

Marek JASIŃSKI

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu

OBLICZANIE CZASU REALIZACJI PRZEDSIĘWZIĘCIA W ZMODYFIKOWANEJ SIECI PERT

Streszczenie

W zarządzaniu projektem często stosuje się metody sieciowe. Wśród wielu takich metod wyróżnia się te, w których możliwe jest uwzględnienie niepewności, zarówno w czasach trwania czynności składających się na projekt, jak i samej struktury całego projektu. Metody o stochastycznej strukturze logicznej dają większe możliwości analizy projektu, ale zwykle są znacznie bardziej skomplikowane pojęciowo i trudniejsze w stosowaniu. W artykule zaproponowano modyfikację sieci PERT, jednej z najstarszych, ale wciąż popularnych metod o deterministycznej strukturze logicznej, tak aby w pewnym zakresie zyskała cechy sieci o stochastycznej strukturze logicznej z jednoczesnym zachowaniem swej prostoty i łatwości w stosowaniu.

Słowa kluczowe: sieci o stochastycznej strukturze logicznej, sieci o deterministycznej strukturze logicznej, sieci PERT, markowskie sieci PERT.

CALCULATING THE TIME OF PROJECT IMPLEMENTATION IN THE MODIFIED PERT NETWORK

Summary

Network methods are often used in project management. Among many such methods there are those in which it is possible to consider the uncertainty, both during the duration of the activities that make up the project, and the structure of the entire project itself. Methods with a stochastic logical structure give greater possibilities for design analysis, but they are usually much more complicated in terms of terms and more difficult to use. The article proposes the modification of the PERT network, one of the most popular methods with a deterministic logical structure, so that to some extent it acquires the features of a network with a stochastic logical structure while maintaining its simplicity and ease of use.

Key words: Generalized Analysis Network, Deterministic Analysis Network, PERT networks, Markov PERT networks.

Wprowadzenie

Prawidłowe zarządzanie projektem jest jednym z najważniejszych aspektów funkcjonowania firm, instytucji, różnego rodzaju organizacji, stowarzyszeń i fundacji. Umiejętność precyzyjnego obliczenia czasu realizacji projektu, potrzebnych zasobów i zagrożeń często decyduje o jego powodzeniu. W warunkach gospodarki rynkowej racjonalne zarządzanie zasobami, a co się z tym wiąże – ograniczenie kosztów funkcjonowania, wyznacza pozycję firmy na rynku. Projekt (lub inaczej przedsięwzięcie) często ma charakter złożony.

Przez zarządzanie przedsięwzięciem złożonym rozumie się zbiór działań prowadzących do osiągnięcia wyznaczonego celu w określonym czasie. Wśród tych działań wyróżnia się inicjowanie, planowanie, realizację, czasami modyfikację elementów przedsięwzięcia oraz kontrolowanie jego realizacji. Do analizy takiego przedsięwzięcia zazwyczaj tworzy się model procesu jego realizacji. W modelowaniu często wykorzystuje się metody sieciowe, a jednym z podstawowych problemów rozwiązywanych w trakcie analizy takich modeli jest wyznaczenie całkowitego czasu trwania projektu.

Istnieje wiele rodzajów metod sieciowych, które często przeznaczone są do określonych rodzajów projektów, uwzględniających specyfikę danej branży. Inaczej wygląda zarządzanie projektem budowlanym, a inaczej projektem informatycznym.

Wszystkie je można podzielić pod względem określenia czasu wykonania poszczególnych czynności na dwie grupy:

- metody deterministyczne, czyli takie, w których znane są dokładne czasy realizacji czynności;
- metody probabilistyczne, czyli takie, w których czasy realizacji czynności traktowane są jako zjawiska losowe.

Metody probabilistyczne, np. PERT (*Project Evaluation and Review Technique*), umożliwiają uwzględnienie niepewności i zróżnicowania czasów realizacji czynności, co często jest konieczne do adekwatnego określenia czasu trwania całego projektu.

Inny podział metod sieciowych uwzględnia strukturę logiczną samej sieci i tu można wyróżnić:

- metody o zdeterminowanej strukturze logicznej DAN (*Deterministic Analysis Network*);
- metody o stochastycznej strukturze logicznej GAN (*Generalized Analysis Network*).

Metody GAN, np. GERT (Pritsker, 1966), są bardziej skomplikowane, ale dają wobec metod DAN szereg nowych możliwości, m.in. wielowariantowość realizacji czynności, a także zmianę relacji kolejnościowych między czynnościami.

Niezależnie od wyznaczania zależności czasowych, metody sieciowe często uzupełnione są o analizę kosztową projektu, stąd na bazie np. metod CPM, PERT powstały ich rozszerzenia w postaci metod CPM-COST i PERT-COST.

W artykule omówiona zostanie jedna z metod DAN, czyli metoda sieciowa PERT. Ma ona szereg zalet, z których najważniejsze to:

- możliwość zarządzania dużymi projektami;
- prostota obliczeń;
- możliwość graficznej prezentacji;
- możliwość wyznaczania rozkładu czasu trwania projektu;
- możliwość wyznaczania rozkładu czasu do zakończenia projektu od dowolnego momentu jego realizacji.

Celem artykułu jest zaprezentowanie takiej modyfikacji sieci i wynikającej z niej modyfikacji metody PERT, aby – zachowując jej zalety – uzyskać pewne własności charakterystyczne dla metod GAN, a w szczególności wielowariantowość realizacji czynności.

Sieć PERT i jej modyfikacja

PERT to jedna z najstarszych probabilistycznych metod planowania oraz kontroli projektu (połowa XX wieku) i pomimo, że później powstało wiele nowych zaawansowanych metod, w dalszym ciągu pojawiają się w literaturze propozycje jej modyfikacji i wykorzystania (Trietsch, Baker, 2012; Xiangxing, Xuan, Zhening, 2010). Także aplikacje i komputerowe systemy wspomaganie decyzji w dalszym ciągu wyposażone są w moduły do obsługi PERT.

Czas trwania każdej czynności przybliża się w PERT jako średnią ważoną z trzech ocen czasów jej trwania (pesymistycznej, optymistycznej i najbardziej prawdopodobnej). Sposób dokonania tych ocen nie jest precyzyjnie określony i często wymaga posiadania wiedzy eksperckiej. Co ciekawe, taki sposób szacowania czasu trwania czynności, choć nie posiada odpowiedniego uzasadnienia teoretycznego, stosowany jest z powodzeniem w praktyce.

Innym podejściem jest nie szacowanie, jednak dążenie do wyznaczenia pełnego opisu probabilistycznego całkowitego czasu trwania przedsięwzięcia, czyli np. wyznaczenia jego dystrybuanty.

W związku z tym, należy tu wyraźnie odróżnić metodę PERT, czyli ogólnie znany sposób przybliżonego wyznaczania czasu realizacji przedsięwzięcia, od typu sieci, który przyjmowany jest w metodzie PERT. W opracowaniu podjęte zostanie zagadnienie sieci PERT.

Cechą charakterystyczną sieci PERT jest to, że aby całe przedsięwzięcie zostało zakończone, muszą być zrealizowane wszystkie czynności. Określone są też w sposób niezmienny relacje kolejnościowe między czynnościami. Możemy zatem określić PERT jako sieć DAN z losowymi czasami trwania czynności.

W artykule zaproponowano modyfikację sieci PERT w taki sposób, że nie tylko czas trwania każdej czynności jest zmienną losową, ale także w sposób losowy określane jest to, czy czynność w ogóle się wykona. Dzięki temu sieć PERT w pewnym stopniu zyskuje cechy sieci typu GAN, zachowując przy tym swoją prostotę i łatwość w stosowaniu. Zastosowanie sieci, w których wykonanie czynności nie jest pewne, może być szczególnie przydatne w opisie przedsięwzięć jednorazowych, związanych np. z remontami, gdzie sam przebieg i zakres prac nie jest z góry znany i można jedynie mówić o prawdopodobieństwie wykonania się czynności. Przykładem może być znany z przekazów medialnych problem remontu zabytkowego wiaduktu kolejowego nad ul. Grzegorzeczką w Krakowie, gdzie dopiero w trakcie prac, po przeniesieniu ruchu kolejowego na dobudowaną część wiaduktu i sprawdzeniu konstrukcji, okazało się, że nie spełnia ona wymogów współczesnego ruchu kolejowego. Co istotne, po odkryciu fundamentów starego wiaduktu stwierdzono też, że konieczne będzie wykonanie prac (czynności) związanych z rozbiórką i budową nowych fundamentów, co wiąże się z koniecznością uzyskania zgody konserwatora zabytków oraz znaczącymi zmianami w harmonogramie realizacji przedsięwzięcia (www.se.pl/krakow/zabytkowy-wiadukt-nad-ulica-grzegorzeczka-w-krakowie-do-rozbiorki-aa-jqxn-xtMH-VV36.html, dostęp: 09.09.2019).

W modelu PERT przyjmuje się następujące założenia:

- realizacja przedsięwzięcia złożonego modelowanego za pomocą sieci PERT rozpoczyna się od jednoczesnego rozpoczęcia wykonania wszystkich czynności ze zbioru czynności, które nie posiadają czynności poprzedzających;
- realizacja każdej następnej czynności rozpoczyna się z chwilą zakończenia wszystkich czynności ją poprzedzających (relacja kolejnościowa);
- zakończenie wszystkich czynności jest równoważne z realizacją całego przedsięwzięcia;
- każda czynność przedsięwzięcia wykonuje się dokładnie jeden raz;
- czasy realizacji czynności są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Dodatkowo przyjęto założenie, że czasy realizacji czynności będą miały rozkłady dyskretne i będą to rozkłady geometryczne.

Przyjęte założenia pozwalają z tak zdefiniowanej sieci wyprowadzić łańcuch Markowa, co umożliwia z kolei wyznaczenie dystrybuanty czasu trwania całego projektu w sposób analityczny. Sieci takie znane są w literaturze jako MPN (*Markov PERT Network*) w wersji dyskretnej. Istnieją także odpowiedniki takich sieci w wersji ciągłej i wtedy czasy trwania czynności mają rozkłady wykładnicze (Kulkarni, Adlakh, 1986).

Podstawowymi komponentami łańcucha Markowa są: zbiór stanów procesu S , wektor prawdopodobieństw początkowych $\Pi(0)$ oraz macierz A prawdopodobieństw przejścia w jednym kroku pomiędzy stanami procesu.

W MPN na zbiór stanów procesu składają się podzbiory aktywnych w danej chwili czynności sieci PERT. Stanem początkowym jest podzbiór czynności PERT, które nie mają czynności poprzedzających, zaś jedynym stanem pochłaniającym jest stan, w którym wszystkie czynności zostały zakończone. W związku z tym, w wektorze prawdopodobieństw początkowych jedynie element odpowiadający stanowi początkowemu ma wartość 1, a pozostałe elementy mają wartość 0. W wersji dyskretnej przejście między stanami procesu wiąże się z zakończeniem co najmniej jednej czynności sieci PERT. Dysponując łańcuchem Markowa, można wyznaczyć rozkład lub – w zależności od potrzeb – wybrane parametry rozkładu czasu trwania projektu, np. wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe. Wyznaczanie wszystkich wymienionych elementów jest dobrze opisane w literaturze (Kulkarni, Adlakha, 1986).

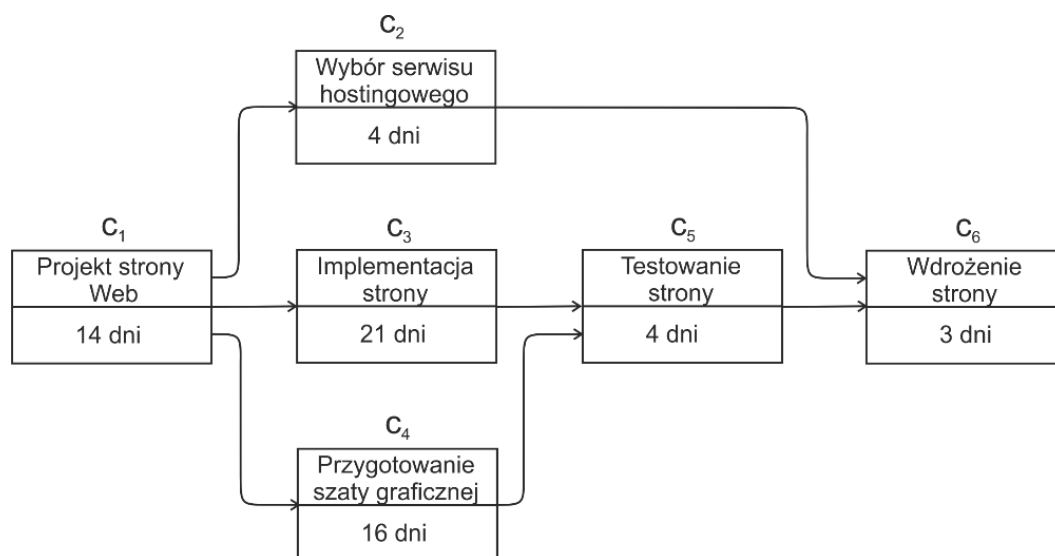
W prezentowanej w tym artykule modyfikacji sieci PERT proponuje się określenie prawdopodobieństw wykonania się czynności. To, czy czynność w ogóle się wykona traktowane jest jako zdarzenie losowe z określonym prawdopodobieństwem, a jeśli czynność już się wykonuje, to wykonuje się zgodnie z przypisanym jej rozkładem losowym.

Modyfikacja taka sprawia, że w pewnym zakresie sieć PERT zyskuje cechy sieci GAN. Możliwa jest wielowariantowa realizacja procesu oraz uwzględnienie niepewności związanej z wykonywaniem się poszczególnych czynności i związanym z tym ryzykiem. Warto podkreślić, że poprzez przyjęcie wartości 1 prawdopodobieństw wykonania się wszystkich czynności uzyskuje się klasyczną postać sieci PERT, zaś przyjęcie dla wskazanych czynności wartości prawdopodobieństwa 0 oznacza tak naprawdę usunięcie tych czynności z sieci.

Z praktycznego punktu widzenia istotne jest to, że w całym opisie probabilistycznym po modyfikacji sieci PERT zmianom ulegają jedynie macierz prawdopodobieństw przejść i wektor prawdopodobieństw początkowych.

Przykład obliczeniowy

Analizie poddana została sieć PERT z rysunku 1. Zastosowano notację AON (*activity on node*), co oznacza, że czynności umieszczone zostały w węzłach grafu, łuki pokazują jedynie zależności kolejnościowe pomiędzy czynnościami. W dolnej części węzłów podano oczekiwane czasy trwania czynności.



Rysunek 1. Sieć PERT. Stworzenie strony www.
Źródło: opracowanie własne.

Sieć ta składa się z 6 czynności oznaczonych symbolami od c_1 do c_6 . Czasy trwania czynności t_i mają rozkłady geometryczne z parametrem p_i , czyli prawdopodobieństwo zakończenia się i -tej czynności po upływie k jednostek czasu wyraża się wzorem:

$$P(t_i = k) = (1-p_i)^{k-1}p_i$$

Czasy wykonania czynności traktujemy jako wartości oczekiwane rozkładów czasów trwania czynności. W rozkładzie geometrycznym wartość oczekiwana wynosi $1/p_i$, stąd możemy wyliczyć p_i .

Początek realizacji procesu oznacza rozpoczęcie się czynności c_1 , zaś wykonanie się wszystkich sześciu czynności oznacza zakończenie procesu.

Dla podanego przykładu wyznaczone zostały komponenty łańcucha Markowa. Zbiór stanów S składa się z 12 elementów oznaczonych symbolami $s_1 - s_{12}$.

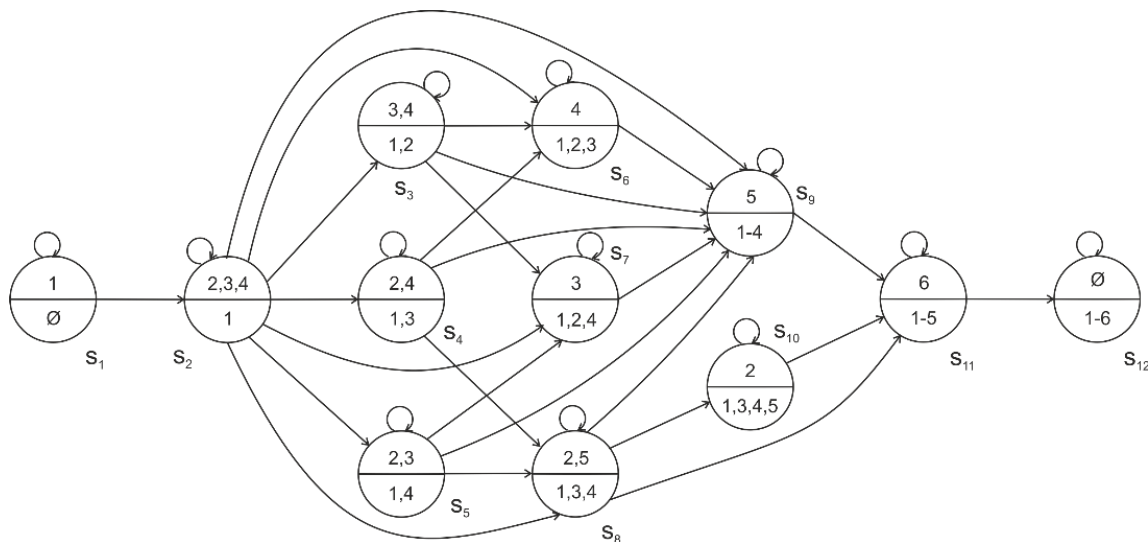
Każdy z tych stanów to podzbiór zbioru czynności PERT: $s_1 = \{1\}$, $s_2 = \{2, 3, 4\}$, $s_3 = \{3, 4\}$, $s_4 = \{2, 4\}$, $s_5 = \{2, 3\}$, $s_6 = \{4\}$, $s_7 = \{3\}$, $s_8 = \{2, 5\}$, $s_9 = \{5\}$, $s_{10} = \{2\}$, $s_{11} = \{6\}$, $s_{12} = \emptyset$.

Wektor prawdopodobieństw początkowych ma postać: $\Pi(0) = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, oznacza to, że w chwili początkowej proces znajduje się w stanie s_1 z prawdopodobieństwem 1.

Elementy macierzy prawdopodobieństw przejść wyglądają następująco:

$a_{11} = 1-p_1$, $a_{12} = p_1$, $a_{22} = (1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)$, $a_{23} = p_2(1-p_3)(1-p_4)$,
 $a_{24} = p_3(1-p_2)(1-p_4)$, $a_{25} = p_4(1-p_2)(1-p_3)$, $a_{26} = p_2p_3(1-p_4)$, $a_{27} = p_2p_4(1-p_3)$,
 $a_{28} = p_3p_4(1-p_2)$, $a_{29} = p_2p_3p_4$, $a_{33} = (1-p_3)(1-p_4)$, $a_{36} = p_3(1-p_4)$, $a_{37} = p_4(1-p_3)$,
 $a_{39} = p_3p_4$, $a_{44} = (1-p_2)(1-p_4)$, $a_{46} = p_2(1-p_4)$, $a_{48} = p_4(1-p_2)$, $a_{49} = p_2p_4$,
 $a_{55} = (1-p_2)(1-p_3)$, $a_{57} = p_2(1-p_3)$, $a_{58} = p_3(1-p_2)$, $a_{59} = p_2p_3$, $a_{66} = 1-p_4$, $a_{69} = p_4$,
 $a_{77} = 1-p_3$, $a_{79} = p_3$, $a_{88} = (1-p_2)(1-p_5)$, $a_{89} = p_2(1-p_5)$, $a_{8,10} = p_5(1-p_2)$, $a_{8,11} = p_2p_5$,
 $a_{99} = 1-p_5$, $a_{9,11} = p_5$, $a_{10,10} = 1-p_2$, $a_{10,11} = p_2$, $a_{11,11} = 1-p_6$, $a_{11,12} = p_6$, $a_{12,12} = 1$,
 pozostałe elementy są zerowe.

Reprezentacja graficzna łańcucha Markowa pokazana została na rysunku 2.



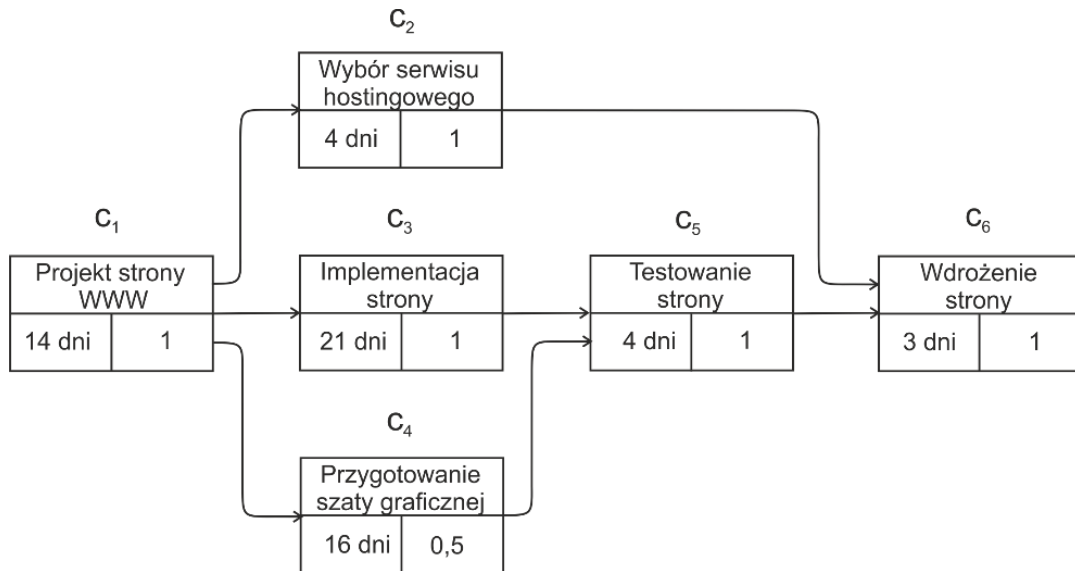
Rysunek 2. Łańcuch Markowa dla sieci PERT.

Źródło: opracowanie własne.

W celu ułatwienia analizy procesu, opis każdego stanu rozszerzono o zbiory czynności zakończonych z_i (wewnątrz węzła, w górnej połowie znajdują się numery czynności aktywnych, w dolnej, czynności zakończonych).

Proponowana modyfikacja wprowadza do opisu czynności dodatkowy parametr d_i , czyli prawdopodobieństwo jej wykonania.

Założmy w przedstawianym przykładzie, że inwestor nie podjął jeszcze decyzji, czy w tworzonej stronie zastosuje wykonaną wcześniej szatę graficzną, czy zleci jej ponowne wykonanie. Prawdopodobieństwo zlecenia wykonania tej czynności (c_4) określa na 0,5. Otrzymujemy wówczas sieć zmodyfikowaną – ;[//rysunek 3.



Rysunek 3. Modyfikacja przykładowej sieci PERT.

Źródło: opracowanie własne.

Podobnie jak dla klasycznej sieci PERT, wyznaczamy komponenty łańcucha Markowa. Jak wcześniej wspomniano, zbiór stanów S nie ulegnie zmianie. Elementy wektora prawdopodobieństw początkowych obliczamy ze wzoru:

$$\pi_i(0) = \prod_{j:c_j \in S_i} d_j \prod_{k:c_k \in Z_i} (1 - d_k), i = 1, 2, \dots, N, N - \text{liczba stanów łańcucha}$$

Markowa.

Ponieważ dla badanego przypadku d_1, d_2, d_3, d_5, d_6 mają wartości 1, wektor prawdopodobieństw początkowych oraz większość elementów macierzy prawdopodobieństw przejść nie zmieni się. Elementy macierzy obliczamy, uwzględniając pominięcie lub wykonanie czynności, np. element a_{15} , czyli prawdopodobieństwo przejścia w jednym kroku ze stanu s_1 do stanu s_5 , wymaga zakończenia czynności c_1 i pominięcia wykonania czynności c_4 . Ponieważ są to zdarzenia niezależne, wyznaczamy iloczyn odpowiednich prawdopodobieństw i otrzymujemy $a_{15} = (1-d_4)p_1$.

Zmienione elementy macierzy prawdopodobieństw przejść mają postać:

$$a_{12} = d_4 p_1, a_{15} = (1-d_4)p_1.$$

Dla zobrazowania przyjęto dane liczbowe, które dla klasycznej sieci PERT pokazano w tabeli 1.

Tabela 1

Dane liczbowe dla klasycznej sieci PERT

Czynność	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆
d _i	1	1	1	1	1	1
p _i	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

Komponenty łańcucha Markowa przyjmują wartości:

Wektor prawdopodobieństw początkowych:

$$\Pi(0)=[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0].$$

Macierz prawdopodobieństw przejść (z dokładnością do 2 miejsc po przecinku) ukazano w tabeli 2.

Tabela 2

Macierz prawdopodobieństw przejść dla klasycznej sieci PERT

	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇	S ₈	S ₉	S ₁₀	S ₁₁	S ₁₂
S ₁	0,93	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S ₂	0,00	0,67	0,22	0,03	0,04	0,02	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S ₃	0,00	0,00	0,89	0,00	0,00	0,05	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S ₄	0,00	0,00	0,00	0,70	0,00	0,23	0,00	0,05	0,02	0,00	0,00	0,00
S ₅	0,00	0,00	0,00	0,00	0,71	0,00	0,24	0,04	0,01	0,00	0,00	0,00
S ₆	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,94	0,00	0,00	0,06	0,00	0,00	0,00
S ₇	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,95	0,00	0,05	0,00	0,00	0,00
S ₈	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,56	0,19	0,19	0,06	0,00
S ₉	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,75	0,00	0,25	0,00
S ₁₀	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,75	0,25	0,00
S ₁₁	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,67	0,33
S ₁₂	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00

Dane liczbowe dla zmodyfikowanej sieci PERT pokazano w tabeli 3.

Tabela 3

Dane liczbowe dla klasycznej sieci PERT

Czynność	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆
d _i	1	1	1	0,5	1	1
p _i	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

Komponenty łańcucha Markowa dla zmodyfikowanej sieci PERT przyjmują wartości:

Wektor prawdopodobieństw początkowych:

$$\Pi(0)=[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0].$$

Macierz prawdopodobieństw przejść pokazano w tabeli 4.

Tabela 4

Macierz prawdopodobieństw przejść dla zmodyfikowanej sieci PERT

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
S1	0,93	0,04	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S2	0,00	0,67	0,22	0,03	0,04	0,02	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S3	0,00	0,00	0,89	0,00	0,00	0,05	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S4	0,00	0,00	0,00	0,70	0,00	0,23	0,00	0,05	0,02	0,00	0,00	0,00
S5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,71	0,00	0,24	0,04	0,01	0,00	0,00	0,00
S6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,94	0,00	0,00	0,06	0,00	0,00	0,00
S7	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,95	0,00	0,05	0,00	0,00	0,00
S8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,56	0,19	0,19	0,06	0,00
S9	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,75	0,00	0,25	0,00
S10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,75	0,25	0,00
S11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,67	0,33
S12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00

Wartości dystrybuant w wybranych chwilach procesu dla obu sieci przedstawione zostały w tabeli 5.

Tabela 5

Wartości dystrybuant dla przykładowej sieci PERT w wybranych chwilach procesu

k	1	10	20	30	40	50	60	70	80
d ₄ = 1	0,00	0,00	0,08	0,25	0,44	0,61	0,74	0,83	0,89
d ₄ = 0,5	0,00	0,01	0,13	0,31	0,50	0,66	0,77	0,85	0,91

Źródło: opracowanie własne.

Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe czasu trwania przedsięwzięcia mają odpowiednio wartości:

- dla $d_4 = 1$: $\mu = 48,73$, $\sigma = 24,98$;
- dla $d_4 = 0,5$: $\mu = 45,47$, $\sigma = 25,08$.

Wartość oczekiwana czasu realizacji przedsięwzięcia zmalała o ponad trzy dni, zaś zmienność wzrosła. Co ciekawe, po przyjęciu $d_4 = 0$ zmianie uległaby sama struktura logiczna przedsięwzięcia. Wartość oczekiwana wyniosłaby wówczas $\mu = 42,21$, a $\sigma = 24,76$.

Podsumowanie

W artykule zaproponowano modyfikację sieci PERT w taki sposób, aby możliwe było w przebiegu przedsięwzięcia złożonego uwzględnienie niepewności wykonania wskazanych czynności. Podejście takie sprawia, że sieć o zdeterminowanej strukturze logicznej, jaką jest PERT, zyskuje w pewnym stopniu cechy sieci o stochastycznej strukturze logicznej, zachowując jednocześnie swą prostotę i przejrzystość. Warto zwrócić uwagę, że obliczenia nie były szczególnie skomplikowane czy czasochłonne i wykonane zostały w arkuszu kalkulacyjnym. Prosto jest je także sparametryzować, co sprawia, że łatwiejsza jest też wielowariantowa analiza sieci.

Przyjęcie założenia o geometrycznych rozkładach czasów trwania czynności, które pozwoliły poprzez łańcuch Markowa na rozwiązanie problemu czasu trwania projektu metodą analityczną, może jednak budzić pewne wątpliwości. Jeśli zaistnieje taka potrzeba, to można inne rozkłady losowe czasów trwania czynności przybliżyć tzw. rozkładami fazowymi (Neuts, 1975), gdzie poszczególne fazy mają rozkłady geometryczne. Innym podejściem jest rezygnacja z metody analitycznej na rzecz metod symulacyjnych Monte Carlo (Robert, Casella, 2004).

Kolejne wątpliwości wiążą się z koniecznością posiadania przez inżyniera zarządzającego projektem pewnej wiedzy i sprawności w przeprowadzaniu obliczeń matematycznych, dlatego racjonalne wydaje się stworzenie aplikacji komputerowej, w której „ukryte” zostaną przekształcenia matematyczne. Zaprezentowane podejście bardzo dobrze się do tego nadaje.

Warto także wspomnieć, że możliwe jest podobne rozwiązanie dla modeli z czasami trwania czynności o rozkładach ciągłych. Rozkłady geometryczne zastąpione zostają wówczas rozkładami wykładniczymi.

Bibliografia

- Kulkarni, V.G., Adlakha, V.G. (1986). Markov and Markov-regenerative PERT networks. *Operations Research*, 34, 769-781.
- Neuts, M.F. (1975). *Probability distributions of phase type*. In Liber Amicorum Prof. Emeritus H. Florin, Department of Mathematics. Belgium: University of Louvain, 173-206.
- Pritsker, A.A.B. (1966). *GERT: graphical evaluation and review technique*. Rand Corporation, Santa Monica: RN-4973-NASA.
- Robert, C.P., Casella, G. (2004). *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer.
- Trietsch, D., Baker, K.R. (2012). PERT 21: Fitting PERT/CPM for use in the 21st century. *International Journal of Project Management*, 30(4), 490-502.
- Woźniak, A. (2010). *Grafy i sieci w technikach decyzyjnych*. Kraków: Infrastruktura i Ekologia Terenów Wiejskich.
- Xiangxing, K., Xuan, Z., Zhenting H. (2010). Markov skeleton process in PERT networks. *Acta Mathematica Scientia*, 30(5), 1440-1448.

www.se.pl/krakow/zabytkowy-wiadukt-nad-ulica-grzegorzeczka-w-krakowie-do-rozbiorki-aa-jqxn-xtMH-VV36.html