polsce PK TMM stał się ważnym ogniwem Międzynarodowej Federacji Teorii Mechanizmów i Maszyn (IFTToMM). W dniu 26 stycznia 2010 roku w Zakopanem z fundacji Rady Wykonawczej

IFTToMM-u została odsłonięta tablica upamiętniająca utworzenie Międzynarodowej Federacji Promocji teorii Maszyn i Mechanizmów (IFTToMM). Za zorganizowanie tej uroczystości i nadanie jej szerokiego rozgłosu Profesor zyskał uznanie oraz podziękowania od Władz Polskiej Akademii Nauk i prezydenta IFTToMM-u Prof. Marco Ceccarellego uczestniczącego w odsłonięciu tablicy w DW. Hyrny. Prof. J. Wonarowski uczestniczył w światowych Kongresach Międzynarodowej Federacji TMM (IFTToMM) w: Zakopanem (Polska 1969), Montrealu (Kanada 1978), Pradze (Czechosłowacja 1991), Mediolanie (Italia 1996), Oulu (Finlandia 1999), Tienjin (Chiny 2004), Besançon (Francja 2007).

Wyniki swoich badań opublikował w ponad 500 pracach w postaci: artykułów w czasopismach i materiałach konferencyjnych, rozpraw naukowych, monografii i podręczników akademickich. Jest współtwórcą 5 patentów.

Profesor Józef Wojnarowski był wielokrotnie zapraszany do ośrodków naukowych w Europie i na świecie. Przebywał jako visiting professor m.in. w takich uniwersytetach jak: University of Alberta w Edmonton, Kanada (1981), University of Nis, Jugosławia (1985), Omski Politechniczny Instytut (1989), Nowosybirski Instytut (1989), Monash of University w Melbourne, Australia (1994) Doniecki Narodowy Uniwersytet Techniczny, Ukraina (2001). Był również zapraszany przez uniwersytety w Aachen, Hamburgu, Leningradzie, Omsku, Magdeburgu, Nowosybirsku, Lwowie Karlsruhe, Koszycach, Pilźnie, Laughborough, Newcastle upon Tyne, Queen's College w Londynie, Valenciennes we Francji. Przychodził także jako konsultant naukowy w firmie HYD –MECH Engineering LTD w Kanadzie.

Profesor Wojnarowski był i jest członkiem wielu stowarzyszeń oraz organizacji, m.in.:

- od 1984 roku – członek Komitetu Budowy Maszyn PAN;
- od 1984-1990 – członek Komitetu Mechaniki PAN;
- od 1986-1990 – członek Prezydium Rady Towarzystw Naukowych PAN;
- od 1994 roku – członek Komitetu Redakcyjnego Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych KBM PAN Sekcji podstaw Konstrukcji Maszyn;
- od 1996 roku – członek Komitetu Redakcyjnego Журналу “Вібрації в техніці та технологіях” Winnica, Ukraina;
- od 1985 roku – członek Komitetu Naukowego Sympozjonów Podstaw Konstrukcji Maszyn;
- od 1996 roku – członek Komitetu Naukowego corocznych konferencji Progresywnyje Technologii Maszynostrojenia i Sovremiennosti, Sevastopol, Ukraina;
- od 1998 roku – członek International Society of Biomechanics;
- od 1998 roku – członek Polskiego Towarzystwa Pojazdów Ekologicznych;
- od 2002 roku – członek Komitetu redakcyjnego serii: Monografie Naukowe Komisji Włókiennictwa PAN Oddział w Łodzi;
- od 2005 roku – członek Komitetu Naukowego Międzynarodowej Konferencji „Optimalizacja mechanicznych sústav a zariadeni, Techniczny Uniwersytet w Košicach. Słowacja.

Recenzent czasopisma “Journal of the Theory Machine and Mechanism”.

Wyniki bardzo aktywnej działalności naukowej Profesora były wielokrotnie nagradzane. Za swą działalność uzyskał indywidualne nagrody ministra i rektora oraz medale i odznaczenia, m.in. Krzyż Kawalerski i Oficerski Orderu Odrodzenia Polski.

#### Noty o słownikach biograficznych

Sylwetka prof. inż. J. Wojnarowskiego opisana jest wielokrotnie w polskich, amerykańskich i angielskich wydawnictwach biograficznych.

- Kto jest Kim w województwie '93, Wydawnictwo „Książnica” przy współpracy Towarzystwa Zachęty Kultury w Katowicach, s. 368.
- Problemy Maszyn Roboczych. Kolegium Twórczości Technicznej Akademii Inżynierskiej w Polsce, z. 14, Radom 1999, s. 5-7.
- Złota Księga Nauki Polskiej 2000. Naukowcy Przełomu Wieków, Wydawnictwo Helion, Gliwice 2000, s. 1037-1038.
- Who is Who w Polsce, Hübners blaues Who is Who, Schweiz 2002, s. 2148-2149.
- Bombicki M.R., Encyklopedia Actus Purus. Kto jest kim w Polsce nowego Milenium (2000-2002), Polska Narodowa Oficyna Wydawnicza Pol-Euro-business, Poznań 2004, s. 575.
- Złota Księga Nauki Polskiej. Naukowcy Zjednoczonej Europy, Wydawnictwo Helion, Gliwice 2006, s. 916-917.
- Dictionary of International Biography.
- Jubileusz 75. rocznicy urodzin, 54. lat działalności naukowej, 20. lat profesury zwyczajnej Józefa Wojnarowskiego. Zeszyt Pol. Śl. Gliwice, kwiecień 2008, 140 s.
- Who is Who w Polsce 2008.
- Wielka Księga Jubileuszu 65-lecia Politechniki Śląskiej 1945-2010, Helion 2010, s. 420-421.
- <http://pl.wikipedia.org> Józef Bolesław Wojnarowski.